



FAKULTA
ELEKTROTECHNICKÁ
ČVUT V PRAZE

Fyzika 1

prof. Dr. Ing. Michal Bednařík

Klasická mechanika
Úvod do speciální teorie relativity
Elektřina a magnetismus

2025

Předmluva

Tento soubor studijních materiálů je zaměřen na učivo, které spadá do předmětu Fyzika 1 na FEL ČVUT a pokrývá jeho osnovy. Studijní texty jsou určeny nejen posluchačům všech studijních programů, ale i ostatním čtenářům zájímajících se o příslušné partie fyziky. Studijní materiály jsou uváděny v takovém rozsahu, aby je bylo možné odpřednášet během jednoho semestru o čtrnácti výukových týdnech s přidělenou hodinovou dotací (4 hod./týden), přičemž se i počítá se samostudiem některých vybraných partií, které budou upřesněny během přednášek. Vzhledem k tomu, že rozsah studijních materiálů odpovídá počtu přidělených výukových hodin, tak nelze očekávat, že by poskytnuté informace pokrývaly dotčené partie fyziky vyčerpávajícím způsobem. V podstatě se jedná vždy o úvod do příslušných oblastí fyziky. Samotný obsah učiva je koncipován tak, aby poskytované informace byly dostačující pro zájemce o navazující hlubší studium příslušné partie fyziky.

Úvodní část studijních materiálů se věnuje fyzikálním jednotkám a veličinám, souřadnicovým soustavám a základním operacím s vektory. Na ní pak navazují tři základní partie fyziky, které jsou předmětem tohoto kurzu: Klasická mechanika, Úvod do speciální teorie relativity a Elektřina a magnetismus.

V textu jsou některé významné vztahy, zákony a věty uvedeny v rámečcích. Klíčové pojmy jsou zvýrazněny šedým transparentním pruhem. Upozornění jsou v textu reprezentována tučným písmem. Znění významných tvrzení, principů či pravidel jsou v textu psány skloněným písmem. Po straně veškerého studijního textu je vytvořeno místo pro případné vpisování poznámek čtenáře. Na odkazy použité v textu je možné klikat. Součástí studijních textů jsou i vzorově řešené příklady, které jsou vybrány tak, aby čtenářům usnadnily pochopení předchozího textu.

Jedná se o první vydání takto uceleného studijního textu. Postupem času bude v dalších vydáních upravován na základě zpětné vazby od studentů a vyučujících.

Obsah

1	Úvod	9
2	Fyzikální veličiny a jednotky	10
2.1	Fyzikální veličiny	10
2.1.1	Fyzikální jednotky	12
2.2	Rozměrová analýza	14
3	Fyzikální pole a tok vektorové fyzikální veličiny plochou	18
4	Souřadnicové soustavy	23
4.1	Kartézská souřadnicová soustava	23
4.2	Operace s vektory a některé identity	26
4.3	Transformace kartézských složek vektorů	30
4.4	Křivočaré souřadnicové soustavy	32
4.4.1	Cylindrická (válcová) souřadnicová soustava	35
4.4.2	Polární souřadnicová soustava	37
4.4.3	Sférická (kulová) souřadnicová soustava	38
I	Klasická mechanika	42
5	Úvod do klasické mechaniky	43
6	Kinematika hmotného bodu	45
6.1	Trajektorie hmotného bodu	45
6.2	Jednorozměrný pohyb	50
6.2.1	Rychlost	50
6.2.2	Zrychlení	51
6.3	Vícerozměrný pohyb (pohyb v prostoru)	52
6.3.1	Rychlost	52
6.3.2	Zrychlení	54
6.4	Pohyb po kružnici	55
6.4.1	Dostředivé zrychlení při rovnoměrném pohybu hmotného bodu po kružnici	58
6.4.2	Vyjádření normálové a tečné složky zrychlení při pohybu hmotného bodu po kružnici	59
6.5	Obecný křivočarý pohyb	60
6.5.1	Popis rovinného pohybu v polárních souřadnicích	67
6.6	Skládání a rozkládání pohybu. Pohyb v homogenním tíhovém poli	68

7	Dynamika hmotného bodu	71
7.1	Základní úlohy dynamiky	76
7.2	Galileiho princip relativity a Galileiho transformace	77
8	Neinerciální vztažné soustavy	80
8.1	Odvození pohybové rovnice pro neinerciální vztažnou soustavu	80
8.1.1	Odstředivá síla	84
8.1.2	Coriolisova síla	87
8.1.3	Setrvačná síla a princip ekvivalence	89
8.2	Pohybová rovnice hmotného bodu pohybujícího se blízko nad zem- ským povrchem pro soustavu pevně spojenou s rotující Zemí . . .	90
8.2.1	Projevy Coriolisovy síly na Zemi	95
9	Práce, výkon, impuls síly a mechanická energie	97
9.1	Práce, výkon a impuls síly	97
9.1.1	Práce konstantní síly po přímce	97
9.1.2	Práce obecné síly po křivce	98
9.1.3	Kinetická energie	100
9.1.4	Výkon a impulz síly	103
9.2	Rozdělení sil a mechanická energie	104
9.3	Třecí síly při vzájemném klouzavém pohybu dvou těles	112
9.4	Lanové tření	115
10	Analytická mechanika	118
10.1	Klasifikace vazeb a stupeň volnosti	118
10.2	Zobecněné souřadnice	121
10.3	Lagrangeovy rovnice 2. druhu	124
10.4	Integrály pohybu a cyklické souřadnice	133
10.5	Hamiltonovy kanonické rovnice pohybu	138
10.5.1	Legenderovy transformace	138
10.5.2	Odvození Hamiltonových kanonických rovnic pomocí Le- genderovy transformace	141
10.5.3	Fázový prostor	145
11	Mechanické kmity	147
11.1	Obecné vlastnosti přímočarého pohybu HB vystaveného působení konzervativní síly	147
11.1.1	Netlumený mechanický harmonický oscilátor	150
11.1.2	Tlumený mechanický harmonický oscilátor	157
11.2	Vynucené (nucené) kmitání tlumeného mechanického oscilátoru . .	165
11.3	Fyzikální oscilátory	174
12	Gravitační pole	175
12.1	Newtonův gravitační zákon, gravitační síla	175
12.2	Intenzita a potenciál gravitačního pole	179
12.3	Gaussův zákon a Poissonova rovnice pro gravitační pole	183
12.4	Gravitační pole uvnitř a vně homogenní duté koule	188
12.5	Gravitační pole uvnitř a vně homogenní plné koule	189

13 Pohyb hmotného bodu v centrálním silovém poli	192
13.1 Moment síly a moment hybnosti	192
13.2 Pohybové rovnice a konstanty pohybu hmotného bodu v centrálním silovém poli	194
13.3 Rovnice trajektorie hmotného bodu v centrálním silovém poli . .	196
13.3.1 Keplerova úloha	198
13.4 Kvalitativní analýza pohybu v centrálním silovém poli pomocí efektivní potenciální energie	206
14 Dynamika soustavy hmotných bodů	211
14.1 První věta impulzová	212
14.2 Hmotný střed soustavy hmotných bodů	213
14.3 Druhá věta impulzová	215
14.4 Energie soustavy hmotných bodů	216
15 Srážka těles	219
15.1 Klasifikace srážek	219
15.2 Zákony zachování při srážkách částic	220
15.3 Dokonale pružná čelní srážka	220
15.4 Dokonale nepružná čelní srážka	222
16 Mechanika tuhého tělesa	224
16.1 Základní pojmy	224
16.2 Posuvný a otáčivý pohyb tělesa	226
16.3 Obecný pohyb tělesa	228
16.4 Pohybové rovnice tuhého tělesa	231
16.5 Rovnováha tuhého tělesa	233
16.6 Otáčivý pohyb tělesa kolem pevné osy	234
16.6.1 Kinetická energie a moment setrvačnosti tuhého tělesa . .	234
16.6.2 Steinerova věta	236
16.6.3 Moment hybnosti vzhledem k pevné ose	237
16.6.4 Pohybová rovnice rotujícího tělesa kolem pevné osy	239
16.6.5 Práce a výkon vnějších sil při rotačním pohybu kolem pevné osy	240
16.7 Rotace kolem pevného bodu	242
16.7.1 Kinetická energie obecně pohybujícího se tělesa a Königova věta	242
16.7.2 Moment hybnosti tělesa čistě rotujícího kolem pevného bodu a tenzor setrvačnosti	245
16.7.3 Moment setrvačnosti vzhledem k libovolné orientaci osy otáčení a elipsoid setrvačnosti	248
16.8 Nalezení hlavních os setrvačnosti	254
16.9 Vliv odstředivých sil při nevyvážené rotaci tělesa	260
16.10 Druhy setrvačníků	263
17 Mechanika kontinua	265
17.1 Plošné a objemové síly	265
17.2 Tenzor napětí	270
17.2.1 Obecná rovnice rovnováhy kontinua	271

17.3	Tenzor deformace	275
17.3.1	Posunutí bodu při malých deformacích	278
17.3.2	Geometrický význam složek tenzoru malých deformací	280
17.3.3	První invariant tenzoru malé deformace a objemová dilatace	281
17.4	Zobecněný Hookův zákon	283
17.4.1	Elementární Hookův zákon	286
17.5	Pohybové rovnice kontinua	289
17.6	Mechanika tekutin	293
17.6.1	Statika tekutin	294
17.7	Kinematika tekutin	302
17.7.1	Rovnice kontinuity pro tekutiny	307
17.8	Dynamika tekutin	312
17.8.1	Eulerova pohybová rovnice pro ideální tekutiny	312
17.8.2	Bernoulliho rovnice	312

II Úvod do speciální teorie relativity 318

18 Relativistická kinematika 319

18.1	Postuláty speciální teorie relativity a Lorentzova transformace	319
18.1.1	Odvození speciální Lorentzovy transformace	320
18.1.2	Odvození obecné Lorentzovy transformace	323
18.2	Dilatace času	325
18.3	Kontrakce délky a změna objemu kvádru	327
18.4	Současnost, minulost a budoucnost z pohledu speciální teorie relativity	329
18.5	Časoprostorový interval	331
18.6	Skládání rychlostí a transformace rychlosti	332

19 Relativistická dynamika 336

19.1	Relativistická hybnost a hmotnost	336
19.2	Relativistická energie a ekvivalence hmotnosti a energie	340
19.3	Transformační vztahy pro sílu	343
19.4	Shrnutí získaných poznatků ze speciální teorie relativity	344

III Elektřina a magnetismus 345

20 Elektrostatika 346

20.1	Elektrický náboj	346
20.2	Coulombův zákon a elektrické pole	347
20.3	Intenzita elektrického pole a elektrický potenciál	352
20.4	Gaussův zákon a Poissonova rovnice pro elektrické pole	357
20.5	Elektrické pole nabitě přímky a roviny	363
20.6	Elektrické pole dvou opačně nabitých rovin	367
20.7	Elektrické pole uvnitř a vně homogenní nabitě duté koule	368
20.8	Elektrického pole uvnitř a vně homogenně nabitě plné koule	370
20.9	Práce elektrické síly a elektrická energie nábojů	372
20.9.1	Práce elektrického pole při přemísťování elektrického náboje	372

20.9.2	Elektrická energie bodových nábojů	374
20.9.3	Elektrická energie spojitě rozložených nábojů a elektrostatického pole	375
20.10	Schematické shrnutí výsledných vztahů	379
20.11	Elektrické pole elektrického dipólu	380
21	Elektrostatické pole v materiálovém prostředí	384
21.1	Dielektrika a jejich polarizace	384
21.2	Elektrické pole polarizovaného dielektrika	386
21.3	Gaussův zákon v přítomnosti dielektrika	390
21.4	Materiálové vztahy a elektrické pole v dielektriku	392
21.4.1	Elektrostatické pole na rovinném rozhraní dvou dielektrik	395
21.4.2	Vlastnosti dielektrik	398
21.5	Vodiče v elektrostatickém poli	399
21.6	Kapacita vodiče a kondenzátor	405
21.6.1	Kapacita osamoceného vodiče	405
21.6.2	Kapacita dvou vodičů (elektrický kondenzátor)	406
21.6.3	Energie elektrostatického pole pro materiálové prostředí a elektrická energie kondenzátoru	408
22	Elektrodynamika	410
22.1	Elektrický proud a hustota proudu	410
22.2	Rovnice kontinuity elektrického proudu	418
22.3	Stacionární elektrické pole	420
22.3.1	Ohmův zákon	422
22.3.2	Jouleův zákon	425
22.3.3	Elektromotorické napětí	426
23	Stacionární magnetické pole	431
23.1	Magnetická indukce a Lorentzova síla	431
23.2	Biotův-Savartův zákon	435
23.3	Magnetická síla působící na proudový element a vzájemné silové působení dvou vodičů protékanych elektrickým proudem	443
23.4	Hallův jev	446
23.5	Ampèreův zákon celkového proudu pro bezmateriálové prostředí	448
23.6	Vektorový potenciál magnetického pole a Poissonova rovnice pro vektorový potenciál magnetického pole	452
23.7	Magnetický dipól	454
23.8	Moment sil působících na proudovou smyčku	458
23.9	Schematické shrnutí výsledných vztahů	460
23.10	Stacionární magnetické pole v materiálovém prostředí	460
23.10.1	Vliv materiálového prostředí na magnetické pole	460
23.11	Pole magneticky polarizovaného materiálu	462
23.12	Ampèreův zákon celkového proudu v materiálovém prostředí	464
23.13	Magnetické vlastnosti látek	465
23.13.1	Rozdělení látek podle jejich magnetických vlastností	466
23.13.2	Stacionární magnetické pole na rovinném rozhraní dvou prostředí	470

24 Elektromagnetické pole	473
24.1 Faradayův zákon elektromagnetické indukce	473
24.2 Maxwellovo zobecnění Ampèrova zákona celkového proudu pro nestacionární elektromagnetické pole	487
24.3 Indukčnost vodičů a energie magnetického pole v kvazistacionárním přiblížení	489
24.3.1 Vlastní indukčnost vodiče a vlastní indukce	489
24.3.2 Vzájemná indukčnost vodičů a vzájemná indukce	492
24.4 Energie magnetického pole	493
24.5 Energie elektromagnetického pole	495
24.6 Úplná soustava Maxwellových rovnic pro elektromagnetické, kvazistacionární, stacionární a elektrostatické pole	497
A Užité matematický aparát	501
A.1 Diferenciál funkce jedné proměnné	501
A.2 Pravidla pro derivování vektorových funkcí	503
A.3 Parciální derivace	503
A.4 Totální diferenciál	504
A.5 Řešení obyčejných lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty	505
A.5.1 Lineární homogenní diferenciální rovnice	506
A.5.2 Lineární nehomogenní diferenciální rovnice	510
A.6 Einsteinovo sumační pravidlo	513
A.7 Vektorová analýza	513
A.7.1 Gradient	514
A.7.2 Divergence	516
A.7.3 Rotace	520
B Některé vektorové identity	526

Kapitola 1

Úvod

Předkládaný studijní materiál je sestaven v souladu s osnovami předmětu Fyzika 1, který je jednotný pro všechny studijní programy v rámci FEL ČVUT. Studijní texty pokrývají tři hlavní oblasti fyziky: klasickou mechaniku, úvod do speciální teorie relativity a teorii elektrického a magnetického pole. Text je navržen tak, aby studentům představil vnitřní konzistenci fyzikálních teorií v rámci těchto patí. Z tohoto důvodu má každá z probíraných oblastí jednotnou strukturu. Nejprve jsou představeny základní zákony, na kterých je následně postavena příslušná teorie. Tato teorie vychází z předpokladu, že studenti již mají potřebné matematické znalosti získané v rámci povinných matematických kurzů pro studenty elektrotechnické fakulty.

Všechny vztahy jsou detailně odvozeny, což studentům umožňuje nejen lépe pochopit jejich význam, ale také si uvědomit hranice jejich platnosti. Díky tomu mohou studenti během přednášek soustředit svou pozornost čistě na porozumění probírané látce, aniž by byli nuceni pořizovat si rozsáhlé poznámky.

Studijní materiál obsahuje značné množství matematických vztahů. Tento přístup je dán nejen tím, že matematika je jazykem fyziky, který umožňuje přesnou formulaci vztahů mezi fyzikálními veličinami, ale i praktickou potřebou. Bez schopnosti provádět příslušné výpočty totiž nelze fyzikální teorie efektivně aplikovat.

Kapitola 2

Fyzikální veličiny a jednotky

Předepíšeme-li způsob jak měřit určitou vlastnost vztahující se k danému fyzikálnímu objektu či jevu, pak tím definujeme fyzikální veličinu a její fyzikální jednotku. Veličinou nazýváme vlastnost, kterou lze objektivně změřit (ať už přímo nebo nepřímo) a charakterizovat číselnou hodnotou a jednotkou.

Výsledek měření jisté fyzikální veličiny X můžeme zapsat jako součin

$$X = \{X\}(X), \quad (2.1)$$

kde $\{X\}$ představuje číselnou hodnotu a (X) fyzikální jednotku.

Vztah mezi fyzikálními veličinami je možné vyjádřit pomocí matematiky, tedy pomocí matematických rovnic, které nejčastěji reprezentují rovnice algebraické, integrální, diferenciální či jejich kombinace.

2.1 Fyzikální veličiny

Fyzikální veličiny jsou reprezentovány tenzory různých řádů. Tenzory jsou matematické objekty, jejichž složky rozlišujeme indexy, přičemž počet indexů nám určuje řád tenzoru. Podle řádu tenzoru fyzikální veličiny lze provést jejich rozdělení:

1. Tenzorové veličiny nultého řádu (nulový počet indexů) – **skalární** veličiny (z *lat. scala* - žebřík, stupnice).

Jedná se o fyzikální veličiny, určené pouze jediným číslem A , jehož hodnota závisí na zvolené jednotce. Skalární veličina nezávisí (je invariantní) na volbě souřadnicové soustavy. Patří sem např. teplota, čas, hmotnost, tlak, délka atd.

2. Tenzorové veličiny prvního řádu (k označení jeho složek stačí jeden index) – **vektorové** veličiny (z *lat. vector* - jezdec, nosič).

Jedná se o veličiny, u kterých se zajímáme nejen o velikost, ale i o orientaci v prostoru. Patří sem např. síla, rychlost, zrychlení, polarizace atd.

Omezíme-li se na trojrozměrný prostor, pak jsou určené trojicí veličin (složky neboli komponenty vektoru, jejich hodnota závisí na zvolených jednotkách), které můžeme zapsat jako A_i (jeden index), kde $i = 1, 2, 3$. Nebo můžeme

R. P. Feynman:

„... není možné lidem poctivě a zároveň srozumitelně vysvětlit krásy fyzikálních zákonů, pokud dobře neovládají některé partie matematiky.“

Veličiny, proměnné, neznámé (včetně funkcí), sčítací indexy se píší se vždy kurzívou základního písma, které je popisuje.

zvolit označení \mathbf{A} , kde $\mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3)$. Pro vektorové veličiny platí, že při transformaci souřadnic $x'_i = \sum_{j=1}^3 a_{ij}x_j$ se její složky vektoru transformují stejně jako souřadnice, tj. $A'_i = \sum_{j=1}^3 a_{ij}A_j$.

V případě ručního psaní používáme pro označení vektorové veličiny místo tučné značky stejnou značku se šipkou, tedy $\mathbf{A} \equiv \vec{A}$.

3. Tenzorové veličiny druhého řádu (k označení jeho složek jsou potřeba dva indexy) – zkráceně jen **tenzory** (z lat. *tensio* - napětí). Patří sem např. tenzor deformace, tenzor setrvačnosti, tenzor vodivosti, tenzor permitivity atd. V trojrozměrném eukleidovském prostoru je tenzor druhého řádu $\vec{\mathbf{A}}$ určen devíti veličinami (složkami, jejichž hodnota závisí na zvolených jednotkách) a zapisujeme ho pomocí dvou indexů A_{ij} , kde $i, j = 1, 2, 3$. Pro složky tenzoru druhého řádu platí, že při transformaci souřadnic $x'_i = \sum_{k=1}^3 a_{ik}x_k$ se jeho složky transformují podle předpisu $A'_{ij} = \sum_{k=1}^3 a_{ik} \sum_{l=1}^3 a_{jl}A_{kl}$. Mnohdy tyto tenzory zapisujeme ve formě matice:

$$\vec{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

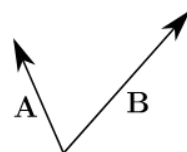
Obecně platí, že $A_{ij} \neq A_{ji}$, avšak často se ve fyzice setkáváme se symetrickými tenzory, tj. $A_{ij} = A_{ji}$, které mají tu vlastnost, že je možné je diagonalizovat vhodnou orientací souřadných os, tedy

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

kde λ_i jsou tzv. **hlavní hodnoty tenzoru** a osám souřadnic, v nichž má tenzor diagonální tvar, říkáme **hlavní osy souřadnic**.

Tenzory druhého řádu často slouží k vyjádření vektorové veličiny pomocí jiné vektorové veličiny, která nemá stejný směr (kdyby měli stejný směr, tj. jsou rovnoběžné, tak lze jednu vektorovou veličinu převést na druhou pomocí skalární veličiny). Uvažujme vektorovou veličinu $\mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3)$, kterou si vyjádříme pomocí vektorové veličiny $\mathbf{B} = (B_1, B_2, B_3)$ použitím tenzorové veličiny $\vec{\mathbf{G}}$, potom

$$A_i = \sum_{j=1}^3 G_{ij}B_j, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.4)$$



4. Tenzorové veličiny vyšších řádů. Patří sem např. tenzor elastických koeficientů (4. řádu).

Fyzikální zákony se zpravidla vyjadřují matematickým vztahem mezi fyzikálními veličinami.

2.1.1 Fyzikální jednotky

Fyzikální jednotky je možné rozdělit do následujících tří skupin

- **Základní jednotky SI**

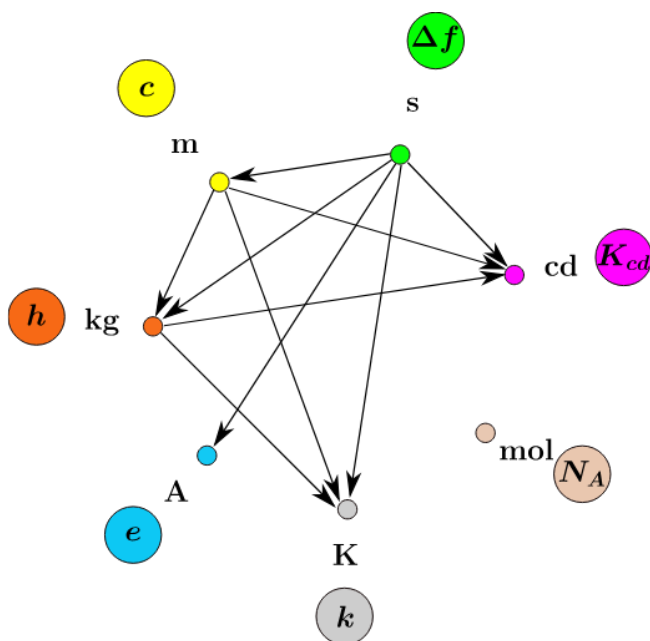
Definice sedmi základních jednotek SI je vyjádřena na základě sedmi přírodních konstant, jejichž velikost je fixována na pevný počet desetinných míst. Tato definice byla přijata na 26. zasedání CGPM (Generální konference pro míry a váhy), které se konalo 13. – 16. 11. 2018 na zámku ve Versailles u Paříže.

Jednotky, se píší vždy
stojatě, oddělené
zúženou mezerou od
číselné hodnoty.

Základní jednotky SI		
Veličina	Název jednotky	Značka
čas	sekunda	s
délka	metr	m
hmotnost	kilogram	kg
elektrický proud	ampér	A
termodyn. teplota	kelvin	K
látkové množství	mol	mol
svítivost	kandela	cd

1. **sekunda:** Je definována fixní číselnou hodnotou kmitočtu Δf přechodu mezi hladinami velmi jemného rozštěpení základního stavu atomu cesia $^{133}_{55}\text{Cs}$ jako 9 192 631 770, pokud je vyjádřena v jednotce Hz, což je ekvivalentem zápisu s^{-1} .
2. **metr:** Je definován fixní číselnou hodnotou rychlosti světla c ve vakuu, která je rovna 299 792 458, pokud je vyjádřena v jednotkách m/s, přičemž sekunda je definována pomocí Δf .
3. **kilogram:** Je definován fixní číselnou hodnotou Planckovy konstanty h jako $6,626\,070\,15 \times 10^{-34}$, pokud je vyjádřena v jednotkách J·s, což je ekvivalentem zápisu $\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$, kde metr je definován pomocí c a sekunda je definována pomocí Δf .
4. **ampér:** Je definován fixní číselnou hodnotou elementárního elektrického náboje e jako $1,602\,176\,634 \times 10^{-19}$, pokud je vyjádřen v jednotce C, což je ekvivalentem zápisu A·s, kde sekunda je definována pomocí Δf .

5. **kelvin:** Je definován pomocí fixní číselné hodnoty Boltzmannovy konstanty k jako $1,380\,649 \times 10^{-23}$, pokud je vyjádřena v jednotkách $\text{J} \cdot \text{K}^{-1}$, což je ekvivalentem zápisu $\text{kg} \cdot \text{K} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$, kde kilogram je definován pomocí h , metr je definován pomocí c , a sekunda je definována pomocí Δf .
6. **mol:** Jeden mol obsahuje přesně $6,022\,140\,76 \times 10^{23}$ elementárních částic. Toto číslo je fixní číselnou hodnotou Avogadrovy konstanty N_A , pokud je vyjádřena v jednotce mol^{-1} . Látkové množství systému, symbol n , je mírou počtu specifikovaných elementárních částic. Elementární částicí může být atom, molekula, iont, elektron nebo libovolná jiná částice nebo skupina částic.
7. **kandela:** Je definována pomocí fixní číselné hodnoty světelné účinnosti K_{cd} monochromatického záření o kmitočtu 540×10^{12} Hz, která je rovna 683, pokud je vyjádřena v jednotkách $\text{lm} \cdot \text{W}^{-1}$, což je ekvivalentem zápisu $\text{cd} \cdot \text{sr} \cdot \text{W}^{-1}$ nebo $\text{cd} \cdot \text{sr} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^3$, kde kilogram je definován pomocí h , metr je definován pomocí c a sekunda je definována pomocí Δf .



Obrázek 2.1: Vzájemná provázanost základních jednotek SI.

- **Odvozené jednotky** – jsou dány násobky a podíly základních jednotek SI, např. $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$. Některé odvozené jednotky zaujímají natolik významné postavení, že mají speciální označení a název, např. newton $\text{N} = \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$, pascal Pa, joule J atd.

Mezi odvozené jednotky řadíme i jednotku rovinného úhlu **radián** rad a jednotku prostorového úhlu **steradián** sr (dříve byly tyto jednotky označovány jako doplňkové).

- **Násobné a podílové jednotky** – vytvářejí se dekadickými násobky a decimálními zlomky od základních a odvozených jednotek, např. kilometr km,

milivolt mV atd.

V tabulce 2.1 jsou ukázány používané násobné a podílové předpony.

Předpony pro násobné jednotky			Předpony pro podílové jednotky		
Předpona	Zkratka	Násobek	Předpona	Zkratka	Násobek
exa	E	10^{18}	deci	d	10^{-1}
peta	P	10^{15}	centi	c	10^{-2}
tera	T	10^{12}	mili	m	10^{-3}
giga	G	10^9	mikro	μ	10^{-6}
mega	M	10^6	nano	n	10^{-9}
kilo	k	10^3	piko	p	10^{-12}
hekto	h	10^2	femto	f	10^{-15}
deka	da	10^1	atto	a	10^{-18}

Tabulka 2.1: Tabulka používaných násobných a podílových předpon.

2.2 Rozměrová analýza

Odvozené fyzikální jednotky jsou definovány fyzikálními vzorci, které mají převážně tvar prostých součinů a podílů vstupních veličin, takže každý fyzikální vzelec musí platit i pro základní fyzikální jednotky SI. Této skutečnosti lze využít nejen ke kontrole správnosti neznámých vzorců, ale i k rychlému nalezení, resp. uhodnutí, neznámého fyzikálního vzorce. Nejedná se tedy o odvození fyzikálního vzorce, takže je nutné dokázat jeho platnost deduktivně z platných fyzikálních vzorců nebo ověřit experimentálně. Také je nutné zmínit, že nelze tímto způsobem nalézt bezrozměrné konstanty (rozměrová analýza je již ze své podstaty vůči nim „necitlivá“), které se mnohdy ve vzorcích vyskytují (např. Ludolfovo číslo π). Každopádně lze pomocí rozměrové analýzy nalézt i netriviální vzorce, jejichž odvození by bylo velmi náročné a zdouhavé.

Při hledání vzorců pomocí rozměrové analýzy je nutné uplatnit i fyzikální intuici a zkušenosti. Použití rozměrové analýzy je nejlépe vysvětlit pomocí konkrétního příkladu.

Příklad 2.2.1

Nalezněte vztah pro odstředivé zrychlení a_{od} .

Řešení:

Abychom mohli uplatnit naši zkušenost, tak budeme uvažovat např. jízdu automobilem. Ze zkušenosti víme, že odstředivé zrychlení závisí na rychlosti v (tj. automobilu) a na velikosti poloměru zatáčky R , jenže nevíme přesně jakým způsobem. Proto budeme uvažovat obecné mocniny jak rychlosti, tak poloměru zatáčky, tedy

$$a_{od} = kv^\alpha R^\beta,$$

kde k je předpokládaná bezrozměrná konstanta úměrnosti, kterou nelze rozměrovou analýzou nalézt.

Nyní si příslušné fyzikální veličiny ve výše uvedeném vztahu dosadíme základní fyzikální jednotky SI, ve kterých se vyjadřují:

$$\text{ms}^{-2} = (\text{ms}^{-1})^\alpha \text{m}^\beta.$$

Tedy

$$\text{m}^1 \text{s}^{-2} = \text{m}^\alpha \text{s}^{-\alpha} \text{m}^\beta.$$

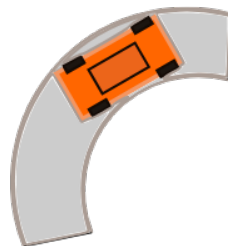
Protože jednotky metr a sekunda jsou na sobě vzájemně nezávislé, musí být exponenty u všech jednotek na obou stranách rovnice stejné, takže dostaneme následující dvě rovnice:

$$1 = \alpha + \beta, \quad -2 = -\alpha.$$

Jejich řešením dostáváme, že $\alpha = 2$ a $\beta = -1$. Tato řešení dosadíme do výchozího vztahu, čímž dostaneme, že

$$a_{od} = kv^2 R^{-1} = k \frac{v^2}{R},$$

což je správný vzorec, když $k = 1$, jak si později odvodíme v mechanice.



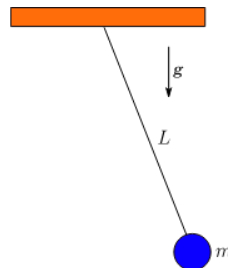
Příklad 2.2.2

Určete periodu kmitů T rovinného matematického kyvadla o délce jeho závěsu L a hmotnosti kmitajícího tělesa m (jedná se o kyvadlo, které kmitá v rovině a hmotnost jeho závěsu zanedbáváme vůči hmotnosti kmitajícího tělesa, tj. hmotnost závěsu uvažujeme nulovou).

Řešení:

Je zřejmé, že když vychýlíme těleso z klidové polohy, tak jeho kmitající pohyb je způsoben tíhovou silou Země $\mathbf{G} = m\mathbf{g}$ (\mathbf{g} je tíhové zrychlení Země v daném místě), která na něj působí. Dále můžeme předpokládat, že perioda kmitů bude nějak souviset s délkou závěsu L . Jelikož perioda kmitů, tedy doba za kterou se těleso vrátí do výchozí polohy, je skalární veličinou, takže tato perioda bude záviset pouze na velikosti tíhové síly ($|\mathbf{G}| \equiv G = mg$). Odtud můžeme psát hledaný vzorec ve tvaru:

$$T = km^\alpha g^\beta L^\gamma,$$



kde k je nějaká bezrozměrná konstanta.

Jednotlivé fyzikální veličiny si vyjádříme pomocí základních jednotek SI a dosadíme je do uvažovaného vzorce za odpovídající fyzikální veličiny:

$$s = \text{kg}^\alpha (\text{ms}^{-2})^\beta \text{m}^\gamma .$$

Tedy

$$\text{kg}^0 \text{m}^0 \text{s}^1 = \text{kg}^\alpha \text{m}^{\beta+\gamma} \text{s}^{-2\beta} .$$

Protože jednotky metr, kilogram a sekunda jsou na sobě vzájemně nezávislé, musí být exponenty u všech jednotek na obou stranách rovnice stejné, takže dostaneme následující tři rovnice:

$$\alpha = 0 , \quad \beta + \gamma = 0 , \quad -2\beta = 1 .$$

Jejich řešením dostáváme, že $\alpha = 0$, $\beta = -1/2$ a $\gamma = 1/2$. Tato řešení dosadíme do výchozího vztahu, čímž dostaneme, že

$$T = km^0 g^{-\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} = k \sqrt{\frac{L}{g}} .$$

Z tohoto nalezeného vidíme, že perioda kmitů nezávisí na hmotnosti. V kapitole věnující se mechanickým kmitům si odvodíme, že bezrozměrná konstanta $k = 2\pi$, tedy

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} .$$

Příklad 2.2.3

Určete množství písku $\Delta m / \Delta t$, který se vysype z nádoby za jednotku času (za jednu sekundu) o kruhovém průřezu S .

Řešení:

Je zřejmé, že důvodem sypaní písku je tíhová síla, která na jednotlivá zrnka působí. Samozřejmě bude záviset i na velikosti jednotlivých zrněk (předpokládáme, že rozměry zrněk jsou výrazně menší než poloměr otvoru, kterým se sypou). Abychom tyto skutečnosti postihli, tak je rozumné uvažovat, místo rozměrů zrněk a jejich hmotností, objemovou hustotu písku ρ ($\rho = m/V$). Dále je zřejmé, že čím bude průřez kruhového otvoru větší, tím můžeme předpokládat, že se za jednotku času vysype větší množství písku. Tyto úvahy můžeme postihnout následujícím způsobem:

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = kg^\alpha \rho^\beta S^\gamma ,$$

kde k je opět nějaká bezrozměrná konstanta.

Stejným postupem jako v předchozích dvou příkladech odtud dostáváme, že

$$\text{m}^0 \text{kg}^1 \text{s}^{-1} = \text{m}^{\alpha-3\beta+2\gamma} \text{kg}^\beta \text{s}^{-2\alpha} .$$



Dostáváme následující tři rovnice:

$$\alpha - 3\beta + 2\gamma = 0, \quad \beta = 1, \quad -2\alpha = -1.$$

Řešením dostáváme, že $\alpha = 1/2$, $\beta = 1$ a $\gamma = 5/4$. Dosazením řešení do výchozího vzorce dostaneme:

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = kg^{\frac{1}{2}} \rho S^{\frac{5}{4}}.$$

Hodnotu bezrozměrné konstanty úměrnosti můžeme získat např. na základě provedených experimentů.

Kapitola 3

Fyzikální pole a tok vektorové fyzikální veličiny plochou

Je-li v každém bodě nějaké oblasti prostoru určena konkrétní fyzikální veličina, říkáme, že v této oblasti existuje **pole** této fyzikální veličiny¹. Jde-li o veličinu skalární, nazývá se **pole skalární**, jde-li o veličinu vektorovou, nazývá se **vektorové pole** a jedná-li se o veličinu tenzorovou, pak se jedná o **pole tenzorové**.

V dané oblasti prostoru může existovat současně libovolné množství polí příslušných různým fyzikálním veličinám.

Analytickým vyjádřením skalárního pole skalární veličiny U je skalární funkce

$$U = U(\mathbf{r}) \text{ , resp. } U = U(x, y, z) \text{ ,} \quad (3.1)$$

kde \mathbf{r} je polohový vektor obecného bodu uvažované oblasti prostoru a x, y, z jsou kartézské souřadnice tohoto bodu².

Analytickým vyjádřením vektorového pole vektorové veličiny \mathbf{A} je vektorová funkce

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r}) \text{ .} \quad (3.2)$$

Vztah (3.2) je při volbě kartézských souřadnic ekvivalentní těmto třem rovnicím

$$A_x = A_x(\mathbf{r}) \text{ neboli } A_x = A_x(x, y, z) \text{ ,} \quad (3.3)$$

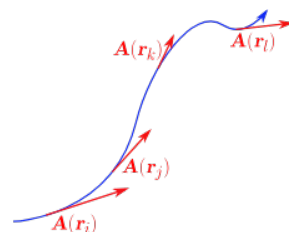
$$A_y = A_y(\mathbf{r}) \text{ neboli } A_y = A_y(x, y, z) \text{ ,} \quad (3.4)$$

$$A_z = A_z(\mathbf{r}) \text{ neboli } A_z = A_z(x, y, z) \text{ .} \quad (3.5)$$

Ve vektorovém poli $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ lze pro lepší názornost zavést soustavu vzájemně neprotínajících se orientovaných křivek definovaných tak, že orientovaná tečna kterékoliv z těchto křivek v libovolném bodě (o polohovém vektoru \mathbf{r}), kde $\mathbf{A}(\mathbf{r}) \neq \mathbf{0}$, má shodnou orientaci s vektorem $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ v tomto bodě. Každá takováto orientovaná křivka se nazývá **vektorová křivka** (čára) **pole** nebo **čára pole**³.

Vlastnosti vektorových křivek můžeme shrnout do následujících bodů:

1. Každým bodem vektorového pole prochází jediná vektorová křivka, tedy vektorové křivky se nikde neprotínají.



¹Tato definice se nevztahuje k poli, jakožto jedné z forem hmoty, ale jako matematicky definované entitě.

²Je možné obecně uvažovat i jiné souřadnice.

³Pro některá vektorová pole mají vektorové křivky vlastní pojmenování, např. siločára, indukční čára, proudová čára apod.

2. Vektorové křivky vystihují orientaci vektorů \mathbf{A} v různých bodech pole.
3. Z důvodu přehlednosti zakreslujeme ve vektorovém poli jen některé vektorové křivky. Jejich počet omezuje úmluvou tak, abychom mohli z hustoty vektorových křivek usuzovat na velikost $|\mathbf{A}|$ v daném místě pole.

Uvažujme malou plošku ΔS . Abychom zajistili, že je dostatečně malá, tak budeme předpokládat, že se její velikost limitně blíží nule, tj. $dS = \Delta S \rightarrow 0$, kde dS nazýváme **elementem plochy**. Element plochy je možné vyjádřit jako vektor, v takovém to případě hovoříme o vektorovém elementu plochy $d\mathbf{S} = dS\mathbf{n}$, kde \mathbf{n} představuje jednotkový vektor, který je k této ploše kolmý, viz obr. 3.1(a). Abychom mohli určit směr vektoru \mathbf{n} , tak nejdříve si určíme, že směr oběhu po obvodu elementu plochy dS bude proti pohybu hodinových ručiček, viz 3.1(a). Směr vektoru \mathbf{n} pak určíme pomocí pravidla pravé ruky:

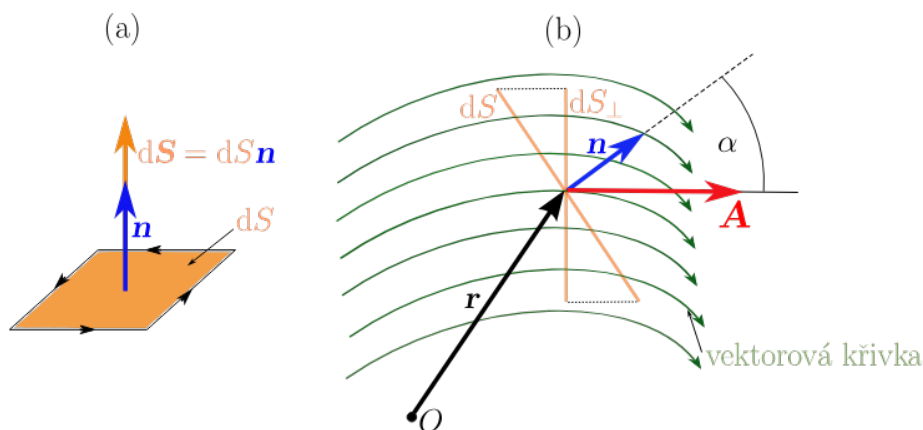
Prsty pravé ruky určují směr oběhu po obvodu elementu plochy a vztyčený palec ukazuje směr jednotkového normálového vektoru \mathbf{n} k tomuto elementu plochy.

Dále promítneme vektorový element $d\mathbf{S}$ do směru kolmého na vektor $\mathbf{A}(\mathbf{r})$, jak je ukázáno na obr. 3.1(b). Velikost elementu dS_{\perp} můžeme vyjádřit pomocí skalárního součinu vektoru $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ s orientovaným elementem plochy $d\mathbf{S}$:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}(\mathbf{r}) = A(\mathbf{r})\mathbf{A}^0(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r})dS = A(\mathbf{r})dS \cos \alpha(\mathbf{r}) = A(\mathbf{r})dS_{\perp}, \quad (3.6)$$

kde α je úhel, který svírá jednotkový normálový vektor \mathbf{n} s vektorem \mathbf{A} v místě, na které ukazuje polohový vektor \mathbf{r} , viz 3.1(b), a $\mathbf{A}^0(\mathbf{r})$ je jednotkový vektor vektoru \mathbf{A} . Tato skutečnost je zohledněna tím, že vektorové veličiny v tomto vztahu jsou vyjádřeny jako funkce polohy. Dále, kvůli stručnosti zápisu, nebudeme již tuto skutečnost explicitně vyjadřovat.

Element plochy dS_{\perp} umístěný v místě o polohovém vektoru \mathbf{r} kolmo k vektoro-



Obrázek 3.1: (a) Orientovaný element plochy. (b) Vektorové křivky procházející elementem plochy.

vým čarám je tak malý, že ve všech bodech elementu má vektorové pole \mathbf{A} stejnou velikost i orientaci. Označme počet vektorových křivek procházejících uvažovaným elementem plochy dN . Vyjádříme si plošnou hustotu vektorových křivek, tj. přepočteme jejich počet na kolmou jednotkovou plochu, a podle úmluvy tuto hustotu

položíme číselně⁴ rovnu velikosti vektorového pole v daném místě

$$|\mathbf{A}| \equiv A = \frac{dN}{dS_{\perp}} . \quad (3.7)$$

Aby tato rovnost platila nejen číselně, ale i jednotkově, nahradíme počet vektorových křivek N veličinou Φ , kterou nazveme **tok vektorového pole \mathbf{A}** . Číselně je veličina Φ tedy rovna počtu vektorových křivek N a navíc vyhovuje rozměrově rovnici

$$A = \frac{d\Phi}{dS_{\perp}} . \quad (3.8)$$

Odtud je možné psát

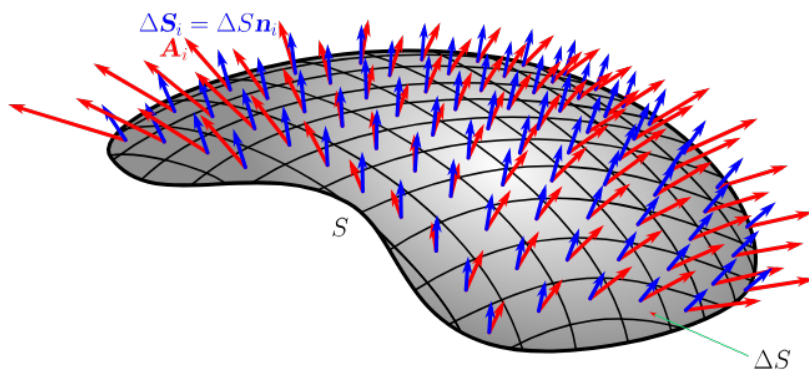
$$d\Phi = A dS_{\perp} . \quad (3.9)$$

Dosadíme-li za element dS_{\perp} ze vztahu (3.6), tak můžeme psát:

$$d\Phi = \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = A dS \cos \alpha . \quad (3.10)$$

Tento vztah nám udává tok vektorového pole \mathbf{A} elementem plochy dS umístěným v místě o polohovém vektoru \mathbf{r} .

Uvažujme plochu S , kterou si rozdělíme na plošky ΔS , viz obr. 3.2. Zavedeme



Obrázek 3.2: Tok vektorové veličiny \mathbf{A} plochou S .

si orientovanou plošku $\Delta \mathbf{S}_i = \Delta S \mathbf{n}_i$, kterou prochází vektor $\mathbf{A}_i = \mathbf{A}(\mathbf{r}_i)$, takže tok uvažované vektorové veličiny touto ploškou $\Delta \Phi_i = \mathbf{A}_i \cdot \Delta \mathbf{S}_i$. Nechť je plocha S rozdělena na N plošek o velikosti ΔS , poto celkový tok vektorové veličiny \mathbf{A} plochou S je přibližně dán následujícím součtem:

$$\Phi \approx \sum_{i=1}^N \Delta \Phi_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{A}_i \cdot \Delta \mathbf{S}_i . \quad (3.11)$$

Je zřejmé, že čím bude vyšší celkový počet plošek N (a tedy menší velikost plošky ΔS), tak výsledek bude přesnější. V následující limitě dostaneme přesný výsledek:

$$\Phi = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \mathbf{A}_i \cdot \Delta \mathbf{S}_i \equiv \iint_S \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} . \quad (3.12) \quad N \rightarrow \infty \Rightarrow \Delta S \rightarrow 0$$

⁴Hustota vektorových křivek má obecně jiný rozměr než uvažovaná vektorová veličina, tedy rovnost platí jen co se týče číselného vyjádření.

Výraz na pravé straně této rovnosti představuje plošný integrál druhého druhu, jehož význam vyplývá z levé části této rovnosti, což je dostačující k pochopení výkladu partií fyziky v tomto kurzu, kde se tento druh integrálu bude vyskytovat. Jak se plošné integrály druhého druhu počítají se dozvíte o něco později na příslušných přednáškách z matematiky.

Protože vektorový element posunutí $d\mathbf{r}$, kterékoli vektorové křivky pole je souhlasně orientovaný s vektorem $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ v daném bodě na této křivce o polohovém vektoru \mathbf{r} , platí, že

$$d\mathbf{r} \times \mathbf{A} = \mathbf{0} \quad (3.13)$$

neboli

$$d\mathbf{r} \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ dx & dy & dz \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = (A_z dy - A_y dz) \mathbf{i} + (A_x dz - A_z dx) \mathbf{j} + (A_y dx - A_x dy) \mathbf{k} = \mathbf{0},$$

odtud dostáváme následující soustavu rovnic

$$\begin{aligned} A_z dy - A_y dz &= 0 \\ A_x dz - A_z dx &= 0 \\ A_y dx - A_x dy &= 0, \end{aligned}$$

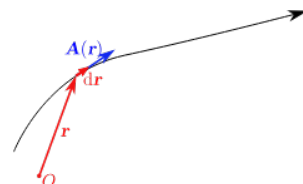
kterou můžeme upravit do následujícího tvaru

$$\begin{aligned} \frac{dy}{A_y} - \frac{dz}{A_z} &= 0 \\ \frac{dz}{A_z} - \frac{dx}{A_x} &= 0 \\ \frac{dx}{A_x} - \frac{dy}{A_y} &= 0. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Ze soustavy rovnic (3.14) vyplývá, že mají-li být rovnosti splněny, potom

$$\frac{dx}{A_x} = \frac{dy}{A_y} = \frac{dz}{A_z}. \quad (3.15)$$

Rovnice (3.15) představují v kartézských souřadnicích diferenciální rovnice křivky pole.



Příklad 3.0.1

Najděte rovnici vektorových křivek pro vektorové pole $\mathbf{A} = (x, 2y)$.

Řešení:

Dosazením do vztahu (3.15) dostaneme

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{2y}, \quad (3.16)$$

odtud integrací dostaneme

$$\ln \frac{x}{x_0} = \frac{1}{2} \ln \frac{y}{y_0} , \quad (3.17)$$

kde x_0 a y_0 jsou integrační konstanty. Z rovnice (3.17) dostáváme rovnice hledaných vektorových křivek

$$y = \frac{y_0}{x_0^2} x^2 = C x^2 , \quad (3.18)$$

kde C je parametr pro danou vektorovou křivku.

Fyzikální pole nazýváme **homogenní**, jestliže ve všech jeho bodech je příslušná fyzikální veličina stejná, tj. z hlediska fyzikální veličiny jsou všechny body pole rovnocenné⁵. **Izotropní** fyzikální pole se vyznačuje tím, že příslušná fyzikální veličina se ve všech směrech projevuje (vyvíjí) stejně, tj. neexistuje privilegovaný směr (všechny směry jsou rovnocenné)⁶.

⁵Např. elektrická intenzita mezi deskami kondenzátoru (vyjma okrajů desek) vytváří homogenní pole.

⁶Např. homogenní koule vytváří kolem sebe vektorové izotropní pole intenzity gravitace.

Kapitola 4

Souřadnicové soustavy

Abychom mohli popsat polohu a spojitý pohyb tělesa v prostoru či vyjádřit nějakou fyzikální veličinu v určitém místě prostoru, musíme označit jednotlivé body prostoru. Omezíme se na třírozměrný eukleidovský prostor. Pro popis jednotlivých bodů prostoru používáme souřadnicovou soustavu pevně spojenou se vztažným (referenčním) tělesem (stačí tři pevně zvolené tři body neležící na jedné přímce), pomocí které každému bodu přiřadíme trojici čísel u_1, u_2, u_3 , kterým říkáme **souřadnice** neboli **koordináty** bodu. Pokud zvolíme jednu souřadnici pevně a zbylé dvě necháme „probíhat“ všemi dovolenými hodnotami, dostaneme tzv. **souřadnicové plochy**. Souřadnicové plochy $u_1 = c_1, u_2 = c_2, u_3 = c_3$, kde c_1, c_2 a c_3 jsou konstanty, se protínají v **souřadnicových křivkách** (čarách). Pokud jsou všechny souřadnicové plochy rovinami, hovoříme o **přímočarých souřadnicích**, není-li tomu tak, pak hovoříme o **křivočarých souřadnicích**. Pokud se všechny souřadnicové plochy protínají navzájem kolmo, hovoříme o **ortogonálních** (pravoúhlých) **souřadnicích**, a pokud ne, pak hovoříme o **neortogonálních** (kosoúhlých) **souřadnicích**.

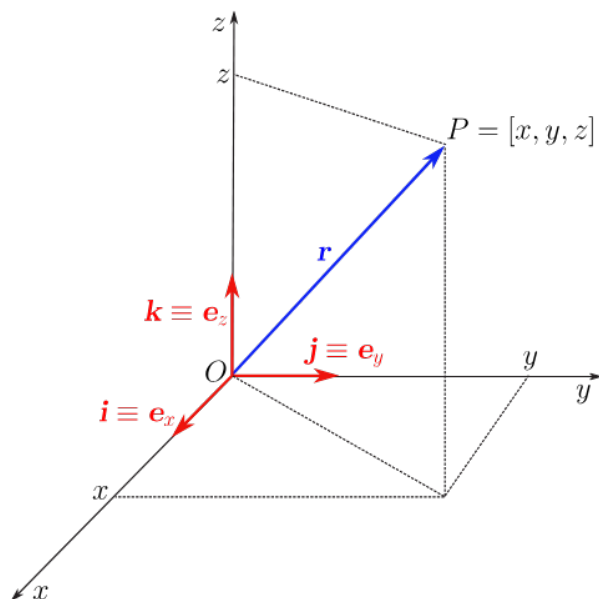
4.1 Kartézská souřadnicová soustava

Jedná se o nejčastěji používanou souřadnicovou soustavu, kterou v roce 1637 zavedl francouzský filozof, matematik a fyzik René Descartes (1596-1650) ve své knize *Rozpravy o metodě*. Označení této souřadnicové soustavy přívlastkem **kartézská** vychází z latinského přepisu jména jeho autora *Cartesius*. Tato souřadnicová soustava (systém) je přímočará a ortogonální.

Tuto soustavu tvoří tři vzájemně kolmé přímky, tzv. **osy**, které se protínají v bodě zvaném **počátek souřadnicové soustavy**, jenž značíme O (*lat. origo = počátek*)¹. Osy zpravidla označujeme x, y, z nebo x_1, x_2, x_3 , viz obr. 4.1. Souřadnice x, y, z libovolného bodu $P = [x, y, z]$ určíme jako průsečík tří rovin, z nichž první je ve vzdálenosti x od počátku a je rovnoběžná s rovinou (y, z) , druhá je ve vzdálenosti y od počátku a je rovnoběžná s rovinou (x, z) a třetí je ve vzdálenosti z od počátku a je rovnoběžná s rovinou (x, y) . Spojnici počátku O s libovolným bodem nazýváme **polohovým vektorem** (průvodičem, **radius-vektorem**) uvažovaného bodu prostoru vzhledem k bodu O a značíme ho zpravidla \mathbf{r} .

Vůči této soustavě zpravidla vztahujeme další používané souřadnicové soustavy.

¹Počátku souřadnicové soustavy přisuzujeme souřadnice $O = [0, 0, 0]$.



Obrázek 4.1: Kartézská souřadnicová soustava.

Jednotkové souřadnicové (bázové) vektory obvykle značíme $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ nebo $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ či $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ (značení souřadnicových vektorů budeme používat podle potřeby) a polohový vektor je pak vyjádřen jako

$$\mathbf{r} = (r_x, r_y, r_z) \equiv (x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \quad (4.1)$$

kde x, y, z jsou kartézské souřadnice bodu, na který ukazuje polohový vektor \mathbf{r} a současně představují složky polohového vektoru, jakožto průměty vektoru \mathbf{r} do směrů souřadnicových vektorů, viz obr. 4.1.

Tedy složky souřadnicových vektorů jsou

$$\mathbf{i} = (1, 0, 0), \quad (4.2)$$

$$\mathbf{j} = (0, 1, 0), \quad (4.3)$$

$$\mathbf{k} = (0, 0, 1). \quad (4.4)$$

Pro souřadnicové vektory platí, že jsou lineárně nezávislé a že jsou na sebe kolmé, což můžeme pomocí skalárního součinu vyjádřit jako

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases} \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (4.5)$$

kde δ_{ij} je tzv. **Kroneckerovo delta**. Vztah (4.5) platí obecně pro ortogonální souřadnicové soustavy.

V trojrozměrném případě musíme dávat pozor na vzájemnou orientaci souřadnicových os v pořadí x, y, z . **Ve fyzice se téměř výhradně používá pravotočivá kartézská souřadnicová soustava.** Máme-li pravotočivý šroub a budeme jím otáčet od kladného směru osy x nejkratší cestou ke kladnému směru osy y a bude-li se šroub přitom posunovat v kladném směru osy z , nazýváme takovou kartézskou

soustavu **pravotočivou**. K určení pravotočivosti souřadnicové soustavy můžeme též použít pravidla pravé ruky, které nám říká: *Osu z uchopíme pravou rukou tak, aby prsty ukazovaly od kladného směru osy x nejkratší cestou ke kladnému směru osy y . Vztyčený palec ukazuje kladný směr osy z .*

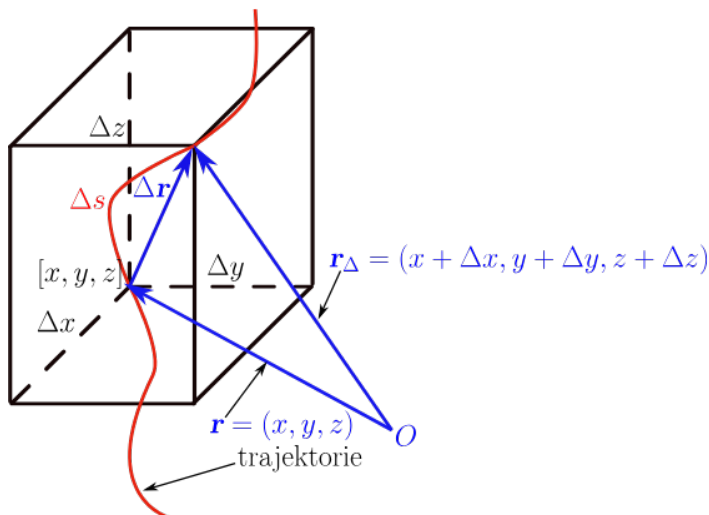
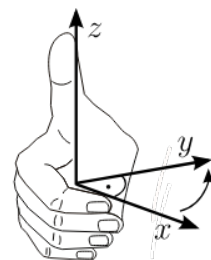
Zaměníme-li u pravotočivé kartézské soustavy smysl jedné nebo všech tří os, dostaneme soustavu **levotočivou**. Kartézské soustavy levotočivé či pravotočivé nelze navzájem převést pouhým posouváním a natáčením.

Uvažujme bod, na který ukazuje polohový vektor \mathbf{r} , jenž se pohybuje v prostoru po křivce, kterou nazveme **trajektorie**. Nechť se tento bod posune po trajektorii z místa o polohovém vektoru $\mathbf{r} = (x, y, z)$ do místa o polohovém vektoru $\mathbf{r}_\Delta = (x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$, jak je ukázáno na obr. 4.2. Délku úseku trajektorie, která je vymezena těmito vektory označíme Δs . S ohledem na obr. 4.2 platí, že

$$\mathbf{r}_\Delta = \mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}, \quad (4.6)$$

kde $\Delta \mathbf{r}$ je vektor posunutí.

Velikost vektoru posunutí je dána vztahem (podle Pythagorovy věty):



Obrázek 4.2: Pohyb bodu po trajektorii.

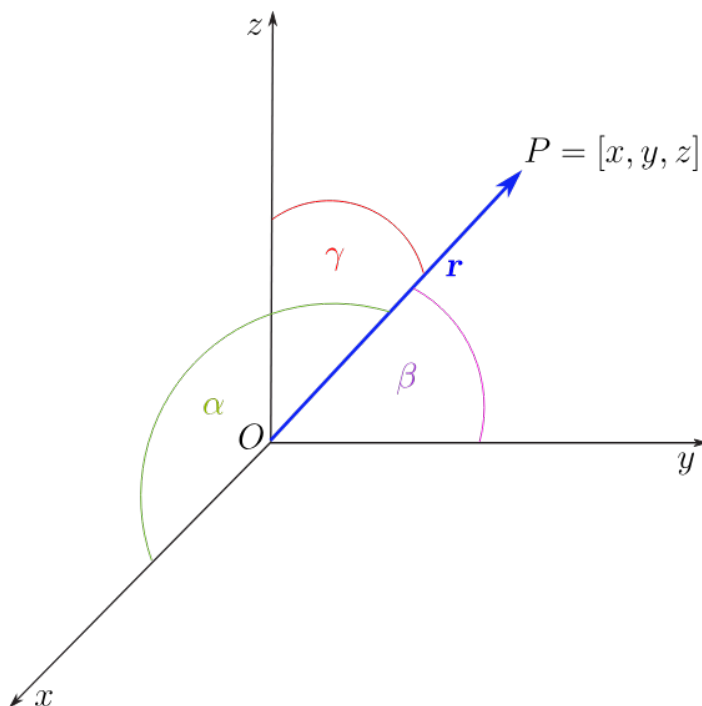
$$|\Delta \mathbf{r}| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}. \quad (4.7)$$

Uvažujme infinitezimální (nekonečně malé) posunutí uvažovaného bodu po trajektorii (koncový bod vektoru \mathbf{r}_Δ se infinitezimálně blíží po trajektorii koncovému bodu vektoru \mathbf{r}), pak označíme $dx = \Delta x \rightarrow 0$, $dy = \Delta y \rightarrow 0$, $dz = \Delta z \rightarrow 0$. V takovémto případě vektor posunutí zapíšeme jako $d\mathbf{r}$ a bude pro něj platit:

$$d\mathbf{r} = (dx, dy, dz) = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}. \quad (4.8)$$

Při infinitezimálním posunutí bodu po trajektorii pro infinitezimální délku oblouku $ds = \Delta s \rightarrow 0$ platí, že se rovná velikosti infinitezimálnímu vektoru posunutí (velikosti elementu vektoru \mathbf{r} , tj. $|d\mathbf{r}|$), tedy s ohledem na vztah (4.7), můžeme psát:

$$ds = |d\mathbf{r}| = \sqrt{d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}} = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}. \quad (4.9)$$



Obrázek 4.3: Směrové úhly.

Označíme-li α , β , γ úhly, jež svírá polohový vektor \mathbf{r} s kladnými směry souřadnicových os x , y , z , viz obr. 4.3, pak pro souřadnice polohového vektoru platí

$$x = r \cos \alpha, \quad y = r \cos \beta, \quad z = r \cos \gamma, \quad (4.10)$$

kde r značí velikost polohového vektoru \mathbf{r} , tedy

$$r \equiv |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (4.11)$$

Úhly α , β , γ nazýváme **směrové úhly** a $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ nazýváme **směrové kosiny**.

Směrové kosiny splňují normovací podmínku

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1. \quad (4.12)$$

Pomocí směrových kosinů můžeme vyjádřit polohový vektor jako

$$\mathbf{r} = r(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma). \quad (4.13)$$

Pro jednotkový polohový vektor \mathbf{r}^0 můžeme psát:

$$\mathbf{r}^0 = \frac{\mathbf{r}}{r} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma). \quad (4.14)$$

Přijmeme úmluvu, že velikosti nějaké vektorové veličiny $|\mathbf{A}|$ budeme vyjadřovat jen použitím stejného netučně zapsaného symbolu, tj. A .

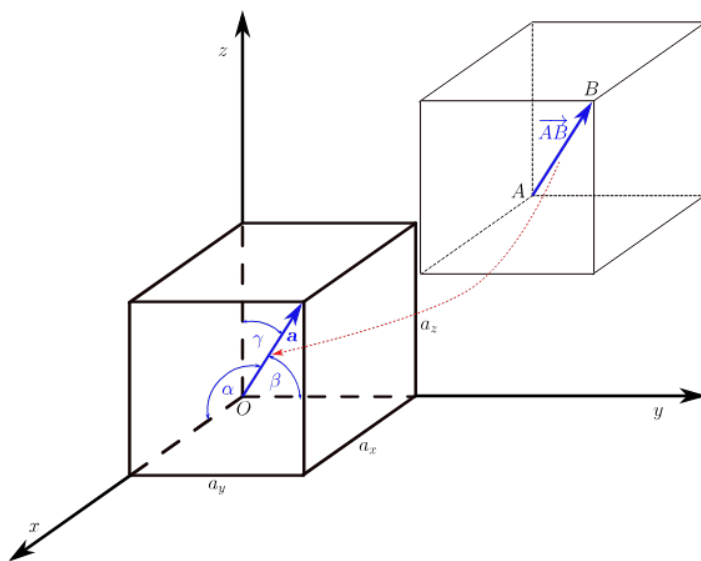
4.2 Operace s vektory a některé identity

Geometricky si lze vektor představit jako orientovanou úsečku \overrightarrow{AB} spojující body A a B právě v tomto pořadí. Při počítání s vektory si přesouváme tuto orientovanou úsečku do počátku souřadnicové soustavy tak, že bod A splývá s počátkem

souřadnicové soustavy O , tedy $A \equiv O$, přičemž přesunutá orientovaná úsečka je s původní úsečkou rovnoběžná, stejně orientovaná a má stejnou délku. Označme vektor tento jako \mathbf{a} . Vektor má tři složky a_x, a_y, a_z (uvažujeme kartézskou souřadnicovou soustavu), přičemž tyto tři složky představují průměty vektoru \mathbf{a} do směrů souřadnicových vektorů, viz obr. 4.4. Tedy můžeme psát, že

$$\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z) = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k} . \quad (4.15)$$

Odtud vidíme, že vektor \mathbf{a} lze jednoznačně zapsat jako lineární kombinaci souřadnicových vektorů $\mathbf{a}_x = a_x \mathbf{i}$, $\mathbf{a}_y = a_y \mathbf{j}$ a $\mathbf{a}_z = a_z \mathbf{k}$.



Obrázek 4.4: Přesunutí orientované úsečky a složky vektoru \mathbf{a} .

Velikost vektoru \mathbf{a} značíme $|\mathbf{a}|$ nebo jen a a spočteme ji podle Pythagorovy věty:

$$a \equiv |\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} . \quad (4.16)$$

Orientaci vektoru \mathbf{a} určuje jeho jednotkový vektor \mathbf{a}^0 :

$$\mathbf{a}^0 = \frac{\mathbf{a}}{a} . \quad (4.17)$$

Odtud můžeme psát, že

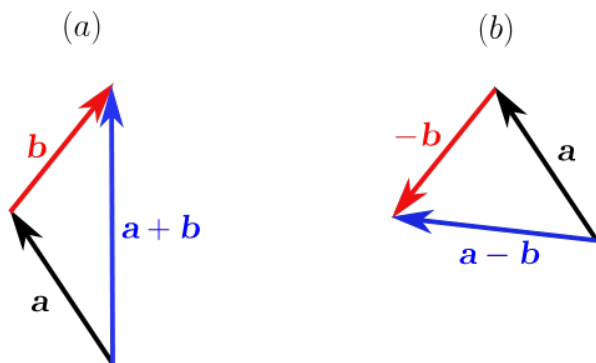
$$\mathbf{a} = a \mathbf{a}^0 \quad \Rightarrow \quad |\mathbf{a}^0| = 1 . \quad (4.18)$$

Inverzní vektor k vektoru \mathbf{a} značíme $-\mathbf{a}$ a platí, že

$$-\mathbf{a} = (-a_x, -a_y, -a_z) = -a_x \mathbf{i} - a_y \mathbf{j} - a_z \mathbf{k} . \quad (4.19)$$

Nulový vektor definujeme jako vektor, který má všechny složky nulové, tj. $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$.

Součet vektorů můžeme najít jak graficky, tak algebraicky. Graficky dva vektory sečteme tak, že začátek druhého vektoru vložíme na konec prvního vektoru, a součet vektorů pak dostaneme jako vektor spojující začátek prvního vektoru a



Obrázek 4.5: (a) Součet a (b) rozdíl vektorů \mathbf{a} a \mathbf{b} .

konec druhého vektoru, viz obr. 4.5(a). Při grafickém odečítání vektorů postupujeme podobně jako při sčítání vektorů, jen odečítaný vektor musíme obrátit, tj. nahradit ho vektorem inverzním, viz 4.5(b).

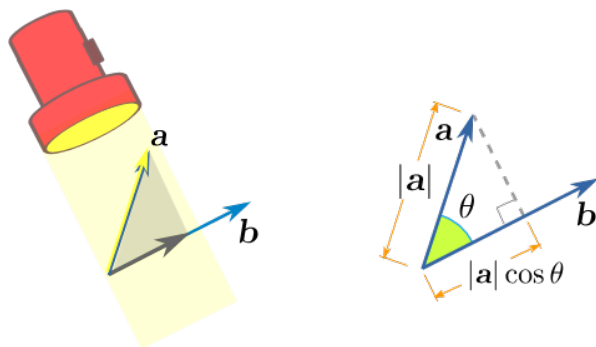
Algebraicky dostaneme součet \mathbf{c} dvou vektorů \mathbf{a} a \mathbf{b} jako

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_x, a_y, a_z) + (b_x, b_y, b_z) = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z) = (a_x + b_x)\mathbf{i} + (a_y + b_y)\mathbf{j} + (a_z + b_z)\mathbf{k}. \quad (4.20)$$

Algebraicky dostaneme rozdíl \mathbf{c} dvou vektorů \mathbf{a} a \mathbf{b} jako

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} - \mathbf{b} = (a_x, a_y, a_z) - (b_x, b_y, b_z) = (a_x - b_x, a_y - b_y, a_z - b_z) = (a_x - b_x)\mathbf{i} + (a_y - b_y)\mathbf{j} + (a_z - b_z)\mathbf{k}. \quad (4.21)$$

Projekce vektoru \mathbf{a} do směru vektoru \mathbf{b} je zachycena na obr. 4.6. Operaci **skalární**



Obrázek 4.6: Projekce vektoru \mathbf{a} do směru vektoru \mathbf{b} .

součin dvou vektorů \mathbf{a} a \mathbf{b} značíme tečkou \cdot a výsledkem této operace je následující skalární veličina:

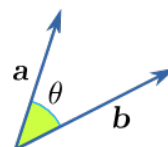
$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \theta \equiv ab \cos \theta, \quad (4.22)$$

kde θ je úhel, který tyto dva vektory svírají.

Odtud je zřejmé, že svírají-li vektory \mathbf{a} a \mathbf{b} pravý úhel, tak jejich skalární součin je roven nule.

Skalární součin je možné spočítat i pomocí složek uvažovaných vektorů:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (a_x, a_y, a_z) \cdot (b_x, b_y, b_z) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \quad (4.23)$$



Pro velikost vektoru plyne z definice skalárního předpis:

$$a \equiv |\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} . \quad (4.24)$$

Pomocí skalárního součinu můžeme snadno spočítat také kartézské složky vektoru \mathbf{a} následujícím způsobem:

$$a_x = \mathbf{a} \cdot \mathbf{i} , \quad a_y = \mathbf{a} \cdot \mathbf{j} , \quad a_z = \mathbf{a} \cdot \mathbf{k} . \quad (4.25)$$

Připomeňme, že skalární dvou vektorů je **komutativní**, tj. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$.

Operaci **vektorový součin** dvou vektorů \mathbf{a} a \mathbf{b} značíme \times , výsledkem této operace je vektor, který označíme, tedy

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} . \quad (4.26)$$

Vektor \mathbf{c} je **kolmý** k oběma vektorům \mathbf{a} a \mathbf{b} , přičemž jeho orientaci určujeme např. pomocí pohybu šroubu: *Máme-li pravotočivý šroub a budeme-li jím otáčet od vektoru \mathbf{a} nejkratší cestou k vektoru \mathbf{b} , tak šroub se bude posunovat v směru orientace vektoru \mathbf{c} .*

Vektorový součin lze počítat pomocí determinantu:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (a_y b_z - a_z b_y) \mathbf{e}_x + (a_z b_x - a_x b_z) \mathbf{e}_y + (a_x b_y - a_y b_x) \mathbf{e}_z . \quad (4.27)$$

Jelikož výměna řádků vede ke změně znaménka determinantu, je vektorový součin **antikomutativní** a tedy

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a}) . \quad (4.28)$$

Protože determinant se dvěma lineárně závislými řádky je roven nule, je vektorový součin dvou rovnoběžných vektorů nebo stejných vektorů **vždy roven nule**, tj.

$$\mathbf{a} \parallel \mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0} . \quad (4.29)$$

Vektorový součin můžeme také počítat pomocí **permutačního tenzoru** (Leviova-Civitova tenzoru) ε_{ijk} , který má $3 \times 3 \times 3 = 27$ složek, pro které platí, že jsou nenulové jen v případě, že jsou všechny tři indexy různé, přičemž nenulové složky nabývají hodnot $+1$ nebo -1 podle sudosti permutace, tedy

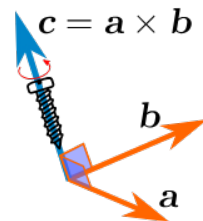
$$\varepsilon_{xyz} = \varepsilon_{yzx} = \varepsilon_{zxy} = 1 \quad \text{a} \quad \varepsilon_{yxz} = \varepsilon_{xzy} = \varepsilon_{zyx} = -1 . \quad (4.30)$$

Pak pro složky vektoru $\mathbf{c} = (c_x, c_y, c_z)$, který je dán součinem dvou vektorů $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ platí (indexy se mění x, y, z):

$$c_k = \sum_{i,j} \varepsilon_{ijk} a_i b_j \equiv \sum_{i=x}^z \sum_{j=x}^z \varepsilon_{ijk} a_i b_j , \quad k = x, y, z . \quad (4.31)$$

Jako příklad ukážeme výpočet složky c_x (je zbytečné psát permutační symbol, kde nejsou všechny indexy různé, protože jsou nulové):

$$c_x = \underbrace{\varepsilon_{yzx}}_{=1} a_y b_z + \underbrace{\varepsilon_{zyx}}_{=-1} a_z b_y = a_y b_z - a_z b_y .$$



Velikost vektorového součinu $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, tedy $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$, je rovna velikosti obsahu rovnoběžníku vytvořeného z vektorů \mathbf{a} a \mathbf{b} , které svírají úhel θ , tj.

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = ab \sin \theta. \quad (4.32)$$

Odtud můžeme psát (pomocí (4.24)), že

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = a^2 b^2 \sin^2 \theta = a^2 b^2 (1 - \cos^2 \theta) = a^2 b^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2. \quad (4.33)$$

Pro **dvojitý vektorový součin** $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ platí následující identita:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} \equiv \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}). \quad (4.34)$$

Pro zapamatování si této identity platí mnemotechnická pomůcka, že poslední výraz vpravo čteme jako: „bác mínus cáb“, kde „cáb“ je pozpátku „bác“.

Smíšený součin definujeme jako

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}). \quad (4.35)$$

Výsledkem smíšeného součinu dostáváme skalární veličinu, která určuje objem V rovnoběžníku a stranách vektorů \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} , tj. $V = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$.

Smíšený součin lze počítat pomocí determinantu:

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \quad (4.36)$$

Při cyklické záměně všech tří řádků se determinant nezmění, takže pro smíšený součin musí platit, že

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}). \quad (4.37)$$

4.3 Transformace kartézských složek vektorů

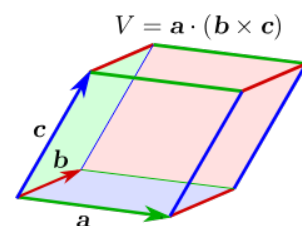
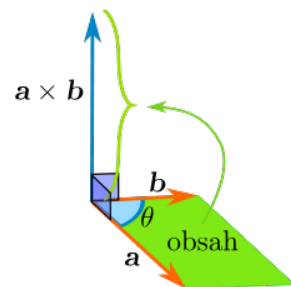
Uvažujme dvě kartézské souřadnicové soustavy, které jsou vůči sobě vzájemně pootočené. Souřadnicové vektory první kartézské soustavy označíme jako \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y , \mathbf{e}_z , zkráceně \mathbf{e}_i a druhé kartézské soustavy jako \mathbf{e}'_x , \mathbf{e}'_y , \mathbf{e}'_z , zkráceně \mathbf{e}'_i , kde index i nabývá hodnot x , y , z . V obou uvažovaných soustavách musí být zachována vektorová veličina \mathbf{A} , tj. musí platit, že jak její orientace v prostoru, tak její velikost se se změnou souřadnicové soustavy nezmění. Pro uvažovanou vektorovou veličinu \mathbf{A} zřejmě platí:

$$\mathbf{A} = \sum_i A_i \mathbf{e}_i \quad \text{a} \quad \mathbf{A} = \sum_i A'_i \mathbf{e}'_i, \quad (4.38)$$

kde A_i a A'_i jsou složky vektoru \mathbf{A} v uvažovaných souřadnicových soustavách.

Vynásobíme-li první z rovnic skalárně souřadnicovým vektorem \mathbf{e}'_i , tak dostaneme odtud pro přímou transformaci složek $A_i \rightarrow A'_i$ předpis:

$$A'_i = \mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{A} = \mathbf{e}'_i \cdot \sum_j A_j \mathbf{e}_j = \sum_j a_{ij} A_j, \quad (4.39)$$



kde $a_{ij} = \mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}_j$ jsou prvky **transformační matice**.

Pro zpětnou transformaci $A'_i \rightarrow A_i$ postupujeme analogicky, takže dostáváme předpis:

$$A_i = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{A} = \mathbf{e}_i \cdot \sum_j A'_j \mathbf{e}'_j = \sum_j a_{ji} A'_j, \quad (4.40)$$

kde $a_{ji} = \mathbf{e}'_j \cdot \mathbf{e}_i$.

Obě transformace jsou tedy popsány jedinou transformační maticí \mathbf{a} mající prvky a_{ij} , rozdíl je jen v indexu, podle kterého počítáme.

Transformační matice \mathbf{a} má tedy tvar:

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_{xx} & a_{xy} & a_{xz} \\ a_{yx} & a_{yy} & a_{yz} \\ a_{zx} & a_{zy} & a_{zz} \end{pmatrix}. \quad (4.41)$$

Poznamenejme, že transformační matice \mathbf{a} je **ortogonální maticí**, jelikož platí, že

$$\mathbf{a}\mathbf{a}^T = \mathbf{a}^T\mathbf{a} = \mathbf{1}, \quad (4.42)$$

kde \mathbf{a}^T značí transponovanou matici \mathbf{a} a $\mathbf{1}$ představuje jednotkovou matici.

Ortogonálnost transformační matice \mathbf{a} zaručuje, že velikost (modul) vektoru \mathbf{A} se po transformaci nezmění, tj. $A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} = \sqrt{A'^2_x + A'^2_y + A'^2_z}$. Proto se také transformace nazývá **unitární** transformací.

Jako příklad si uvedeme transformaci kartézských souřadnic pro případ, kdy vektorová veličina \mathbf{A} leží v rovině $z = 0$ a čárkovaná soustava je vůči nečárkované pootočena o úhel φ , viz obr. 4.7.

$$\begin{aligned} a_{xx} &= \mathbf{e}'_x \cdot \mathbf{e}_x = \cos \varphi, & a_{xy} &= \mathbf{e}'_x \cdot \mathbf{e}_y = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) = \sin \varphi, \\ a_{yx} &= \mathbf{e}'_y \cdot \mathbf{e}_x = \cos \left(\frac{\pi}{2} + \varphi \right) = -\sin \varphi, & a_{yy} &= \mathbf{e}'_y \cdot \mathbf{e}_y = \cos \varphi. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Takže transformační matice \mathbf{a} má tvar:

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_{xx} & a_{xy} \\ a_{yx} & a_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}. \quad (4.44)$$

Ze vztahu pro přímou transformaci (4.39) dostáváme:

$$A'_x = A_x \cos \varphi + A_y \sin \varphi, \quad (4.45)$$

$$A'_y = -A_x \sin \varphi + A_y \cos \varphi. \quad (4.46)$$

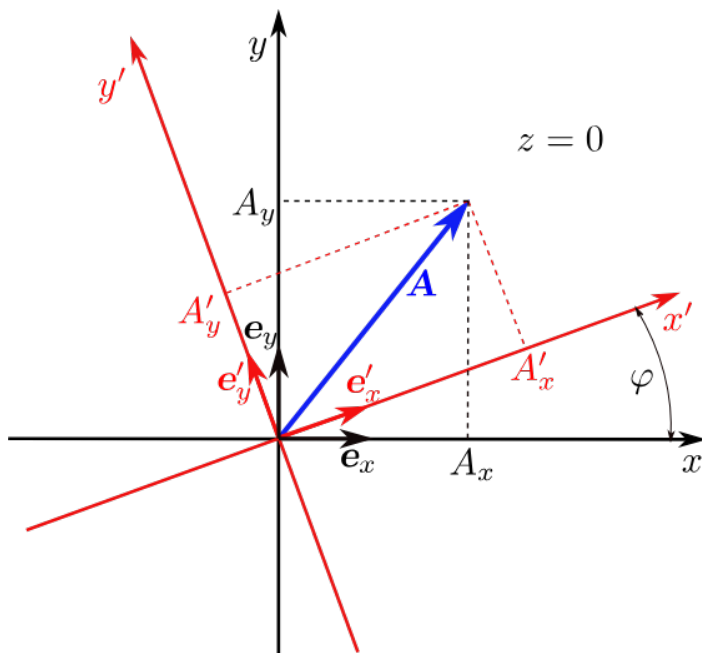
Ze vztahu pro zpětnou transformaci (4.40) dostáváme:

$$A_x = A'_x \cos \varphi - A'_y \sin \varphi, \quad (4.47)$$

$$A_y = A'_x \sin \varphi + A'_y \cos \varphi. \quad (4.48)$$

Snadno se přesvědčíme, že platí: $A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} = \sqrt{A'^2_x + A'^2_y}$.

Viz kap. 2, vektorové fyzikální veličiny.



Obrázek 4.7: Vzájemné pootočení dvou kartézských souřadnic o úhel φ .

4.4 Křivočaré souřadnicové soustavy

Ve fyzice užíváme různé souřadnicové soustavy. Doposud byla zmíněna pouze kartézská souřadnicová soustava. Vedle této soustavy používáme i soustavy jiné, které jsou někdy pro fyzikální popis daného problému vhodnější.

V dané oblasti prostoru Ω necht' jsou dány tři navzájem nezávislé, spojitě a jednoznačně funkce kartézských souřadnic x, y, z :

$$u_1 = u_1(x, y, z), \quad u_2 = u_2(x, y, z), \quad u_3 = u_3(x, y, z), \quad [x, y, z] \in \Omega. \quad (4.49)$$

V oblasti Ω necht' mají funkce (4.49) spojitě parciální derivace prvního řádu. Dále předpokládejme, že **funkcionální determinant (jacobián)**

$$\frac{\partial(u_1, u_2, u_3)}{\partial(x, y, z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x} & \frac{\partial u_1}{\partial y} & \frac{\partial u_1}{\partial z} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x} & \frac{\partial u_2}{\partial y} & \frac{\partial u_2}{\partial z} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x} & \frac{\partial u_3}{\partial y} & \frac{\partial u_3}{\partial z} \end{vmatrix} \quad (4.50)$$

je v uvažované oblasti různý od nuly. Pak mají v dané oblasti rovnice (4.49) jednoznačné inverzní řešení

$$x = x(u_1, u_2, u_3), \quad y = y(u_1, u_2, u_3), \quad z = z(u_1, u_2, u_3). \quad (4.51)$$

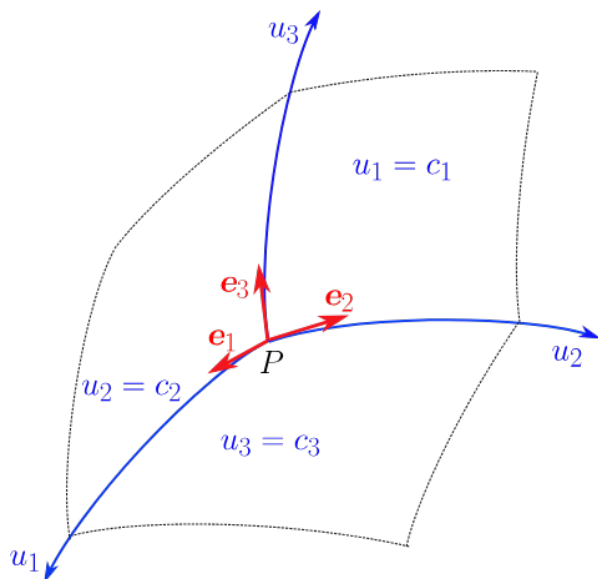
Každému bodu $P = [x, y, z]$ v dané oblasti Ω je rovnicemi (4.49) přiřazena trojice čísel u_1, u_2, u_3 (souřadnice) a obráceně tato trojice určuje jednoznačně polohu bodu $P = [x, y, z]$.

Každým bodem P procházejí tři souřadnicové plochy, viz obr. 4.8,

$$u_1 = c_1, \quad u_2 = c_2, \quad u_3 = c_3, \quad (4.52)$$

kde c_1, c_2, c_3 jsou konstanty. Souřadnicové křivky jsou na obr. 4.8 označeny u_1, u_2 a u_3 .

Nechť $\mathbf{r} = (x, y, z)$ je polohový vektor bodu P . Na základě transformačních vztahů



Obrázek 4.8: Obecné křivočaré souřadnice.

(4.49) je možné tento polohový vektor vyjádřit i pomocí souřadnic u_1, u_2, u_3 , tj. $\mathbf{r} = (u_1, u_2, u_3)$. Tečný vektor k souřadnicové křivce u_1 , pro kterou u_2 a u_3 jsou konstanty, je dán výrazem

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1}. \quad (4.53)$$

Jednotkový vektor v tomto směru \mathbf{e}_1 je dán následujícím vztahem

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1} / \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1} \right|. \quad (4.54)$$

Vektor (4.53) je možné vyjádřit jako

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1} = h_1 \mathbf{e}_1, \quad (4.55)$$

kde

$$h_1 = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1} \right|. \quad (4.56)$$

K podobným vztahům můžeme dospět i pro tečné vektory zbývajících souřadnicových křivek, takže obecně můžeme psát, že

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_i} = h_i \mathbf{e}_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (4.57)$$

$$\mathbf{e}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_i} / \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_i} \right|. \quad (4.58)$$

a

$$h_i = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_i} \right| \quad (4.59)$$

jsou tzv. Laméovy koeficienty.

Na rozdíl od kartézského souřadnicového systému, souřadnicové vektory \mathbf{e}_i mění spojitě od místa k místu svůj směr.

Pro infinitezimální změnu polohového vektoru můžeme psát

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_3} du_3 = h_1 du_1 \mathbf{e}_1 + h_2 du_2 \mathbf{e}_2 + h_3 du_3 \mathbf{e}_3 . \quad (4.60)$$

Pro obloukový element platí, že

$$ds^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} . \quad (4.61)$$

Budeme-li dále předpokládat, že souřadnicový systém je ortogonální, tj.

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \quad i, j = 1, 2, 3 \\ 1 & i = j , \end{cases} \quad (4.62)$$

potom pro obloukový element (4.61), na základě vztahu (4.60), můžeme psát

$$ds^2 = h_1^2 du_1^2 + h_2^2 du_2^2 + h_3^2 du_3^2 . \quad (4.63)$$

V podkapitole 4.2 bylo uvedeno, že smíšený součin odpovídá velikosti objemu rovnoběžnostěny, jehož stěny odpovídají velikosti vektorů vystupujících ve smíšeném součinu. Proto pro objemový element dostáváme

$$dV = |[(h_1 du_1 \mathbf{e}_1) \times (h_2 du_2 \mathbf{e}_2)] \cdot (h_3 du_3 \mathbf{e}_3)| = h_1 h_2 h_3 du_1 du_2 du_3 \quad (4.64)$$

neboť

$$|(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{e}_3| = 1 . \quad (4.65)$$

Gradient skalární funkce ϕ můžeme v pravoúhlých křivočarých souřadnicích vyjádřit jako

$$\nabla \phi = f_1 \mathbf{e}_1 + f_2 \mathbf{e}_2 + f_3 \mathbf{e}_3 , \quad (4.66)$$

kde skalární funkce f_1 , f_2 a f_3 máme určit. Pro totální diferenciál skalární funkce ϕ můžeme s ohledem na vztah (4.60) psát

$$d\phi = (\nabla \phi) \cdot d\mathbf{r} = h_1 f_1 du_1 + h_2 f_2 du_2 + h_3 f_3 du_3 . \quad (4.67)$$

Avšak obecně pro úplný diferenciál funkce $\phi(u_1, u_2, u_3)$ platí

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial \phi}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial \phi}{\partial u_3} du_3 . \quad (4.68)$$

Porovnáním odpovídajících si členů v rovnostech (4.67) a (4.68) dostáváme

$$f_1 = \frac{1}{h_1} \frac{\partial \phi}{\partial u_1} , \quad f_2 = \frac{1}{h_2} \frac{\partial \phi}{\partial u_2} , \quad f_3 = \frac{1}{h_3} \frac{\partial \phi}{\partial u_3} . \quad (4.69)$$

Dosadíme-li za funkce f_1 , f_2 a f_3 ve vztahu pro gradient funkce ϕ výrazy (4.69), pak dostaneme vztah pro gradient funkce v pravoúhlých křivočarých souřadnicích

$$\nabla \phi = \frac{1}{h_1} \frac{\partial \phi}{\partial u_1} \mathbf{e}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial \phi}{\partial u_2} \mathbf{e}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial \phi}{\partial u_3} \mathbf{e}_3 . \quad (4.70)$$

Odtud dostáváme vztah pro nabla operátor v křivočarých pravoúhlých souřadnicích

$$\nabla = \frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial u_1} \mathbf{e}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial}{\partial u_2} \mathbf{e}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial}{\partial u_3} \mathbf{e}_3 . \quad (4.71)$$

4.4.1 Cylindrická (válnová) souřadnicová soustava

Cylindrické souřadnice budeme značit ρ , φ , z , viz obr. 4.9. Mezi kartézskými a cylindrickými souřadnicemi platí následující transformační vztahy (viz (4.51))

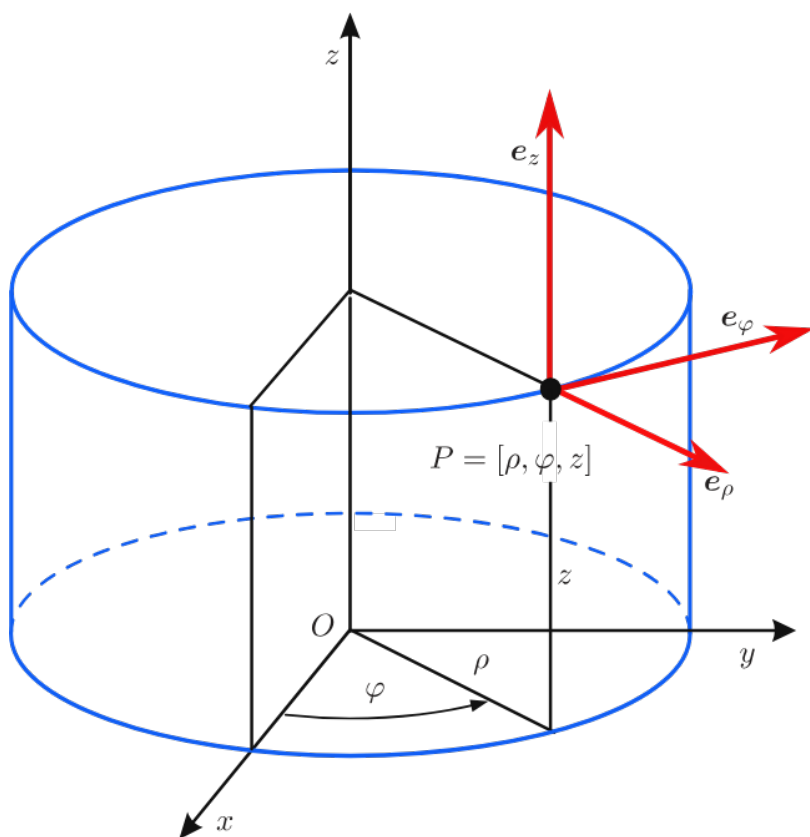
$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z, \quad (4.72)$$

kde (viz (4.49))

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arctan \frac{y}{x}, \quad z = z, \quad (4.73)$$

$$\rho \geq 0, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad -\infty < z < \infty. \quad (4.74)$$

Zadáme-li poloměr $\rho = \rho_0$ kružnice v rovině (x, y) , pak to v prostoru představuje



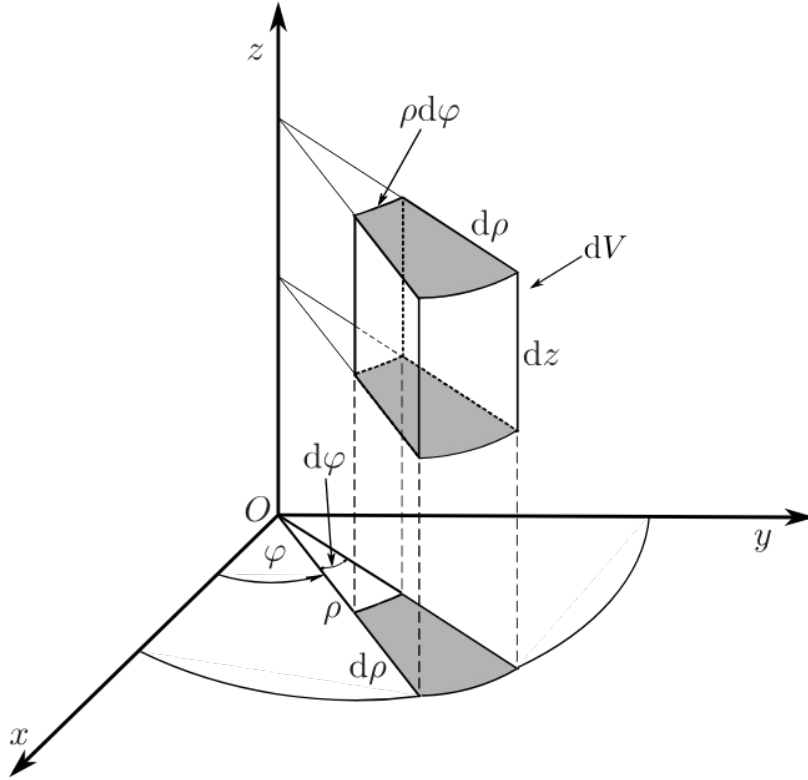
Obrázek 4.9: Cylindrické souřadnice souřadnice.

plášť válce (souřadnicová plocha) s osou z rozprostírajícího se od $z = -\infty$ do $z = \infty$. Zvolíme-li určitou hodnotu úhlu $\varphi = \varphi_0$, vznikne tím v prostoru pol rovina kolmá na rovinu (x, y) i cylindrickou plochu pláště válce. Průsečíkem této cylindrické plochy $\rho = \rho_0$ s polorovinou $\varphi = \varphi_0$ je přímka rovnoběžná s osou válce (osou z) a ležící na plášti válce. Položíme-li $z = z_0$, vznikne tím rovina rovnoběžná s rovinou (x, y) a protínající uvedenou přímku v bodě o cylindrických souřadnicích ρ_0 , φ_0 , z_0 . Obecný bod $P = [\rho, \varphi, z]$ je tedy v cylindrické soustavě určen průsečíkem tří vzájemně kolmých souřadnicových ploch: cylindrické plochy a dvou rovin, jedná se tedy o **křivočaré souřadnice**.

Uvažujme polohový vektor $\mathbf{r} = (x, y, z)$, za souřadnice x, y, z dosadíme ze vztahů (4.72), takže dostaneme

$$\mathbf{r} = (\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z) . \quad (4.75)$$

Nyní zderivujeme polohový vektor (4.75) podle jednotlivých cylindrických sou-



Obrázek 4.10: Elementární objem v cylindrických souřadnicích.

řadnic, viz (4.57), kde $u_1 = \rho$, $u_2 = \varphi$ a $u_3 = z$ a pomocí vztahů (4.58), (4.59) určíme souřadnicové vektory a Laméovy koeficienty

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1} &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0) , \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_2} &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = (-\rho \sin \varphi, \rho \cos \varphi, 0) , \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_3} &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = (0, 0, 1) , \end{aligned} \quad (4.76)$$

$$\begin{aligned} h_1 &= h_\rho = \sqrt{(\cos \varphi)^2 + (\sin \varphi)^2} = 1 , \\ h_2 &= h_\varphi = \sqrt{\rho^2 (\sin \varphi)^2 + \rho^2 (\cos \varphi)^2} = \rho , \\ h_3 &= h_z = \sqrt{1^2} = 1 , \end{aligned} \quad (4.77)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= \mathbf{e}_\rho = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0) , \\ \mathbf{e}_2 &= \mathbf{e}_\varphi = (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0) , \\ \mathbf{e}_3 &= \mathbf{e}_z = (0, 0, 1) . \end{aligned} \quad (4.78)$$

Dosadíme-li ze vztahů (4.76) a (4.77) do výrazů (4.60), (4.63), (4.64), pak dospějeme k následujícím vztahům platným pro cylindrickou souřadnicovou soustavu

$$d\mathbf{r} = d\rho \mathbf{e}_\rho + \rho d\varphi \mathbf{e}_\varphi + dz \mathbf{e}_z , \quad (4.79)$$

$$ds^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + dz^2 , \quad (4.80)$$

$$dV = \rho d\rho d\varphi dz . \quad (4.81)$$

Na obrázku 4.10 je zachycen příslušný element objemu.

4.4.2 Polární souřadnicová soustava

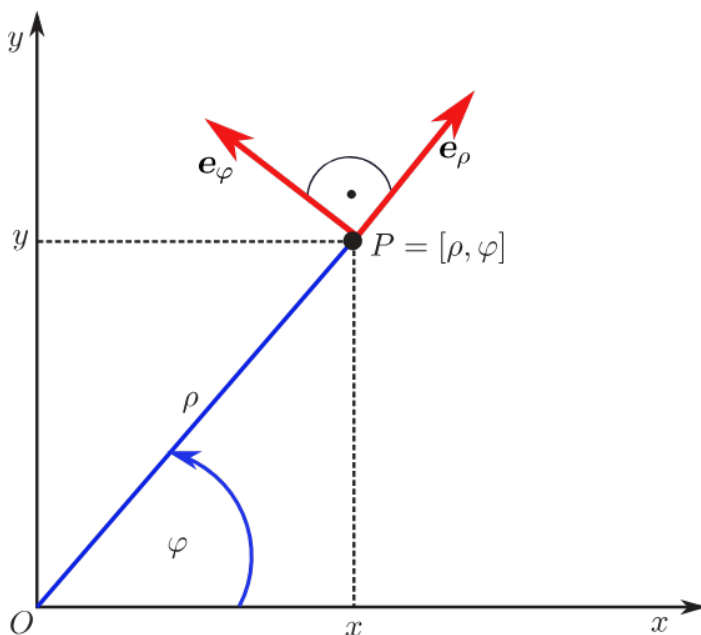
Někdy se pro popis pohybu v rovině hodí tzv. **polární souřadnice**, které jsou jistým případem cylindrických souřadnic, kdy $z = 0$. Polární souřadnice budeme značit ρ , φ , viz obr. 4.11. Z tohoto obrázku odvodíme transformační vztahy mezi kartézskými a polárními souřadnicemi

$$x = \rho \cos \varphi , \quad y = \rho \sin \varphi , \quad (4.82)$$

kde

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} , \quad \varphi = \arctan \frac{y}{x} . \quad (4.83)$$

Jelikož polární souřadnicový systém je jistým případem souřadnicového systému



Obrázek 4.11: Polární souřadnice.

cylindrického, pak je možné pro Laméovy koeficienty a souřadnicové vektory psát, viz (4.77), (4.78), že

$$\begin{aligned} h_1 &= h_\rho = \sqrt{(\cos \varphi)^2 + (\sin \varphi)^2} = 1 , \\ h_2 &= h_\varphi = \sqrt{\rho^2 (\sin \varphi)^2 + \rho^2 (\cos \varphi)^2} = \rho . \end{aligned} \quad (4.84)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= \mathbf{e}_\rho = (\cos \varphi, \sin \varphi) , \\ \mathbf{e}_2 &= \mathbf{e}_\varphi = (-\sin \varphi, \cos \varphi) . \end{aligned} \quad (4.85)$$

V případě polárních souřadnic dostáváme pro infinitezimální změnu polohového vektoru

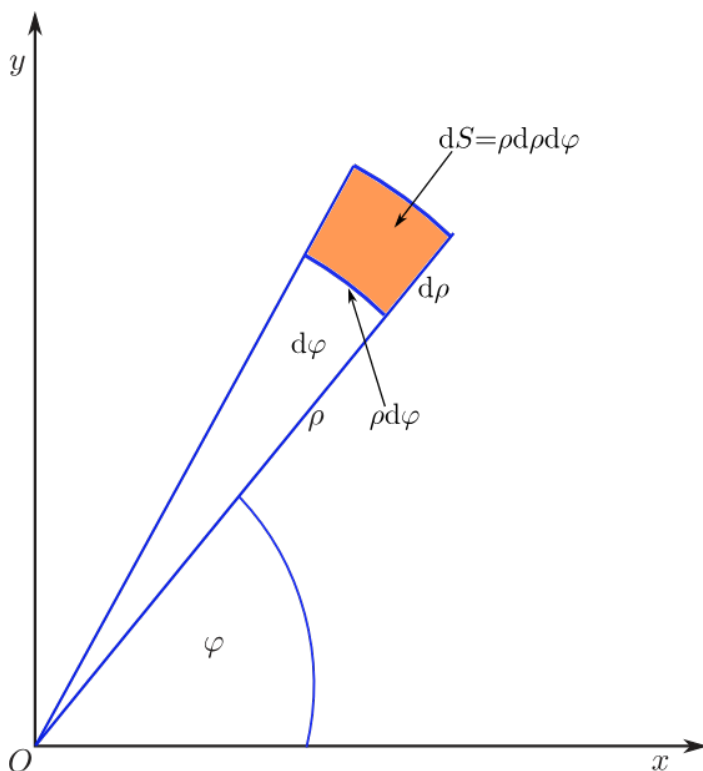
$$d\mathbf{r} = d\rho \mathbf{e}_\rho + \rho d\varphi \mathbf{e}_\varphi . \quad (4.86)$$

Pro obloukový element ds v případě polárních souřadnic platí

$$ds^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 . \quad (4.87)$$

Element plochy dS v polárních souřadnicích vyjádříme jako součin délky oblouku kruhové výseče $\rho d\varphi$ vynásobenou přírůstkem souřadnice $d\rho$, viz obr. 4.12, tj.

$$dS = \rho d\rho d\varphi . \quad (4.88)$$



Obrázek 4.12: Element plochy v polárních souřadnicích.

4.4.3 Sférická (kulová) souřadnicová soustava

Sférické souřadnice budeme značit r , ϑ , φ , viz obr. 4.13. Mezi kartézskými a sférickými souřadnicemi platí následující transformační vztahy

$$x = r \sin \vartheta \cos \varphi , \quad y = r \sin \vartheta \sin \varphi , \quad z = r \cos \vartheta , \quad (4.89)$$

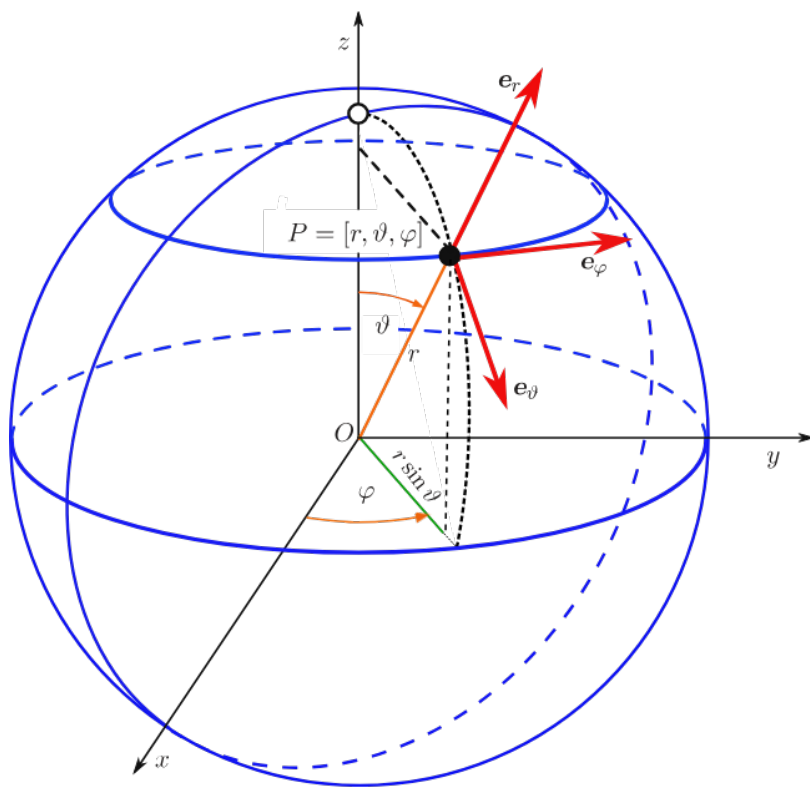
$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} , \quad \vartheta = \arccos \frac{z}{r} , \quad \varphi = \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} , \quad (4.90)$$

$$r \geq 0, \quad 0 \leq \vartheta < \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi. \quad (4.91)$$

Co se týče sférických souřadnic, tak souřadnici r nazýváme **průvodič**, ϑ nazýváme **deklinace** a φ **azimut**.

Sférické souřadnice lze rovněž interpretovat pomocí tří vzájemně se protínajících ploch. Zadáme-li $r = r_0$ omezujeme množinu bodů na povrch koule o poloměru $r = r_0$. Úhlu $\vartheta = \vartheta_0$ odpovídá v prostoru plášť kužele s vrcholem v počátku souřadnic o rozvorovém úhlu (měřeném od osy z) $\vartheta = \vartheta_0$. Tato kuželová plocha protne povrch koule kolmo (každý poloměr koule je kolmý na povrch koule); průsečíkem je kružnice o poloměru $r \sin \vartheta = r_0 \sin \vartheta_0$. Zadáme-li $\varphi = \varphi_0$, vznikne rovina svírající s rovinou (x, z) úhel φ_0 . Tato rovina protne kolmo uvedenou kružnici v bodě o sférických souřadnicích $r_0, \vartheta_0, \varphi_0$. Tedy obecný bod $P[r, \vartheta, \varphi]$ je ve sférických souřadnicích určen průsečíkem tří vzájemně kolmých ploch: kulové plochy, pláště kužele a roviny. Opět se tak setkáváme s případem **ortogonálních křivočarých souřadnic**.

Opět uvažujme polohový vektor $\mathbf{r} = (x, y, z)$, za souřadnice x, y, z dosadíme



Obrázek 4.13: Sférické souřadnice.

vztahy (4.89), takže dostaneme

$$\mathbf{r} = (r \sin \vartheta \cos \varphi, r \sin \vartheta \sin \varphi, r \cos \vartheta). \quad (4.92)$$

Nyní zderivujeme polohový vektor (4.92) podle jednotlivých cylindrických souřadnic, viz (4.57), kde $u_1 = r$, $u_2 = \vartheta$ a $u_3 = \varphi$ a pomocí vztahů (4.58), (4.59)

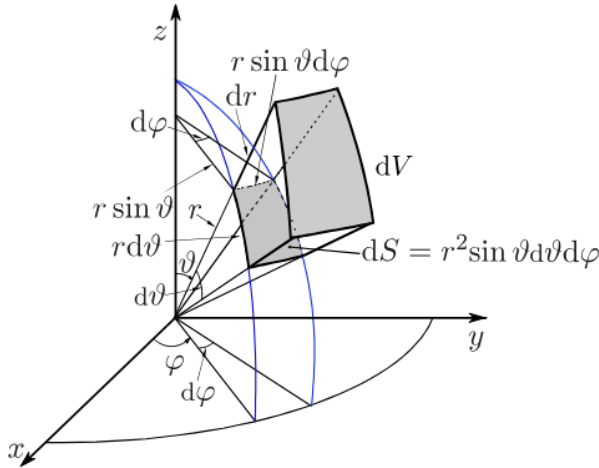
určíme souřadnicové vektory a Laméovy koeficienty

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1} &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} = (\sin \vartheta \cos \varphi, \sin \vartheta \sin \varphi, \cos \vartheta) , \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_2} &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \vartheta} = (r \cos \vartheta \cos \varphi, r \cos \vartheta \sin \varphi, -r \sin \vartheta) , \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_3} &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = (-r \sin \vartheta \sin \varphi, r \sin \vartheta \cos \varphi, 0) ,\end{aligned}\quad (4.93)$$

$$\begin{aligned}h_1 &= h_r = \sqrt{(\sin \vartheta \cos \varphi)^2 + (\sin \vartheta \sin \varphi)^2 + (\cos \vartheta)^2} = 1 , \\ h_2 &= h_\vartheta = \sqrt{r^2(\cos \vartheta \cos \varphi)^2 + r^2(\cos \vartheta \sin \varphi)^2 + r^2(\sin \vartheta)^2} = r , \\ h_3 &= h_\varphi = \sqrt{r^2(\sin \vartheta \sin \varphi)^2 + r^2(\sin \vartheta \cos \varphi)^2} = r \sin \vartheta ,\end{aligned}\quad (4.94)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_1 &= \mathbf{e}_r = (\sin \vartheta \cos \varphi, \sin \vartheta \sin \varphi, \cos \vartheta) , \\ \mathbf{e}_2 &= \mathbf{e}_\vartheta = (\cos \vartheta \cos \varphi, \cos \vartheta \sin \varphi, -\sin \vartheta) , \\ \mathbf{e}_3 &= \mathbf{e}_\varphi = (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0) .\end{aligned}\quad (4.95)$$

Dosadíme-li ze vztahů (4.93) a (4.94) do výrazů (4.60), (4.63), (4.64), pak dospě-



Obrázek 4.14: Elementární objem a plocha ve sférických souřadnicích

jeme k následujícím vztahům platným pro sférický souřadnicový systém

$$d\mathbf{r} = dr\mathbf{e}_r + r d\vartheta \mathbf{e}_\vartheta + r \sin \vartheta d\varphi \mathbf{e}_\varphi , \quad (4.96)$$

$$ds^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2 \vartheta d\varphi^2 , \quad (4.97)$$

$$dV = r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi . \quad (4.98)$$

Podle obrázku 4.14 můžeme elementární plochu na kouli dS vyjádřit jako součin stran vyznačeného „obdélníku“, tj.

$$dS = (r d\vartheta)(r \sin \vartheta d\varphi) = r^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi . \quad (4.99)$$

Pomocí obrázku 4.14 či vztahu (4.64) dostáváme i vztah pro element objemu ve sférických souřadnicích

$$dV = dS dr = r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi . \quad (4.100)$$

Příklad 4.4.1

Spočítejte obsah povrchu koule o poloměru $r = R$.

Řešení:

K výpočtu použijeme vztah pro element kulové plochy (4.99). Tuto infinitezimální plochu musíme nasčítat přes celý povrch koule, což provedeme integrováním, při kterém se mění souřadnici φ od 0 do 2π a souřadnici ϑ od 0 do π :

$$S = \iint_S dS = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} R^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = R^2 \int_0^\pi \sin \vartheta d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi =$$

$$R^2 [-\cos \vartheta]_0^\pi [\varphi]_0^{2\pi} = 4\pi R^2 .$$

Příklad 4.4.2

Spočítejte objem koule o poloměru $r = R$.

Řešení:

K výpočtu použijeme vztah pro element objemu koule (4.100). Tuto infinitezimální plochu musíme nasčítat přes celý objem koule, což provedeme integrováním, při kterém se mění souřadnici r od 0 do R , souřadnici φ od 0 do 2π a souřadnici ϑ od $-\pi$ do π :

$$V = \iiint_V dV = \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi =$$

$$\int_0^R r^2 dr \int_0^\pi \sin \vartheta d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi = \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^R [-\cos \vartheta]_0^\pi [\varphi]_0^{2\pi} = \frac{4}{3} \pi R^3 .$$

Část I

Klasická mechanika

Kapitola 5

Úvod do klasické mechaniky

Mechanika je obor fyziky, který se zabývá mechanickým pohybem, tj. změnou polohy uvažovaného tělesa vzhledem k tělesu vztažnému či změnou jeho velikosti a tvaru. Mechanika hraje nejvýznamnější roli ve fyzice, představuje jakousi pomyslnou „vstupní bránu“ do fyziky.

Mechanika zahrnuje **kinematiku** a **dynamiku**.

Kinematika se zabývá pouze závislostí polohy tělesa na čase, tj. geometrií jeho pohybu, bez zřetele na příčiny (síly), které tento pohyb způsobují.

Dynamika vyšetřuje závislosti mezi pohybem těles a silami, které na ně působí a vyvolávají změnu jejich pohybového stavu.

Speciálním případem dynamiky je **statika** a zabývá se vyšetřováním podmínek rovnováhy sil.

Klasickou mechaniku můžeme rozdělit na tzv. **newtonovskou** (vektorovou) mechaniku a mechaniku **analytickou** (skalární). Newtonovské pojetí popisuje mechaniku vektorovými veličinami, které jsou spojeny pohybovými zákony. Analytická mechanika vychází při formulaci zákonů z obecných principů¹, které jsou vyjádřené zpravidla skalární rovnicí (popř. nerovnicí).

Klasickou mechaniku začneme newtonovskou mechanikou, jejíž teoretické základy formuloval anglický fyzik a matematik Isaac Newton (1643-1727) ve svém fundamentálním díle (1687) **Philosophiae Naturalis Principia Mathematica**². Newton předpokládal, že prostor a čas jsou absolutní, tj. že nezávisí na hmotných objektech a jejich pohybech. Na předpokladu **absolutního prostoru a času** je založena klasická mechanika. I když z **Einsteinovy teorie relativity** víme, že absolutní prostor a absolutní čas **neexistuje**, přesto nám klasická mechanika popisuje fyzikální svět s dostatečnou přesností, pakliže můžeme předpokládat přítomnost slabého gravitačního pole (velmi hmotné objekty jsou dostatečně vzdálené) a že vyšetřované objekty jsou makroskopické³ a pohybují se rychlostmi výrazně nižšími, než je rychlost světla, tedy $v \ll c \cong 3 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1}$.

Poněvadž dvě tělesa mohou mít libovolnou, spojitě se měnící vzájemnou vzdálenost a vzájemnou orientaci, přisuzujeme prostoru, ve kterém pohyb tělesa vyšet-

¹Principy mají pro fyziku charakter axiomů a jednotlivé zákony z nich plynou jako přímý logický důsledek.

²Překlad: **Matematické základy přírodní filosofie**, někdy toto dílo zkráceně nazýváme jen **Principia** či **Základy**.

³Předpokladem, že se jedná o objekty makroskopické, se vyvarujeme nutnosti použít kvantový popis.

řujeme, vlastnosti kontinua. Abychom jednotlivé body prostorového kontinua od sebe odlišili, přiřadíme každému bodu souřadnice pomocí vztažné souřadnicové soustavy, tj. souřadnicové soustavy spojené s vztažným tělesem, takže na prostor klasické mechaniky pohlížíme jako na třírozměrné kontinuum. Ukazuje se, že geometrické vlastnosti takového prostoru lze popsat soustavou Eukleidových axiomů, takže prostor klasické fyziky je třírozměrným eukleidovským prostorem, který je homogenní a izotropní, tj. všechny body a všechny směry jsou zde rovnocenné, ničím se neliší.

Často se setkáváme se situací, kdy se těleso pohybuje v oblasti prostoru, jejíž rozměry výrazně převyšují vlastní rozměry tohoto tělesa (např. pohyb Země kolem Slunce). Z tohoto důvodu si můžeme dovolit zanedbat vlastní rozměry pohybujícího se tělesa a přejít k abstrakci, kdy tato tělesa nahradíme tzv. **hmotnými body**⁴ (bodová hmotnost). Hmotný bod (HB) chápeme těleso se zanedbatelnými geometrickými rozměry, které z důvodu matematického popisu považujeme za nekonečně malé (bod). Hmotný bod si však **ponechává** hmotnost tělesa, které nahrazuje. U hmotného bodu pak **nemá smysl** mluvit o jeho vlastním otáčení, ani o změně tvaru (deformaci).

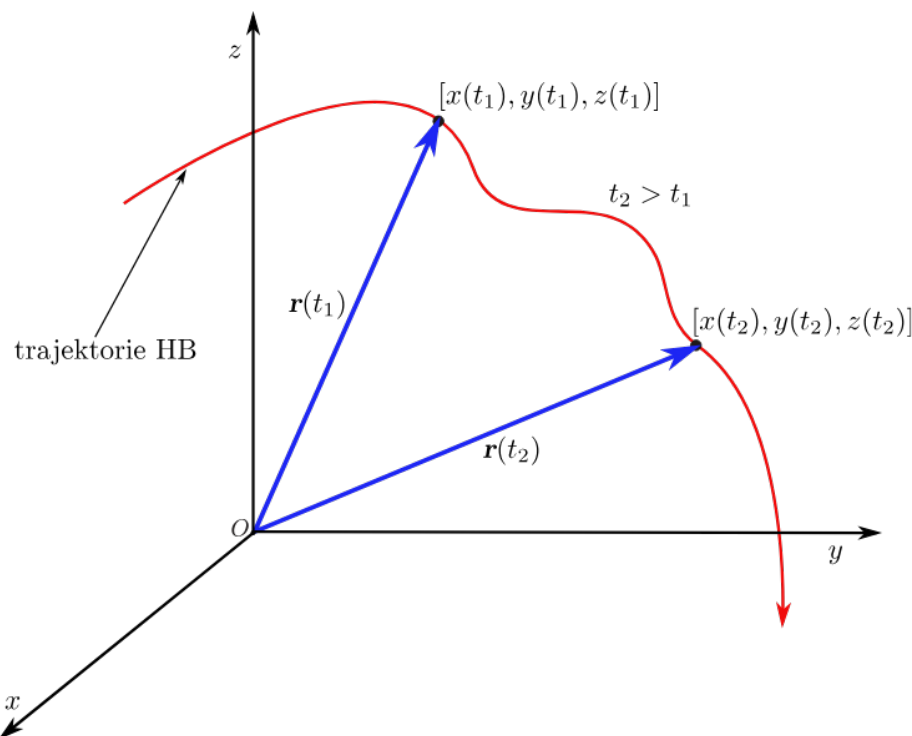
⁴Někdy se v literatuře místo pojmu hmotný bod můžeme setkat s pojmem **částice**.

Kapitola 6

Kinematika hmotného bodu

6.1 Trajektorie hmotného bodu

Pohyb hmotného bodu je jednoznačně určen, je-li v každém časovém okamžiku t dána jeho poloha polohovým vektorem $\mathbf{r}(t)$ vzhledem ke vztažné souřadnicové soustavě. Uvažujeme-li kartézský souřadnicový systém, je poloha uvažovaného hmotného bodu určena kartézskými souřadnicemi, které jsou funkcí času



Obrázek 6.1: Pohyb hmotného bodu (HB) po trajektorii.

$$x = x(t) , \quad y = y(t) , \quad z = z(t) . \quad (6.1)$$

Rovnice (6.1) jsou parametrickými rovnicemi křivky, po níž se hmotný bod pohybuje. Parametrem je v tomto případě čas t . Rovnice (6.1) definují oblouk spojitě křivky a určitý směr na této křivce, daný rostoucím t . Tuto křivku nazýváme

dráha nebo trajektorie hmotného bodu, viz obr. 6.1.

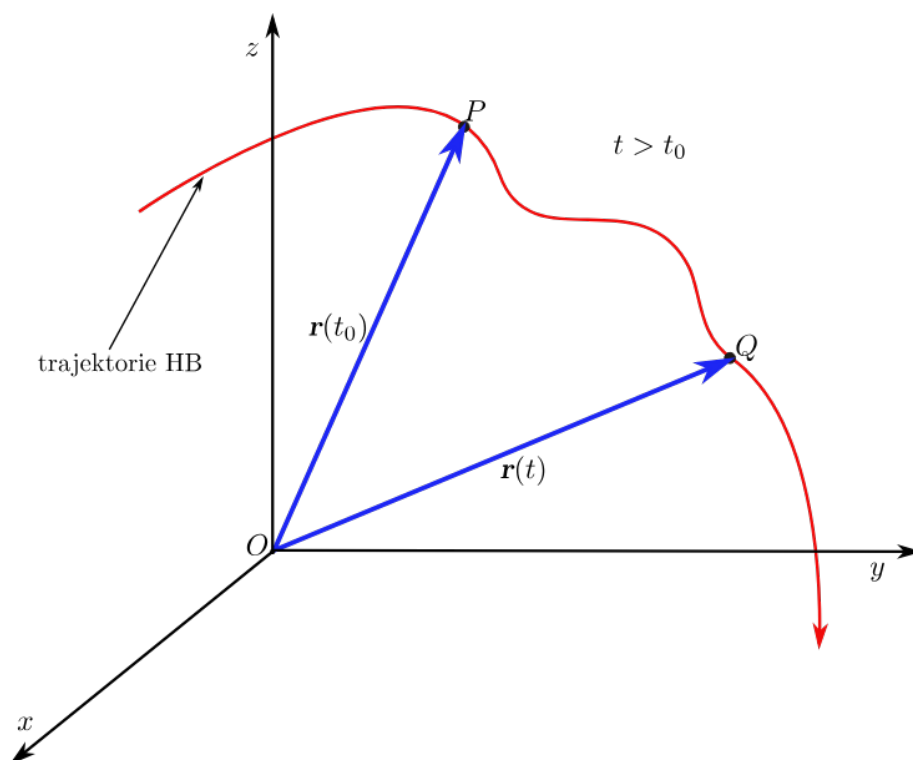
Jestliže rovnice (6.1) vynásobíme příslušnými jednotkovými souřadnicovými vektory \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} a sečteme, dostaneme polohový vektor uvažovaného hmotného bodu

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} \equiv (x(t), y(t), z(t)) . \quad (6.2)$$

Parametrické rovnice (6.1) trajektorie jsou tedy ekvivalentní vektorové rovnici

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) . \quad (6.3)$$

Libovolnému bodu Q trajektorie o polohovém vektoru $\mathbf{r}(t)$ lze přiřadit číslo



Obrázek 6.2: Délka dráhy, kterou urazil HB.

$$s(t) = \int_P^Q ds = \int_P^Q \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2} = \int_{t_0}^t \sqrt{\left(\frac{dx}{dt'}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt'}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt'}\right)^2} dt' = \int_{t_0}^t \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt'} \right| dt' . \quad (6.4)$$

Vztah (6.4) přiřazuje jednotlivým bodům trajektorie čísla vzhledem k bodu P (reprezentuje počátek) na trajektorii mající polohový vektor $\mathbf{r}(t_0)$. V takovém případě je možné pohlížet na $s(t)$ jako na souřadnici, s jejíž pomocí určujeme polohu hmotného bodu na trajektorii, kterou předem známe. Budeme říkat, že bod Q leží za (před) bodem P , je-li $s(t) > 0$ ($s(t) < 0$).

Jako příklad použití souřadnic s můžeme uvést např. milníky podél dálnice D1 mezi městy Praha (bod P) a Brno.

Příklad 6.1.1

Zjistěte, po jaké trajektorii se pohybuje HB, pro kterou platí: $x(t) = at$ a $y(t) = bt^2/4$, $z(t) = 0$, kde $a = 1 \text{ ms}^{-1}$ a $b = 1 \text{ ms}^{-2}$ jsou rozměrové konstanty, které zajišťují, aby parametricky vyjádřené souřadnice byly v metrech.

Dále určete souřadnici s bodu Q v časech $t = 0 \text{ s}$ a $t = 4 \text{ s}$, vzhledem k bodu P , ve kterém se nacházel HB v čase $t_0 = 2 \text{ s}$.

Řešení:

Na základě zadání víme, že se HB bude pohybovat v rovině $z = 0$. Protože ze zadání platí, že $t = x/a$, tak za čas t dosadíme x/a ve vztahu pro souřadnici y , čímž dostaneme rovnici trajektorie HB:

$$y = \frac{bx^2}{4a^2} = \frac{x^2}{4},$$

což je rovnice paraboly, kde bylo dosazeno za a a b .

Pomocí vztahu (6.4) dostaneme:

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_{t_0=2}^t \sqrt{\left(\frac{dx}{dt'}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt'}\right)^2} dt' = \int_{t_0=2}^t \sqrt{(a)^2 + \left(\frac{bt'}{2}\right)^2} dt' = \\ &= \int_{t_0=2}^t \sqrt{a^2 + \frac{b^2 t'^2}{4}} dt' = \operatorname{argsinh}\left(\frac{t}{2}\right) + \frac{t}{4}\sqrt{4+t^2} - \operatorname{argsinh}(1) - \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Odtud $s(0) = -2,2956 \text{ m}$, tedy bod Q se nachází na parabole před bodem P a $s(4) = 3,6201 \text{ m}$, tedy bod Q se nachází na parabole za bodem P .

V případě, že je vektorová funkce $\mathbf{r}(t)$ prostá, pak $s(t)$ udává i délku dráhy uražené hmotným bodem při jeho pohybu. Není-li $\mathbf{r}(t)$ prostou funkcí, musíme časový interval, ve kterém se hmotný bod pohybuje, rozdělit na části, v nichž $\mathbf{r}(t)$ je prostou funkcí, a vypočítat délku dráhy jako součet drah uražených v jednotlivých dílčích intervalech s tím, že délka dráhy musí být kladná. V tomto smyslu náš vztah (6.4) představuje **délku dráhy** $s(t) > 0$, kterou urazí hmotný bod v časovém intervalu $\langle t_0, t \rangle$. Představuje-li $s(t)$ délku dráhy, pak je rostoucí funkcí. Diferenciál ds vystupující ve vztahu (6.4) nazýváme **element délky dráhy**.

Prostá funkce je funkce, která žádnou funkční hodnotu nenabývá vícekrát.

Příklad 6.1.2

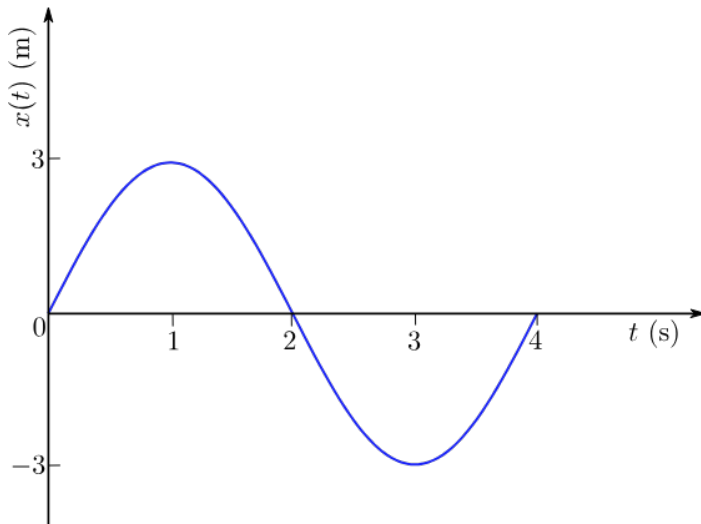
Určete délku dráhy, kterou urazí HB za 4 s, když se v čase $t_0 = 0 \text{ s}$ nacházel v bodě P a pohybuje se po trajektorii: $x(t) = a \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$, $y(t) = 0$, $z(t) = 0$, kde $a = 3 \text{ m}$.

Určete hodnotu souřadnice s v čase $t = 4 \text{ s}$.

Řešení:

Na základě vztahu (6.4) dostaneme: $s(t) = 3 \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$. Ze zadání vyplývá, že se HB pohybuje po přímce mezi body, kterým přísluší souřadnice -3 a 3 . Je zřejmé, že

$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} = 3 \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)\mathbf{i}$ není v celém vyšetřovaném časovém intervalu prostou funkcí. Proto musíme časový interval $\langle 0; 4 \rangle$ rozdělit na čtyři podintervaly $\langle 0; 1 \rangle$, $\langle 1; 2 \rangle$, $\langle 2; 3 \rangle$ a $\langle 3; 4 \rangle$, ve kterých je $\mathbf{r}(t)$ prostou funkcí, viz obrázek.



Celková dráha vyšetřovaného HB, kterou urazí za 4 s (v každém uvažovaném podintervalu musí být kladná) je

$$s = \left| \frac{3\pi}{2} \int_0^1 \cos\left(\frac{\pi}{2}t'\right) dt' \right| + \left| \frac{3\pi}{2} \int_1^2 \cos\left(\frac{\pi}{2}t'\right) dt' \right| + \left| \frac{3\pi}{2} \int_2^3 \cos\left(\frac{\pi}{2}t'\right) dt' \right| + \left| \frac{3\pi}{2} \int_3^4 \cos\left(\frac{\pi}{2}t'\right) dt' \right| = 12 \text{ m}.$$

Pozn.: Kdybychom nerozdělili interval na výše uvedené čtyři podintervaly, tak bychom dostali délku dráhy:

$$s = \left| \frac{3\pi}{2} \int_0^4 \cos\left(\frac{\pi}{2}t'\right) dt' \right| = 0 \text{ m},$$

tj. že se HB za 4 s nepohnul z bodu P .

Souřadnici s v čase $t = 4$ s spočítáme ze vztahu $s(t) = 3 \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$:

$$s(4) = 3 \sin\left(\frac{\pi}{2}4\right) = 0.$$

Tedy HB se za 4 s bude nacházet v bodě P .

Na parametr t , který je použit v parametrických rovnicích (6.1), (6.2) a (6.3), můžeme pohlížet jako na obecný parametr, kterým může být kromě času i například souřadnice s daná vztahem (6.4) (tzv. **přirozená parametrizace**). V případě tohoto parametru pak můžeme analogicky psát, že

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad z = z(s), \quad (6.5)$$

a hmotnému bodu můžeme přiřadit polohový vektor

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s) = (x(s), y(s), z(s)) , \quad (6.6)$$

přičemž závislost s na t je známa, viz vztah (6.4).

Příklad 6.1.3

Uvažujme pohyb HB bodu, jehož poloha je dána následujícím polohovým vektorem: $\mathbf{r}(t) = (a \cos(qt), b \sin(qt), ct)$, kde rozměrové konstanty mají následující hodnoty: $a = 3 \text{ m}$, $b = 3 \text{ m}$, $c = 2 \text{ ms}^{-1}$, $q = 2 \text{ s}^{-1}$. Vyjádřete polohový vektor pomocí přirozené parametrizace. Dále určete polohu HB, který urazil dráhu $\pi\sqrt{40}$ m od bodu P , když víme, že v čase $t_0 = 0 \text{ s}$ v tomto bodě nacházel.

Řešení:

Ze zadání víme, že

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = (3 \cos(2t), 3 \sin(2t), 2t) .$$

Odtud určíme polohu HB (bod P) v počátečním čase $t_0 = 0 \text{ s}$: $\mathbf{r}(0) = (3, 0, 0)$.

K určení souřadnice $s(t)$ použijeme vztahu (6.4):

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_{t_0}^t \sqrt{\left(\frac{dx}{dt'}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt'}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt'}\right)^2} dt' = \\ &= \int_0^t \sqrt{(-6 \sin(2t'))^2 + (6 \cos(2t'))^2 + (2)^2} dt' = \\ &= \int_0^t \sqrt{36 \sin^2(2t') + 36 \cos^2(2t') + 4} dt' = \\ &= \int_0^t \sqrt{36 + 4} dt' = \int_0^t \sqrt{40} dt' = t\sqrt{40} . \end{aligned}$$

Tedy $s(t) = t\sqrt{40}$. Odtud si vyjádříme, že $t = s(t)/\sqrt{40}$, což dosadíme do vztahu pro polohový vektor, který tímto bude vyjádřen pomocí přirozené parametrizace:

$$\mathbf{r}(s) = \left(3 \cos \left(\frac{2s}{\sqrt{40}} \right), 3 \sin \left(\frac{2s}{\sqrt{40}} \right), \frac{2s}{\sqrt{40}} \right) .$$

Polohu HB na trajektorii, když urazil dráhu $s = \pi\sqrt{40}$, dostaneme dosazením do vztahu pro polohový vektor vyjádřený přirozenou parametrizací:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(\pi\sqrt{40}) &= \left(3 \cos \left(\frac{2\pi\sqrt{40}}{\sqrt{40}} \right), 3 \sin \left(\frac{2\pi\sqrt{40}}{\sqrt{40}} \right), \frac{2\pi\sqrt{40}}{\sqrt{40}} \right) = \\ &= (3 \cos 2\pi, 3 \sin 2\pi, 2\pi) = (3, 0, 2\pi) . \end{aligned}$$

Při popisu pohybu se nemusíme omezit jen na kartézský souřadnicový systém. Někdy mohou být vhodnější např. polární, cylindrické nebo sférické souřadnice. Okamžitá poloha je pak dána následujícími parametrickými rovnicemi:

$$\rho = \rho(t), \quad \varphi = \varphi(t), \quad z = z(t), \quad (6.7)$$

$$r = r(t), \quad \vartheta = \vartheta(t), \quad \varphi = \varphi(t). \quad (6.8)$$

Podle trajektorie je možné rozdělit pohyb hmotného bodu na pohyb:

- **přímočarý** – pohyb se děje po přímce.
- **křivočarý** – pohyb se děje po prostorové křivce.

V případě, že je trajektorie předem známá, pak pro určení polohy HB vystačíme s jedinou souřadnicí s i u křivočarého pohybu.

6.2 Jednorozměrný pohyb

Jedná se o pohyb, pro jehož popis vystačíme s jedinou souřadnicí, např. délkou dráhy s či jednou z kartézských souřadnic.

6.2.1 Rychlost

Fyzikální veličinou, která vyjadřuje časovou změnu polohy, je **rychlost**. Definujeme ji podílem délky dráhy, kterou urazí sledovaný hmotný bod, a doby potřebné jejímu uražení. Rychlost značíme obvykle značkou v .

Jestliže hmotný bod urazil za dobu Δt délku dráhy Δs , potom se pohyboval průměrnou rychlostí \bar{v}

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t}. \quad (6.9)$$

Jednotkou rychlosti¹ v soustavě SI je ms^{-1} .

V případě, že se rychlost v čase mění – **nerovnoměrný pohyb**, je účelné zavést **okamžitou rychlost** vztahem

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \bar{v}. \quad (6.10)$$

Je to tedy průměrná rychlost během infinitezimálně krátkého časového intervalu $(t, t + \Delta t)$. Limita (6.10) reprezentuje derivaci funkce $s = s(t)$, takže můžeme psát, že

$$v = \frac{ds}{dt} \equiv \dot{s}. \quad (6.11)$$

Ve vztahu (6.11) je použito pro označení první časové derivace tečky tak, jak to zavedl Isaac Newton. Pro druhou derivaci bychom použili tečky dvě.

Ze vztahu (6.11) můžeme psát

$$ds = v dt. \quad (6.12)$$

¹Např. námořníci používají jinou jednotku rychlosti a tou je **námořní uzel**, 1 uzel $\approx 0,514 \text{ m/s}$.

Integrací rovnosti (6.12) dostáváme, že

$$\int_{s_0}^{s(t)} ds' = \int_{t_0}^t v(t') dt' , \quad (6.13)$$

kde s_0 odpovídá délce dráhy, kterou hmotný bod již urazil v čase t_0 . Tedy jedná se o počáteční podmínku $s(t_0) = s_0$.

Řešením levé strany rovnice (6.15) dostáváme

$$s(t) - s_0 = \int_{t_0}^t v(t') dt' \quad (6.14)$$

a odtud

$$s(t) = \int_{t_0}^t v(t') dt' + s_0 . \quad (6.15)$$

V případě, že $v = konst.$ (**rovnoměrný pohyb**), pak lze snadno řešit integrál ve vztahu (6.15), tedy²

$$s(t) = v \int_{t_0}^t dt' + s_0 = v(t - t_0) + s_0 . \quad (6.16)$$

6.2.2 Zrychlení

Pohybuje-li se hmotný bod nerovnoměrně, tedy mění-li během pohybu svoji rychlost, je účelné zavést fyzikální veličinu, která vyjadřuje časovou změnu rychlosti. Touto fyzikální veličinou je **zrychlení** a budeme jej značit a .

Definujeme průměrné zrychlení \bar{a} jako

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} . \quad (6.17)$$

Jednotkou zrychlení je ms^{-2} .

Okamžité zrychlení můžeme definovat limitou

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} \equiv \dot{v} = \ddot{s} . \quad (6.18)$$

Odtud lze vidět, že zrychlení má vůči rychlosti stejný vztah jako rychlost ku poloze.

Na základě vztahu (6.18) můžeme psát

$$dv = a dt . \quad (6.19)$$

Integrací vztahu (6.19) dostáváme pro okamžitou rychlost

$$v(t) = \int_{t_0}^t a(t') dt' + v_0 , \quad (6.20)$$

kde v_0 je hodnota rychlosti v čase $t = t_0$, tedy jedná se o počáteční podmínku $v(t_0) = v_0$. V případě, že se jedná o **rovnoměrně zrychlený pohyb**, tj. $a = konst.$, potom lze na základě rovnosti (6.20) integrovat

$$v(t) = a \int_{t_0}^t dt' + v_0 = a(t - t_0) + v_0 . \quad (6.21)$$

²Jelikož rychlost je konstantní, vytkneme ji při integraci před integrál.

Dosazením rychlosti (6.21) do vztahu (6.15) dostaneme

$$s(t) = \int_{t_0}^t [a(t' - t_0) + v_0] dt' + s_0 = \frac{1}{2} a(t - t_0)^2 + v_0(t - t_0) + s_0 . \quad (6.22)$$

Je-li $a < 0$, jde o **pohyb zpomalený**. Značíme-li $a' = -a > 0$ a je-li $a' = konst.$, platí zřejmě

$$v(t) = -a'(t - t_0) + v_0 , \quad (6.23)$$

$$s(t) = -\frac{1}{2} a'(t - t_0)^2 + v_0(t - t_0) + s_0 . \quad (6.24)$$

6.3 Vícerozměrný pohyb (pohyb v prostoru)

Při vícerozměrném pohybu používáme k určení polohy hmotného bodu polohový vektor. Jeho velikost a orientace popisuje polohu hmotného bodu, který se pohybuje po trajektorii. Časově proměnný vektor $\mathbf{r}(t)$ je popsán vztahem (6.2).

6.3.1 Rychlost

Obecně je rychlost vektorovou veličinou, která poskytuje informaci nejen o velikosti rychlosti hmotného bodu, ale i o směru jakým se pohybuje.

Okamžitou rychlost zavádíme podle obr. 6.3 vztahem

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \equiv \dot{\mathbf{r}} . \quad (6.25)$$

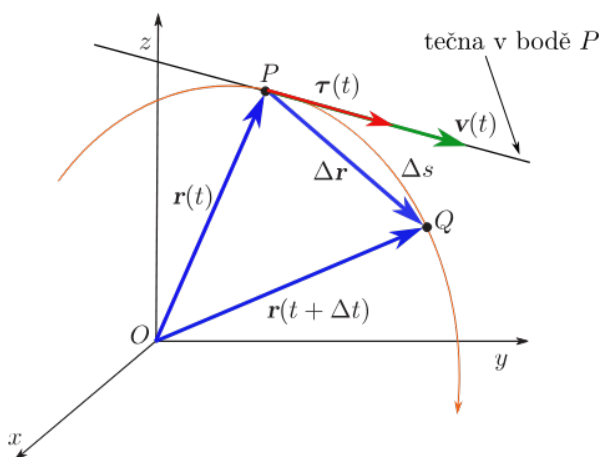
V kartézských souřadnicích platí

$$\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z) = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) , \quad (6.26)$$

resp.

$$\mathbf{v} = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k} = \dot{x} \mathbf{i} + \dot{y} \mathbf{j} + \dot{z} \mathbf{k} . \quad (6.27)$$

Zavedením rychlosti je možné vyjádřit vztah (6.4) jako



Obrázek 6.3: Pohyb hmotného bodu po trajektorii v prostoru.

$$s(t) = \int_{t_0}^t \sqrt{v_x^2(t') + v_y^2(t') + v_z^2(t')} dt' . \quad (6.28)$$

Uvažujeme-li dva body P a Q ležící na trajektorii, pak těmito body je určena délka oblouku Δs a orientovaná sečna, která je v našem případě dána vektorem $\Delta \mathbf{r}$, který reprezentuje vektor posunutí, viz obr. 6.3. Jestliže se bod Q blíží k bodu P , otáčí se orientovaná sečna kolem bodu P a v limitním případě $Q \rightarrow P$ splývá s tečnou ke trajektorii v bodě P . Popsaná situace je zřejmá z geometrického náhledu 6.3. Odtud je rovněž patrné, že pro infinitezimální časový interval se element délky dráhy limitně blíží k nule, $ds = \Delta s \rightarrow 0$, přičemž platí, že

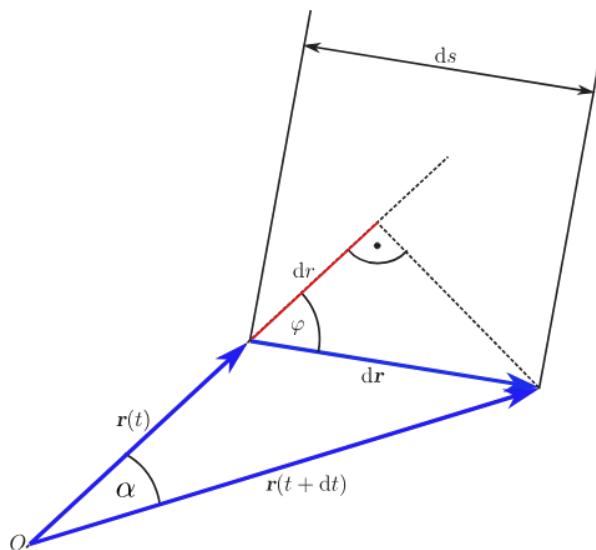
$$|d\mathbf{r}| = ds , \quad (6.29)$$

tedy v limitě délka tětivy $|d\mathbf{r}|$ a délka oblouku ds jsou si rovny.

Na obrázku 6.4 je zachycen rozdíl mezi symboly $d\mathbf{r}$ a $|d\mathbf{r}|$. Vzroste-li čas t o dt , změní se vektor \mathbf{r} o přírůstek $d\mathbf{r}$, který představuje elementární posunutí polohového vektoru \mathbf{r} a nazýváme ho **orientovaný element dráhy (křivky)** a k jeho označení můžeme také použít stejné značky jako pro označení křivky (s nebo někdy l), tj.

$$d\mathbf{r} \equiv ds \equiv d\mathbf{l} . \quad (6.30)$$

Absolutní hodnota vektoru \mathbf{r} se také změní, a to o průmět vektoru $d\mathbf{r}$ do směru



Obrázek 6.4: Rozdíl mezi symbolem $d\mathbf{r}$ a $|d\mathbf{r}|$.

vektoru \mathbf{r} . Přírůstek velikosti vektoru \mathbf{r} je tedy

$$d|\mathbf{r}| \equiv dr = |d\mathbf{r}| \cos \varphi = ds \cos \varphi , \quad (6.31)$$

kde φ je úhel sevřený mezi vektorem \mathbf{r} a jeho přírůstkem $d\mathbf{r}$ (uvažte, že φ je tedy i úhel mezi \mathbf{r} a \mathbf{v}). Protože absolutní hodnotu vektoru \mathbf{r} označujeme symbolem r , má symbol dr význam přírůstku absolutní hodnoty a nikoliv hodnoty přírůstku vektoru, tedy

$$dr \neq |d\mathbf{r}| . \quad (6.32)$$

Z obrázku 6.4 je vidět, že průmět polohového vektoru $\mathbf{r}(t + dt)$ do směru polohového vektoru $\mathbf{r}(t)$ je

$$|\mathbf{r}(t + dt)| \cos \alpha = |\mathbf{r}(t)| + dr . \quad (6.33)$$

Jelikož délka dráhy je funkcí času, můžeme derivaci $d\mathbf{r}/dt$ vyjádřit následujícím způsobem³

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \frac{ds}{dt} . \quad (6.34)$$

Jelikož limitně přechází sečna v tečnu a uvážíme-li, že sečna je orientovaná (viz obr. 6.3), pak dle vztahu (6.29) můžeme psát, že

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \boldsymbol{\tau}(t) , \quad (6.35)$$

kde $\boldsymbol{\tau}(t)$ představuje jednotkový tečný vektor v místě o polohovém vektoru $\mathbf{r}(t)$. Na základě rovností (6.11) a (6.35) můžeme upravit vztah (6.34) do tvaru

$$\mathbf{v}(t) = v(t)\boldsymbol{\tau}(t) = \frac{ds}{dt}\boldsymbol{\tau}(t) , \quad (6.36)$$

kde \mathbf{v} představuje okamžitou rychlost hmotného bodu. Ta má vždy směr tečny ke trajektorii a je orientována souhlasně se směrem daným rostoucím t . Pro velikost rychlosti platí $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$.

Ze vztahu (6.25) můžeme psát, že $d\mathbf{r} = \mathbf{v}dt$, takže následnou integrací dostáváme

$$\mathbf{r}(t) = \int_{t_0}^t \mathbf{v}(t')dt' + \mathbf{r}_0 , \quad (6.37)$$

kde $\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0$.

Odtud pro **přímočarý rovnoměrný pohyb**, tj. $\mathbf{v} = \textit{konst.}$, dostáváme

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{v}(t - t_0) + \mathbf{r}_0 . \quad (6.38)$$

6.3.2 Zrychlení

Zrychlení představuje časovou změnu rychlosti. Rychlost může měnit v průběhu času nejen svoji velikost, ale i orientaci, takže zrychlení souvisí jak s časovou změnou velikosti rychlosti, tak její orientace. Z výše uvedeného vyplývá, že zrychlení je rovněž vektorová veličina. Vektor okamžitého zrychlení definujeme jako

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{v}(t + \Delta t) - \mathbf{v}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}} . \quad (6.39)$$

Pro kartézské souřadnice můžeme psát

$$\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z) = (\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}) , \quad (6.40)$$

resp.

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k} = \ddot{x} \mathbf{i} + \ddot{y} \mathbf{j} + \ddot{z} \mathbf{k} . \quad (6.41)$$

³Na $\mathbf{r}(t)$ pohlížíme jako na složenou funkci $\mathbf{r}(s(t))$.

Ze vztahu (6.39) plyne $d\mathbf{v} = \mathbf{a}dt$, takže

$$\mathbf{v}(t) = \int_{t_0}^t \mathbf{a}(t')dt' + \mathbf{v}_0, \quad (6.42)$$

kde $\mathbf{v}(t_0) = \mathbf{v}_0$.

Jedná-li se o **přímočarý rovnoměrně zrychlený pohyb**, tj. $\mathbf{a} = \textit{konst.}$, pak

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{a}(t - t_0) + \mathbf{v}_0. \quad (6.43)$$

Dosazením vztahu (6.43) do rovnice (6.37) a následné integraci obdržíme

$$\mathbf{r}(t) = \frac{1}{2}\mathbf{a}(t - t_0)^2 + \mathbf{v}_0(t - t_0) + \mathbf{r}_0. \quad (6.44)$$

6.4 Pohyb po kružnici

Pohyb po kružnici představuje velmi častý a v technice důležitý případ křivočarého pohybu. Pro polohový vektor hmotného bodu v tom případě platí

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = r^2 = \textit{konst.} \quad (6.45)$$

Odtud derivací dostaneme

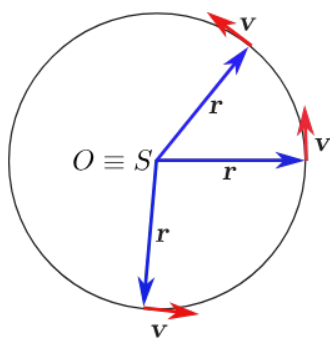
$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \mathbf{r} = \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r} + \mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}} = 0, \quad (6.46)$$

protože $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}$, potom

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (6.47)$$

Vektory \mathbf{r} a \mathbf{v} tedy musí být na sebe kolmé, viz obr. 6.5. Odtud vyplývá, že vektor rychlosti \mathbf{v} má v každém okamžiku směr tečný ke kružnici, tj. $\mathbf{v} = v\boldsymbol{\tau}$.

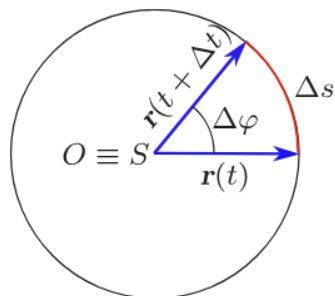
Uvažujme kružnici o poloměru r , po které se pohybuje hmotný bod. Za časový



Obrázek 6.5: Pohyb hmotného bodu po kružnici.

interval Δt urazí hmotný bod dráhu, která odpovídá oblouku $\Delta s = \bar{v}\Delta t$, kde \bar{v} je **průměrná obvodová rychlost**. Tomuto oblouku odpovídá středový úhel $\Delta\varphi$, viz obr. 6.6. Pro středový úhel můžeme psát, že

$$\Delta\varphi = \frac{\Delta s}{r} = \frac{\bar{v}\Delta t}{r}. \quad (6.48)$$



Obrázek 6.6: Změna středového úhlu za čas Δt .

Protože obvodová rychlost je dána průměrnou obvodovou rychlostí \bar{v} během doby Δt , můžeme zavést **průměrnou úhlovou rychlost** $\bar{\omega}$ vztahem

$$\bar{\omega} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} . \quad (6.49)$$

Použijeme-li vztah (6.48), tj. $\Delta\varphi = \Delta s/r$, můžeme průměrnou úhlovou rychlost vyjádřit jako

$$\bar{\omega} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{1}{r} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\bar{v}}{r} . \quad (6.50)$$

Pro **okamžitou úhlovou rychlost** ω můžeme psát

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} , \quad (6.51)$$

pro kterou při použití vztahu (6.48) platí

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{r \Delta t} = \frac{1}{r} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{v}{r} , \quad (6.52)$$

kde v je **okamžitá obvodová rychlost**.

Ze vztahů (6.50) a (6.52) vyplývá

$$\bar{v} = \bar{\omega} r , \quad v = \omega r . \quad (6.53)$$

Je-li obvodová rychlost konstantní, $v = konst.$, tj. jedná-li se o **rovnoměrný pohyb po kružnici**, pak pro oběžnou dobu (**periodu**) T bude platit

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi r}{\omega r} = \frac{2\pi}{\omega} . \quad (6.54)$$

Odtud pak dostáváme

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f , \quad (6.55)$$

kde f je **kmitočet** (**frekvence**) a udává (při rovnoměrném otáčení) počet otáček za jednu sekundu. Jednotkou je Hz (**hertz**) a je roven 1/s. Ze vztahu (6.55) je patrné, že $f = 1/T$.

Periodický pohyb je takový pohyb, který se po uplynutí doby T (periody) opakuje. Platí tedy

$$\mathbf{r}(t + T) = \mathbf{r}(t) \quad \text{pro všechny časy } t . \quad (6.56)$$

V případě, že se jedná o nerovnoměrný pohyb po kružnici, zavádíme **okamžité úhlové zrychlení** ε

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} \equiv \dot{\omega} \equiv \ddot{\varphi} . \quad (6.57)$$

Ze vztahu (6.51) plyne

$$d\varphi = \omega dt \quad (6.58)$$

a odtud

$$\varphi(t) = \int_{t_0}^t \omega(t') dt' + \varphi_0 , \quad (6.59)$$

kde φ_0 je hodnota středového úhlu v čase $t = t_0$, tj. $\varphi(t_0) = \varphi_0$.

V případě, že $\omega = konst.$ (**rovnoměrný pohyb po kružnici**), pak snadno spočteme⁴

$$\varphi(t) = \omega \int_{t_0}^t dt' + \varphi_0 = \omega(t - t_0) + \varphi_0 . \quad (6.60)$$

Podle (6.57) můžeme psát

$$d\omega = \varepsilon dt . \quad (6.61)$$

a integrací dostaneme

$$\omega(t) = \int_{t_0}^t \varepsilon(t') dt' + \omega_0 , \quad (6.62)$$

kde ω_0 je hodnota okamžité úhlové rychlosti v čase $t = t_0$, tj. $\omega(t_0) = \omega_0$. V případě, že se jedná o **rovnoměrně zrychlený** pohyb, tj. $\varepsilon = konst.$, lze snadno (6.62) zintegrovat

$$\omega(t) = \varepsilon \int_{t_0}^t dt' + \omega_0 = \varepsilon(t - t_0) + \omega_0 \quad (6.63)$$

další integrací

$$\varphi(t) = \int_{t_0}^t [\varepsilon(t - t_0) + \omega_0] dt + \varphi_0 = \frac{1}{2} \varepsilon (t - t_0)^2 + \omega_0 (t - t_0) + \varphi_0 . \quad (6.64)$$

Je-li $\varepsilon < 0$, jde o **rovnoměrně zpomalený** pohyb. Při označení $\varepsilon' = -\varepsilon > 0$ a je-li $\varepsilon' = konst.$ platí zřejmě

$$\omega(t) = -\varepsilon'(t - t_0) + \omega_0 , \quad (6.65)$$

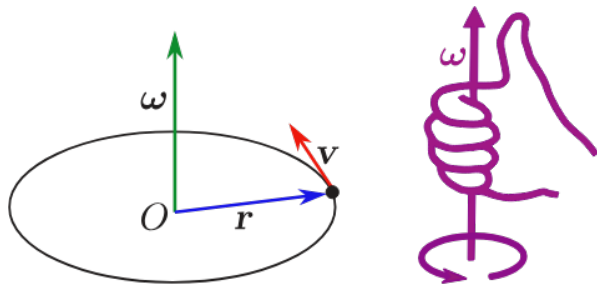
$$\varphi(t) = -\frac{1}{2} \varepsilon' (t - t_0)^2 + \omega_0 (t - t_0) + \varphi_0 . \quad (6.66)$$

Vektor obvodové rychlosti \mathbf{v} je vždy kolmý k ose otáčení a tečný ke kružnici. Z tohoto důvodu je možné určit vektor obvodové rychlosti \mathbf{v} pomocí vektorového součinu, viz obr. 6.7

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} . \quad (6.67)$$

K určení orientace vektoru úhlové rychlosti použijeme **pravidla pravé ruky**: *ukazují-li zahnuté prsty pravé ruky směr pohybu hmotného bodu po kružnici, pak vztyčený palec této ruky ukazuje orientaci vektoru úhlové rychlosti $\boldsymbol{\omega}$.*

⁴Jelikož úhlová rychlost je konstantní, vytkneme ji při integraci před integrál.



Obrázek 6.7: Zavedení vektorových veličin pro popis pohybu hmotného bodu po kružnici.

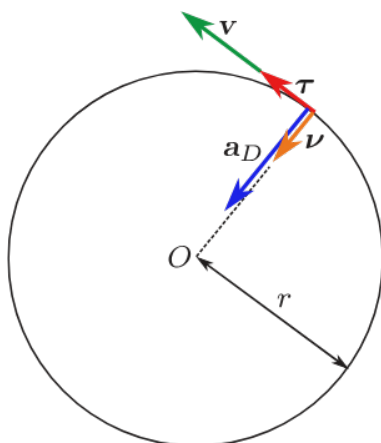
Nechť $\omega = \omega \omega^0$ a jednotkový vektor $\omega^0 = \text{konst.}$, potom když zavedeme úhlové zrychlení jako vektorovou veličinu $\varepsilon = \varepsilon \varepsilon^0$, musí platit, že $\dot{\omega}^0 = \varepsilon^0$ ($\dot{\omega} = \dot{\omega} \omega^0 = \varepsilon \omega^0 = \varepsilon \varepsilon^0 = \varepsilon$). Tedy vektory ω a ε jsou kolmé, tj. mají stejný směr ($\omega \parallel \varepsilon$). Je-li $\varepsilon \uparrow \omega$, pak se jedná o pohyb zrychlený, je-li $\varepsilon \downarrow \omega$, tak se jedná o pohyb zpomalený.

6.4.1 Dostředivé zrychlení při rovnoměrném pohybu hmotného bodu po kružnici

Uvažujme případ rovnoměrného pohybu hmotného bodu po kružnici. Pro něj který platí, že $\omega = \text{konst.}$, a tedy $\dot{\omega} = 0$. Ze vztahu (6.67) dostáváme postupně

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \frac{d(\omega \times \mathbf{r})}{dt} = \underbrace{\dot{\omega}}_{=0} \times \mathbf{r} + \omega \times \dot{\mathbf{r}} = \omega \times \mathbf{v} = \omega \times (\omega \times \mathbf{r}) . \quad (6.68)$$

Tento výraz lze dále upravit podle vektorové identity „BAC-CAB“:



Obrázek 6.8: Dostředivé zrychlení.

$$\omega \times (\omega \times \mathbf{r}) = \omega \underbrace{(\omega \cdot \mathbf{r})}_{=0} - \mathbf{r}(\omega \cdot \omega) = -r\omega^2 , \quad (6.69)$$

protože vektory ω a \mathbf{r} jsou na sebe kolmé. Zavedeme následující označení

$$-\mathbf{r} = -r\mathbf{r}^0 = r\nu , \quad (6.70)$$

kde $\mathbf{r}^0 = \mathbf{r}/r$ a $\boldsymbol{\nu} = -\mathbf{r}^0$ pak značí jednotkový vektor zvaný **vnitřní normálový vektor** (orientovaný ke středu křivosti)⁵. Vektor $\boldsymbol{\nu}$ směřuje do středu kružnice, po které se uvažovaný hmotný bod pohybuje, proto zrychlení (6.68) nazýváme **dostředivé**, viz obr. 6.8. Je tedy dáno vztahem

$$\mathbf{a}_D = \omega^2 r \boldsymbol{\nu} = -\omega^2 \mathbf{r}. \quad (6.71)$$

Pomocí vztahu (6.53) můžeme tento výraz upravit do tvaru

$$\mathbf{a}_D = \frac{v^2}{r} \boldsymbol{\nu}. \quad (6.72)$$

Z původního předpokladu $\boldsymbol{\omega} = \text{konst.}$ a vztahu (6.53) vyplývá, že $|\mathbf{v}| = \text{konst.}$, a tudíž \mathbf{a}_D souvisí pouze s časovou změnou orientace obvodové rychlosti $\mathbf{v}(t) = v\boldsymbol{\tau}(t)$.

6.4.2 Vyjádření normálové a tečné složky zrychlení při pohybu hmotného bodu po kružnici

Derivací rychlosti (6.67) podle času dostaneme zrychlení:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \underbrace{\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}}_{\boldsymbol{\varepsilon}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \underbrace{\frac{d\mathbf{r}}{dt}}_{\mathbf{v}} = \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}. \quad (6.73)$$

Víme, že obvodová rychlost je tečná ke kružnici, tj.

$$\mathbf{v} = v\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \omega \boldsymbol{\omega}^0 \times \mathbf{r}. \quad (6.74)$$

Jelikož $\boldsymbol{\varepsilon} = \dot{\boldsymbol{\omega}}$ a směr vektoru úhlové rychlosti $\boldsymbol{\omega}$ se během pohybu po kružnici nemění, pak musí platit, že $\boldsymbol{\varepsilon} \parallel \boldsymbol{\omega}$, tedy $\boldsymbol{\varepsilon}^0 = \boldsymbol{\omega}^0$. Takže vektor $\boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}$, na základě porovnání s rovností (6.74), musí být také tečný ke kružnici, po které se pohybuje HB. Odtud je zřejmé, že

$$\mathbf{a}_t = \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r} \quad (6.75)$$

představuje tečnou složku zrychlení.

Potom musí platit pro poslední člen rovnosti (6.73), že

$$\mathbf{a}_n = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}, \quad (6.76)$$

kde \mathbf{a}_n je normálová složka zrychlení HB.

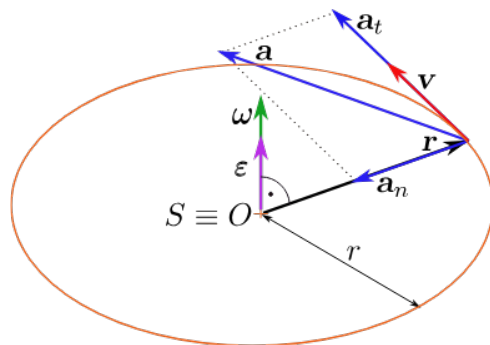
Takže je možné vyjádřit vektor zrychlení \mathbf{a} jako součet dvou na sebe kolmých vektorů \mathbf{a}_n a \mathbf{a}_t (viz obr. 6.9):

$$\mathbf{a} = \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_n. \quad (6.77)$$

Pomocí vztahů (6.67) a (6.70) můžeme psát, že

$$\mathbf{a}_n = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \underbrace{\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r})}_{=0} - \mathbf{r}(\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}) = -r\omega^2 = \omega^2 r \boldsymbol{\nu} = \frac{v^2}{r} \boldsymbol{\nu}. \quad (6.78)$$

⁵Vnější normálový vektor je k němu opačný.



Obrázek 6.9: Rozklad vektoru zrychlení na tečnou a normálovou složku.

Protože $\boldsymbol{\varepsilon} \perp \mathbf{r}$ bude pro velikost tečného vektoru zrychlení platit, že

$$a_t = |\mathbf{a}_t| = \varepsilon r = \frac{d\omega}{dt} r = \frac{d(\omega r)}{dt} = \frac{dv}{dt} . \quad (6.79)$$

Takže platí, že

$$a_t = \frac{dv}{dt} , \quad (6.80)$$

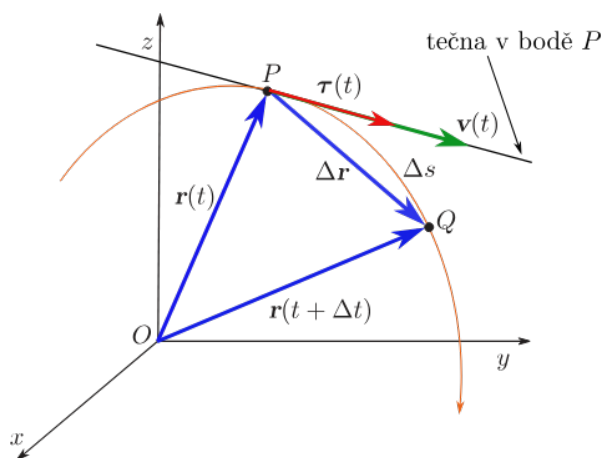
$$\mathbf{a}_t = \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r} = a_t \boldsymbol{\tau} = \frac{dv}{dt} \boldsymbol{\tau} , \quad (6.81)$$

$$a_n = \frac{v^2}{r} , \quad (6.82)$$

$$\mathbf{a}_n = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = a_n \boldsymbol{\nu} = \frac{v^2}{r} \boldsymbol{\nu} . \quad (6.83)$$

Ze vztahů (6.81) a (6.83) vyplývá, že tečné zrychlení \mathbf{a}_t souvisí s časovou změnou velikosti rychlosti hmotného bodu, kdežto zrychlení \mathbf{a}_n souvisí s časovou změnou směru rychlosti uvažovaného hmotného bodu.

6.5 Obecný křivočarý pohyb



Obrázek 6.10: Pohyb hmotného bodu po křivočaré trajektorii.

V případě obecného křivočarého pohybu (pohyb po kružnici je jeho speciálním případem) vyjdeme z obrázku 6.10. Na tomto obrázku je zachycena orientovaná sečna $\overrightarrow{PQ} \equiv \Delta \mathbf{r}$, pro kterou platí, že

$$\overrightarrow{PQ} \equiv \Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t) . \quad (6.84)$$

Jednotkový vektor této orientované sečny je $\Delta \mathbf{r}/|\Delta \mathbf{r}|$, který pro $\Delta t \rightarrow 0$, tedy $Q \rightarrow P$, přejde v orientovanou infinitezimální sečnu $d\mathbf{r}$, která bude ležet na tečně k trajektorii v bodě P a lze ji zapsat jako

$$d\mathbf{r} = |d\mathbf{r}| \boldsymbol{\tau}(t) , \quad (6.85)$$

kde

$$\boldsymbol{\tau}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{|\Delta \mathbf{r}|} \quad (6.86)$$

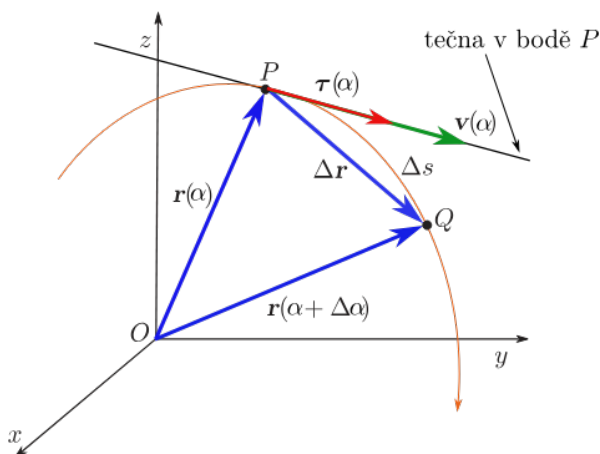
je jednotkový tečný vektor v bodě P .

Již víme, že pro okamžitou rychlost HB platí:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{|\Delta \mathbf{r}|}{\Delta t} \frac{\Delta \mathbf{r}}{|\Delta \mathbf{r}|} \right) = \\ &= \underbrace{\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}}_{\mathbf{v}(t)} = \underbrace{\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{|\Delta \mathbf{r}|}}_{\boldsymbol{\tau}(t)} = |\mathbf{v}(t)| \boldsymbol{\tau}(t) = v(t) \boldsymbol{\tau}(t) = \frac{ds}{dt} \boldsymbol{\tau}(t) . \end{aligned} \quad (6.87)$$

Tedy okamžitá rychlost $\mathbf{v}(t)$ je tečná ke trajektorii v místě, kde se zrovna HB nachází.

Obecně lze trajektorii vyjádřit i pomocí jiného parametru, než je čas, označme takovýto parametr jako α , viz obr. 6.11. Orientovaná sečna je pak dána následujícím



Obrázek 6.11: Pohyb hmotného bodu po křivočaré trajektorii vyjádřený pomocí obecného parametru α .

vztahem:

$$\overrightarrow{PQ} \equiv \Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(\alpha + \Delta \alpha) - \mathbf{r}(\alpha) . \quad (6.88)$$

Obdobně pro jednotkový tečný vektor můžeme psát:

$$\boldsymbol{\tau}(\alpha) = \lim_{\Delta\alpha \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{|\Delta \mathbf{r}|} . \quad (6.89)$$

Dále můžeme derivaci polohového vektoru podle parametru α vyjádřit jako

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}(\alpha)}{d\alpha} &= \lim_{\Delta\alpha \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta\alpha} = \lim_{\Delta\alpha \rightarrow 0} \left(\frac{|\Delta \mathbf{r}|}{\Delta\alpha} \frac{\Delta \mathbf{r}}{|\Delta \mathbf{r}|} \right) = \\ &= \underbrace{\lim_{\Delta\alpha \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta\alpha}}_{d\mathbf{r}(\alpha)/d\alpha} \underbrace{\lim_{\Delta\alpha \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{|\Delta \mathbf{r}|}}_{\boldsymbol{\tau}(\alpha)} = \left| \frac{d\mathbf{r}(\alpha)}{d\alpha} \right| \boldsymbol{\tau}(\alpha) . \end{aligned} \quad (6.90)$$

Tedy

$$\frac{d\mathbf{r}(\alpha)}{d\alpha} = \left| \frac{d\mathbf{r}(\alpha)}{d\alpha} \right| \boldsymbol{\tau}(\alpha) . \quad (6.91)$$

Odtud

$$\boldsymbol{\tau}(\alpha) = \frac{d\mathbf{r}(\alpha)}{d\alpha} / \left| \frac{d\mathbf{r}(\alpha)}{d\alpha} \right| . \quad (6.92)$$

Použijeme-li přirozenou parametrizaci, tj. $\alpha \equiv s$, potom na základě vztahu (6.91) můžeme psát:

$$\frac{d\mathbf{r}(s)}{ds} = \left| \frac{d\mathbf{r}(s)}{ds} \right| \boldsymbol{\tau}(s) = \underbrace{\left| \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right|}_{=1, \text{viz (6.29)}} \boldsymbol{\tau}(s) = \boldsymbol{\tau}(s) \Rightarrow \boldsymbol{\tau}(s) = \frac{d\mathbf{r}(s)}{ds} . \quad (6.93)$$

Z vlastnosti skalárního součinu vyplývá, že

$$\boldsymbol{\tau}(s) \cdot \boldsymbol{\tau}(s) = 1 \quad (6.94)$$

Zderivujeme tuto rovnici podle proměnné s , čímž dostaneme

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}(s)}{ds} \cdot \boldsymbol{\tau}(s) = 0 \Rightarrow \frac{d\boldsymbol{\tau}(s)}{ds} \perp \boldsymbol{\tau}(s) . \quad (6.95)$$

Pomocí vztahu (6.93) můžeme psát, že

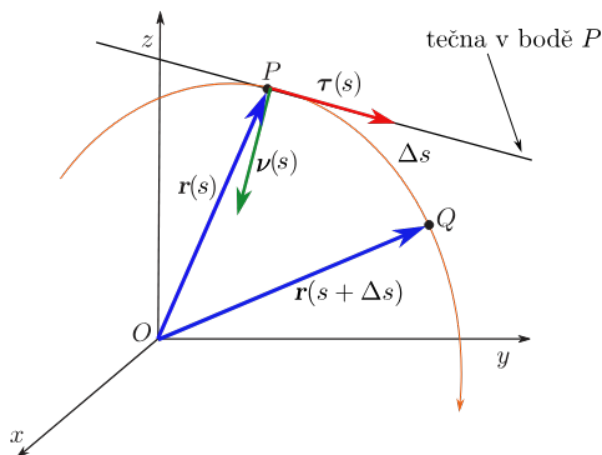
$$\frac{d\boldsymbol{\tau}(s)}{ds} = \frac{d^2 \mathbf{r}(s)}{ds^2} = \kappa(s) \boldsymbol{\nu}(s) , \quad (6.96)$$

kde $\boldsymbol{\nu}(s)$ je jednotkový normálový vektor v daném místě (normálový proto, že $\frac{d\boldsymbol{\tau}(s)}{ds} \perp \boldsymbol{\tau}(s)$) a

$$\kappa(s) = \left| \frac{d\boldsymbol{\tau}(s)}{ds} \right| \quad (6.97)$$

vyjadřuje tzv. **křivost** trajektorie v daném místě. Převrácená hodnota křivosti určuje poloměr **křivosti** trajektorie $R(s)$, tj.

$$R(s) = \frac{1}{\kappa(s)} \Rightarrow \frac{d\boldsymbol{\tau}(s)}{ds} = \frac{d^2 \mathbf{r}(s)}{ds^2} = \frac{\boldsymbol{\nu}(s)}{R(s)} . \quad (6.98)$$



Obrázek 6.12: Trajektorie HB vyjádřená pomocí parametru s .

Na obr. 6.12 je zachycena trajektorie vyjádřená pomocí parametru s , tj. $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$. V okolí bodu P lze pomocí Taylorova rozvoje (budeme uvažovat jen první tři členy, zbývající zanedbáme, protože $\Delta s \ll 1$) aproximovat trajektorii HB jako

$$\mathbf{r}(s + \Delta s) = \mathbf{r}(s) + \left(\frac{d\mathbf{r}}{ds} \right)_s \Delta s + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} \right)_s (\Delta s)^2. \quad (6.99)$$

Pomocí vztahů (6.93) a (6.98) lze Taylorův rozvoj přepsat do následujícího tvaru:

$$\mathbf{r}(s + \Delta s) = \mathbf{r}(s) + \boldsymbol{\tau}(s)\Delta s + \frac{1}{2} \frac{\boldsymbol{\nu}(s)}{R(s)} (\Delta s)^2, \quad (6.100)$$

kde význam jednotlivých vektorů je zachycen na obr. 6.12.

Nyní si vyjádříme pomocí mocninných řad následující goniometrické funkce, přičemž budeme uvažovat jen členy řad v souladu s přesností výše uvedeného Taylorova rozvoje:

$$\sin \left(\frac{\Delta s}{R(s)} \right) = \frac{\Delta s}{R(s)} \Rightarrow \Delta s = R(s) \sin \left(\frac{\Delta s}{R(s)} \right), \quad (6.101)$$

$$\cos \left(\frac{\Delta s}{R(s)} \right) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta s}{R(s)} \right)^2 \Rightarrow \frac{(\Delta s)^2}{2R(s)} = R(s) \left[1 - \cos \left(\frac{\Delta s}{R(s)} \right) \right]. \quad (6.102)$$

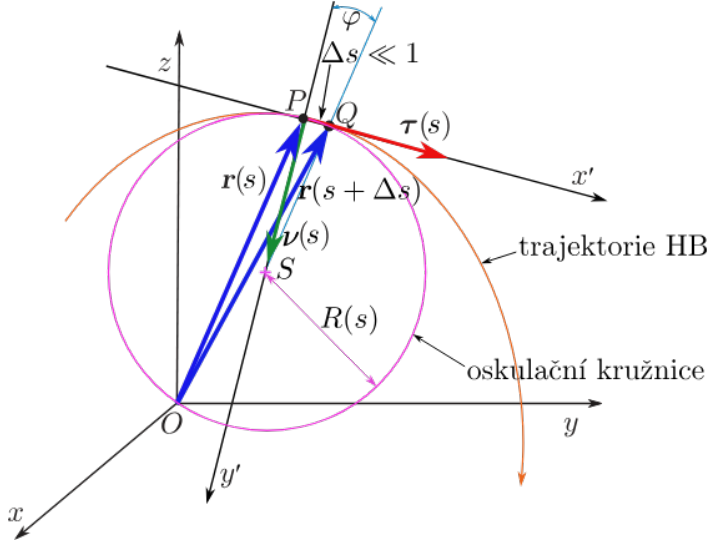
Za Δs a $(\Delta s)^2/(2R(s))$ dosadíme do Taylorova rozvoje (6.100) ze vztahů (6.101) a (6.102):

$$\mathbf{r}(s + \Delta s) = \mathbf{r}(s) + R(s) \sin \left(\frac{\Delta s}{R(s)} \right) \boldsymbol{\tau}(s) + R(s) \left[1 - \cos \left(\frac{\Delta s}{R(s)} \right) \right] \boldsymbol{\nu}(s). \quad (6.103)$$

Vektory $\boldsymbol{\tau}(s)$ a $\boldsymbol{\nu}(s)$ vymezují tzv. **oskulační rovinu**, jejíž součástí je bod P . Jestliže jednotkové vektory $\boldsymbol{\tau}(s)$ a $\boldsymbol{\nu}(s)$ považujeme za souřadnicové vektory rovinné kartézské čárkované souřadnicové soustavy s počátkem v bodě P , tj. $\mathbf{e}'_x = \boldsymbol{\tau}(s)$ a $\mathbf{e}'_y = \boldsymbol{\nu}(s)$, potom poslední dva členy rovnice (6.103),

$$R(s) \sin \left(\frac{\Delta s}{R(s)} \right) \boldsymbol{\tau}(s) + R(s) \left[1 - \cos \left(\frac{\Delta s}{R(s)} \right) \right] \boldsymbol{\nu}(s), \quad (6.104)$$

představují **parametrickou rovnici kružnice** v této soustavě, přičemž střed této kružnice v této čárkované soustavě má souřadnice $S = [0, R(s)]$ a její poloměr je $R(s)$, viz obr. 6.13. Tato kružnice se nazývá **oskulační kružnice**. Nechť oblouk Δs



Obrázek 6.13: Oskulační kružnice.

je vymezen středovým úhlem φ , potom platí, že $\Delta s = R(s)\varphi$. Dosadíme-li takto vyjádřený oblouk do parametrické rovnice kružnice, tak můžeme rovnici oskulační kružnice (6.104) přepsat do následujícího tvaru:

$$\mathbf{r}(\varphi) = R(s) \sin(\varphi) \boldsymbol{\tau}(s) + R(s) [1 - \cos(\varphi)] \boldsymbol{\nu}(s), \quad (6.105)$$

kde parametr s považujeme pro daný bod P za neměnný a $\varphi \in (0; 2\pi)$.

Oskulační kružnici můžeme určit pro **jakýkoliv** bod P ležící na trajektorii HB, přičemž se bude obecně měnit její poloměr a rovněž se bude měnit (stáčet) i oskulační rovina, ve které tato kružnice leží.

Pro $\Delta s \rightarrow 0$ je oskulační kružnice součástí trajektorie HB. Jinými slovy, v každém bodě trajektorie můžeme velmi malý úsek křivky přibližně nahradit obloukem kružnice o jistém poloměru. Zmenšováním délky tohoto úseku křivky nahrazuje kruhový oblouk úsek křivky přesněji. V limitním případě, tj. v případě nekonečně malé délky úseku křivky, existuje právě jedna kružnice, jejíž oblouk nekonečně malé délky kopíruje přesně zakřivení trajektorie v daném bodě P .

Poznamenejme, že poloměr křivosti přímky je nekonečně velký.

Vraťme se ke vztahu (6.39), do kterého dosadíme za vektor rychlosti ze vztahu (6.36), čímž dostaneme

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d(v\boldsymbol{\tau})}{dt} = \frac{dv}{dt}\boldsymbol{\tau} + v\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt}. \quad (6.106)$$

Derivaci

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt}$$

upravíme jako derivaci složené funkce $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}(s(t))$, tj.

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} \frac{ds}{dt}.$$

Dosazením za derivaci ve vztahu (6.106) dostáváme, že

$$\mathbf{a} = \underbrace{\frac{dv}{dt}}_{a_t} \boldsymbol{\tau} + v \underbrace{\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} \frac{ds}{dt}}_v . \quad (6.107)$$

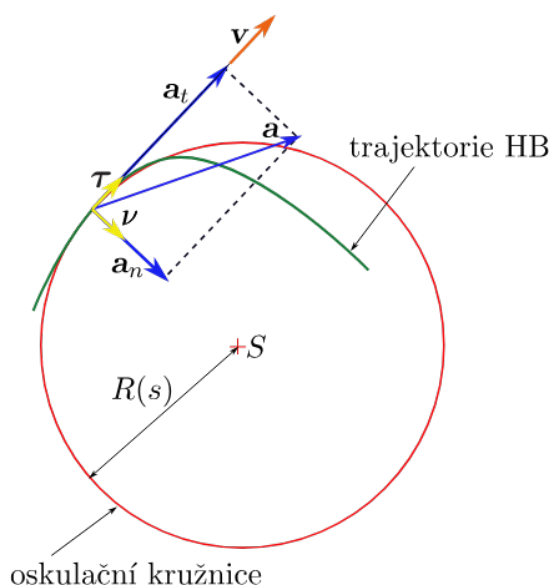
Rovnici (6.107) můžeme dále upravit s ohledem na vztah (6.98):

$$\mathbf{a} = \underbrace{a_t \boldsymbol{\tau}}_{\mathbf{a}_t} + \underbrace{\frac{v^2}{R} \boldsymbol{\nu}}_{\mathbf{a}_n} . \quad (6.108)$$

Vektor zrychlení, viz obr. 6.14, je tedy součtem dvou vektorů, vektoru tečného zrychlení $\mathbf{a}_t = a_t \boldsymbol{\tau}$, a to vektoru normálového zrychlení $\mathbf{a}_n = a_n \boldsymbol{\nu}$, tj.

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_n . \quad (6.109)$$

Tečné zrychlení \mathbf{a}_t souvisí s časovou změnou velikosti rychlosti hmotného bodu, kdežto normálové zrychlení \mathbf{a}_n souvisí s časovou změnou orientace rychlosti.



Obrázek 6.14: Normálové a tečné zrychlení.

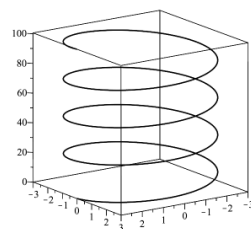
Příklad 6.5.1

Uvažujme trajektorii parametricky určenou takto:

$$x = a \cos(qt) , \quad y = b \sin(qt) , \quad z = ct , \quad (6.110)$$

kde rozměrové konstanty jsou rovny: $a = 3 \text{ m}$, $b = 3 \text{ m}$, $c = 4 \text{ ms}^{-1}$, $q = 1 \text{ s}^{-1}$.

Určete polohový vektor, okamžitou rychlost, normálovou a tečnou složku okamžitého zrychlení, poloměr křivosti.



Řešení:

Polohový vektor má pak následující tvar

$$\mathbf{r}(t) = 3 \cos(t) \mathbf{i} + 3 \sin(t) \mathbf{j} + 4t \mathbf{k} . \quad (6.111)$$

Ze vztahu (9.3) dostaneme vektor rychlosti (6.25)

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = -3 \sin(t) \mathbf{i} + 3 \cos(t) \mathbf{j} + 4 \mathbf{k} . \quad (6.112)$$

$$v = \frac{ds}{dt} = \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| = \sqrt{\frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}} = \sqrt{[-3 \sin(t)]^2 + [3 \cos(t)]^2 + 4^2} = 5 \text{ ms}^{-1} . \quad (6.113)$$

Na základě vztahu (6.36) můžeme pro jednotkový tečný vektor $\boldsymbol{\tau}$ psát

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{\mathbf{v}}{v} = \frac{\frac{d\mathbf{r}}{dt}}{\frac{ds}{dt}} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = -\frac{3}{5} \sin(t) \mathbf{i} + \frac{3}{5} \cos(t) \mathbf{j} + \frac{4}{5} \mathbf{k} . \quad (6.114)$$

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt} = \frac{d}{dt} \left[-\frac{3}{5} \sin(t) \mathbf{i} + \frac{3}{5} \cos(t) \mathbf{j} + \frac{4}{5} \mathbf{k} \right] = -\frac{3}{5} \cos(t) \mathbf{i} - \frac{3}{5} \sin(t) \mathbf{j} . \quad (6.115)$$

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = \frac{\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt}}{\frac{ds}{dt}} = -\frac{3}{25} \cos(t) \mathbf{i} - \frac{3}{25} \sin(t) \mathbf{j} . \quad (6.116)$$

Protože

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = \kappa \boldsymbol{\nu}$$

odtud pro křivost

$$\kappa = \left| \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} \right| = \sqrt{\left(-\frac{3}{25} \cos(t) \right)^2 + \left(\frac{3}{25} \sin(t) \right)^2} = \frac{3}{25} \text{ m}^{-1} .$$

Jelikož pro poloměr křivosti platí, že $R = 1/\kappa$, pak dostáváme, že

$$R = \frac{1}{\kappa} = \frac{25}{3} \text{ m} .$$

Ze vztahu (6.96) plyne, že

$$\boldsymbol{\nu} = \frac{1}{\kappa} \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = -\cos(t) \mathbf{i} - \sin(t) \mathbf{j} .$$

Pro tečné zrychlení dostáváme

$$\mathbf{a}_t = \frac{dv}{dt} \boldsymbol{\tau} = 0 \left(-\frac{3}{5} \sin(t) \mathbf{i} + \frac{3}{5} \cos(t) \mathbf{j} + \frac{4}{5} \mathbf{k} \right) = \mathbf{0} .$$

Pro normálové zrychlení dostáváme

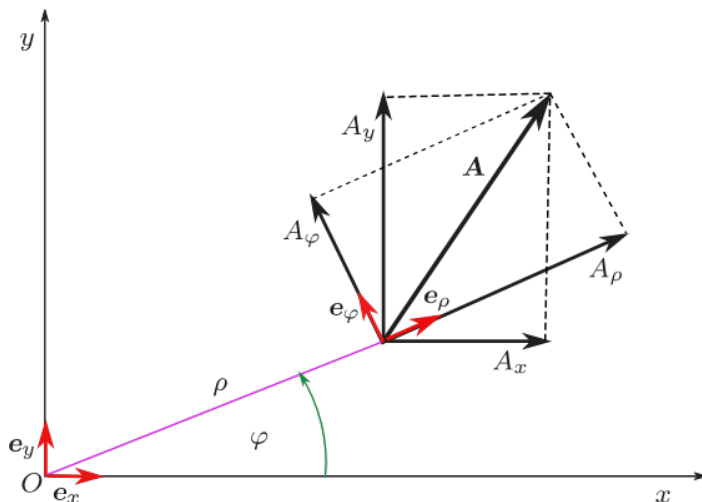
$$\mathbf{a}_n = \frac{v^2}{R} \boldsymbol{\nu} = \frac{5^2}{\frac{25}{3}} (-\cos(t) \mathbf{i} - \sin(t) \mathbf{j}) = -3 \cos(t) \mathbf{i} - 3 \sin(t) \mathbf{j} .$$

Pak

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_n = \mathbf{0} - 3 \cos(t) \mathbf{i} - 3 \sin(t) \mathbf{j} = -3 \cos(t) \mathbf{i} - 3 \sin(t) \mathbf{j} .$$

6.5.1 Popis rovinného pohybu v polárních souřadnicích

Ve dvourozměrných případech je často vhodnější popisovat rovinný křivočarý pohyb v polárních souřadnicích. Na obrázku 6.15 je zachycen obecný vektor spolu s jeho složkami jak v kartézských, tak polárních souřadnicích. Pro obecný vektor



Obrázek 6.15: Obecný vektor v polárních souřadnicích.

\mathbf{A} platí, že se nezmění volbou souřadnicové soustavy:

$$\mathbf{A} = A_\rho \mathbf{e}_\rho + A_\varphi \mathbf{e}_\varphi, \quad \mathbf{A} = A_x \mathbf{e}_x + A_y \mathbf{e}_y. \quad (6.117)$$

Z obr. 6.15 je vidět, že souřadnicové vektory \mathbf{e}_ρ a \mathbf{e}_φ jsou pootočený vůči souřadnicovým vektorům \mathbf{e}_x a \mathbf{e}_y o úhel φ . Takže pro vyjádření vztahu mezi kartézskými a polárními složkami vektoru \mathbf{A} můžeme použít transformačních vztahů pro pootočené kartézské souřadnicové soustavy (4.47) a (4.48), kde ztotožníme $A'_x \equiv A_\rho$ a $A'_y \equiv A_\varphi$, takže můžeme přímo psát:

$$A_x = A_\rho \cos \varphi - A_\varphi \sin \varphi, \quad (6.118)$$

$$A_y = A_\rho \sin \varphi + A_\varphi \cos \varphi. \quad (6.119)$$

Rovnosti (6.118) a (6.119) ukazují, jaký je vztah mezi kartézskými a polárními složkami obecného vektoru (geometrického modelu) \mathbf{A} .

Připomeňme, že mezi kartézskými a polárními souřadnicemi platí následující transformační vztahy

$$x = \rho \cos \varphi, \quad (6.120)$$

$$y = \rho \sin \varphi. \quad (6.121)$$

Přístupme k odvození složek vektoru rychlosti \mathbf{v} v polárních souřadnicích, přičemž je nutné si uvědomit, že polární souřadnice jsou funkcemi času, tj. $\rho = \rho(t)$ a $\varphi = \varphi(t)$

$$v_x = \dot{x} = \dot{\rho} \cos \varphi - \rho \dot{\varphi} \sin \varphi, \quad (6.122)$$

$$v_y = \dot{y} = \dot{\rho} \sin \varphi + \rho \dot{\varphi} \cos \varphi. \quad (6.123)$$

Porovnáním rovnosti (6.122) s výrazem (6.118), resp. (6.123) s výrazem (6.119) pro složky rychlosti v polárních souřadnicích dostaneme

$$v_\rho = \dot{\rho}, \quad v_\varphi = \rho\dot{\varphi}, \quad (6.124)$$

takže pro vektor rychlosti můžeme psát

$$\mathbf{v} = \dot{\rho}\mathbf{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi. \quad (6.125)$$

Podobně můžeme postupovat při odvození složek v polárních souřadnicích pro vektor zrychlení \mathbf{a} , pro který platí⁶

$$a_x = \ddot{x} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2) \cos \varphi - (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi}) \sin \varphi. \quad (6.126)$$

Porovnáním výrazu (6.126) s výrazem (6.118) dostaneme, že

$$a_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2, \quad a_\varphi = \rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi}, \quad (6.127)$$

takže pro vektor zrychlení můžeme psát

$$\mathbf{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\mathbf{e}_\rho + (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi})\mathbf{e}_\varphi. \quad (6.128)$$

Například pro pohyb HB po kružnici o poloměru r položíme $\rho = r = konst.$, pak můžeme na základě výše uvedených vztahů psát

$$v_\rho = \dot{r} = 0, \quad v_\varphi = r\dot{\varphi} = r\omega, \quad a_\rho = -r\dot{\varphi}^2 = -r\omega^2, \\ a_\varphi = r\ddot{\varphi} = r\varepsilon, \quad \mathbf{e}_\varphi = \boldsymbol{\tau}, \quad \mathbf{e}_\rho = -\boldsymbol{\nu}, \quad (6.129)$$

kde v_φ odpovídá velikosti okamžité obvodové rychlosti v , tj. $v_\varphi \equiv v$, uvážíme-li, že $v = r\omega$, potom platí

$$\mathbf{a}_\rho = a_\rho\mathbf{e}_\rho = -a_\rho\boldsymbol{\nu} = r\omega^2\boldsymbol{\nu} = \frac{v^2}{r}\boldsymbol{\nu}. \quad (6.130)$$

Srovnáme-li výraz (6.130) s výrazem (6.72), tak je zřejmé, že vektor \mathbf{a}_ρ reprezentuje dostředivé zrychlení, tj. $\mathbf{a}_\rho \equiv \mathbf{a}_D$.

Jedná-li se o kruhový pohyb rovnoměrný ($\omega = konst.$, $\varepsilon = 0$), potom platí

$$v_\rho = \dot{r} = 0, \quad v_\varphi = r\dot{\varphi} = r\omega, \quad a_\rho = -r\dot{\varphi}^2 = -r\omega^2, \quad a_\varphi = 0. \quad (6.131)$$

6.6 Skládání a rozkládání pohybu. Pohyb v homogenním tíhovém poli

Koná-li hmotný bod několik pohybů současně, pak výsledný pohyb získáme tak, že všechny pohyby složíme, a to v libovolném pořadí. Naopak složený pohyb můžeme rozložit do jednodušších pohybů a ty vyšetřovat zvlášť.

S výhodou využíváme výše zmíněné možnosti rozkládat složitější pohyb do pohybů jednodušších, např. při vyšetřování pohybů v homogenním tíhovém poli Země⁷.

⁶Zderivujeme podle času výraz (6.122).

⁷Neuvážujeme odpor prostředí.

Má-li hmotný bod nenulovou počáteční rychlost, pak takovýto pohyb nazýváme **vrhem**, v případě nulové počáteční rychlosti pak **volným pádem**.

Jelikož se všechna tělesa v tíhovém poli Země pohybují se stejným zrychlením $\mathbf{a} = \mathbf{g}$, budou pro ně platit následující vztahy, viz (6.43), (6.44)

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 + \mathbf{g}(t - t_0) , \quad (6.132)$$

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\mathbf{g}(t - t_0)^2 , \quad (6.133)$$

kde \mathbf{r}_0 je počáteční polohový vektor hmotného bodu a \mathbf{v}_0 je jeho počáteční rychlost.

Jak vrhy, tak volný pád budeme považovat za rovinné pohyby, tj. za pohyby jejichž trajektorie jsou rovinnými křivkami. Pro vyšetřování těchto pohybů si zvolíme rovinu (x, y) . Příslušné vektorové veličiny můžeme zapsat jako⁸

$$\mathbf{v}(t) = (v_x, v_y) , \quad \mathbf{v}_0 = (v_{x0}, v_{y0}) , \quad \mathbf{r}(t) = (x, y) , \quad \mathbf{r}_0 = (x_0, y_0) , \quad \mathbf{g} = (0, -g) . \quad (6.134)$$

Pohyb hmotného bodu rozložíme na pohyb vodorovný (podél osy x) a pohyb svislý (podél osy y), takže rovnice (6.132) a (6.133) budou mít pro uvažované složky vektorů (6.134) následující tvar

$$v_x(t) = v_{x0} , \quad (6.135)$$

$$v_y(t) = v_{y0} - g(t - t_0) , \quad (6.136)$$

$$x(t) = x_0 + v_{x0}(t - t_0) , \quad (6.137)$$

$$y(t) = y_0 + v_{y0}(t - t_0) - \frac{1}{2}g(t - t_0)^2 . \quad (6.138)$$

Příklad 6.6.1

Nechť je hmotný bod vržen počáteční rychlostí \mathbf{v}_0 , svírající s osou x úhel α (nazývá **elevační**), viz obr. 6.16.

Řešení:

Počáteční hodnoty jsou

$$t_0 = 0 ; \quad x_0 = 0 , \quad y_0 = 0 , \quad v_{x0} = v_0 \cos \alpha , \quad v_{y0} = v_0 \sin \alpha . \quad (6.139)$$

Pro rovnice (6.135) - (6.138) s ohledem na počáteční podmínky (6.139) dostáváme

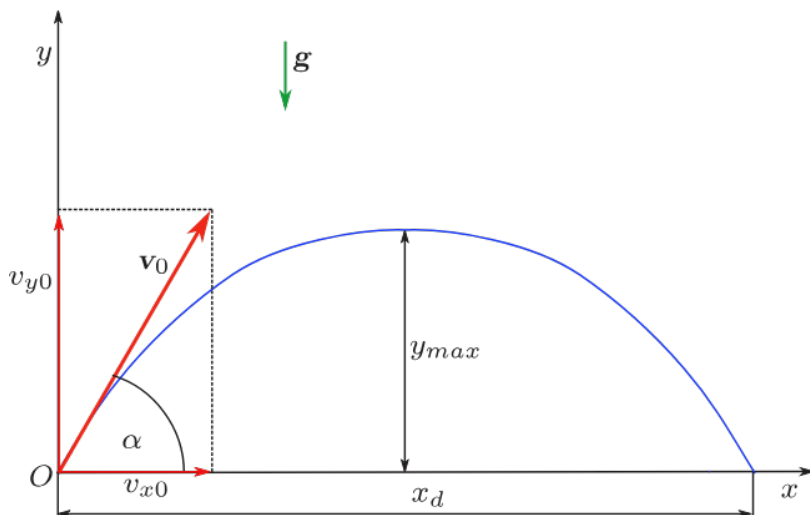
$$v_x(t) = v_0 \cos \alpha , \quad (6.140)$$

$$v_y(t) = v_0 \sin \alpha - gt , \quad (6.141)$$

$$x(t) = v_0 t \cos \alpha , \quad (6.142)$$

$$y(t) = v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2}gt^2 . \quad (6.143)$$

⁸Uvažujeme, že směr tíhového pole je opačný než orientace osy y . Pro velikost tíhového zrychlení zvolíme hodnotu $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$.



Obrázek 6.16: Vrh šikmý vzhůru.

V určitý časový okamžik t_v dosáhne vržený hmotný bod maximální výšky y_{max} . V tomto časovém okamžiku přestává hmotný bod stoupat, tj. rychlost $v_y(t_v) = 0$, takže z rovnice (6.141) dostaneme

$$t_v = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}. \quad (6.144)$$

Protože hmotný bod bude z maximální výšky, které dosáhne, klesat po stejnou dobu, jakou stoupal, bude časový okamžik dopadu (doba pohybu) roven

$$t_d = 2t_v = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}. \quad (6.145)$$

Dosazením času t_v do vztahu (6.143) dostaneme maximální výšku výstupu

$$y_{max} = v_0 t_v \sin \alpha - \frac{1}{2} g t_v^2 = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} \quad (6.146)$$

a dosazením času t_d do vztahu (6.142) dostaneme vzdálenost, kam vržený hmotný bod doletí

$$x_d = v_0 t_d \cos \alpha = \frac{2v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}. \quad (6.147)$$

Vyloučením času t z rovnic (6.142) a (6.143) dostaneme rovnici trajektorie uvažovaného hmotného bodu. Pro tento účel vyjádříme čas z rovnice (6.142), tedy

$$t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha}. \quad (6.148)$$

Tento čas dosadíme do rovnice (6.143), takže po úpravě dostaneme

$$y = x \tan \alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2. \quad (6.149)$$

Rovnice trajektorie (**balistická křivka**) hmotného bodu (6.149) představuje rovnici **paraboly**.

Kapitola 7

Dynamika hmotného bodu

Newtonovská mechanika vychází ze tří základních navzájem nezávislých pohybových zákonů (axiomů): **Zákon setrvačnosti**, **Zákon síly** a **Zákon akce a reakce**. Uvedeme si znění těchto tří zákonů v současném pojetí¹ spolu s jejich matematickým vyjádřením:

Zákon setrvačnosti

Těleso setrvává v klidu nebo rovnoměrném přímočarém pohybu, dokud není přinuceno svůj pohybový stav změnit působením vnějších sil.

$$\mathbf{F} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{v} = \text{konst.}$$

Zákon síly

Časová změna hybnosti tělesa se rovná síle, která na něj působí.

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}.$$

Zákon akce a reakce

Jestliže dvě tělesa 1,2 na sebe vzájemně působí silami, pak jsou tyto síly stejně velké, ale opačně orientované, leží na společné silové přímce a v každém okamžiku platí:

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}.$$

Tradičně se jedna ze sil (libovolná) nazývá **akce**, druhá **reakce**.

Zákon setrvačnosti nám říká, že setrvačnost (vlastnost setrvávat ve svém pohybovém stavu) představuje jednu ze základních vlastností tělesa. Dále definuje základní pohybový stav tělesa a příčinu změny pohybového stavu (tj. změnu vektoru rychlosti) tělesa, která se nazývá (vnější) síla. Jinými slovy můžeme říct, že uvažované těleso mění svůj pohybový stav pouze interakcí (vzájemným působením) s okolními objekty, přičemž kvantitativně tuto interakci popisujeme pomocí fyzikální veličiny, kterou nazýváme **síla**.

¹Moderním tvarem je míněno, že se nejedná o doslovný překlad zákonů, jak je Newton publikoval ve svých Principích.

Jestliže na těleso nepodrobené vazbám (není omezeno v pohybu) nepůsobí síla, nebo na ně působí více sil, které mají nulovou výslednici, nazýváme takové těleso **volným tělesem** a jeho pohyb **setrvačným** (stejným způsobem je možné definovat volný hmotný bod).

Newtonova formulace zákona setrvačnosti platí přesně vzato jen pro hmotný bod, popř. hmotný střed tělesa, tj. zmiňuje jen pohyb translační (posuvný). Uvedená formulace zákona se nezmiňuje o rotačním (otáčivém) pohybu. Aby formulace zákona byla úplná, je nutné ji doplnit o tvrzení, že **se zachovává i velikost a směr rychlosti otáčení**. Vzhledem k tomu, že se v rámci této kapitoly věnujeme dynamice hmotného bodu, můžeme se s Newtonovou formulací spokojit.

Z rozboru zákona setrvačnosti vyplývá otázka ohledně vztažné soustavy, vůči které se určuje stav klidu nebo pohybu. Zákon setrvačnosti platí ve vztažné soustavě, v níž se těleso, na které nepůsobí žádné síly (volné těleso), nachází v klidu nebo rovnoměrném přímočarém pohybu, neboli platí v souřadnicové soustavě, v níž platí. Odtud vyplývá existenční význam zákona setrvačnosti, který může být přeformulován do následujícího moderního znění:

Existuje vztažná soustava, v níž se volné těleso pohybuje beze změny rychlosti. Takováto soustava se nazývá **inerciální vztažná soustava**.

Je-li jedna vztažná soustava inerciální, jsou inerciální všechny vztažné soustavy, které jsou vůči ní v klidu nebo se pohybují rovnoměrně přímočaře.

Díky tomu, že první pohybový zákon vlastně představuje teorém o existenci inerciální vztažné soustavy, nelze tento zákon považovat za důsledek druhého pohybového zákona, ve kterém položíme $\mathbf{F} = \mathbf{0}$.

K určení vztažné soustavy potřebujeme **tři** hmotné body, které **neleží** na stejné přímce. V případě, že tyto tři hmotné body budou volné², potom zřejmě soustava, která se k nim bude vztahovat, bude inerciální vztažnou soustavou. Bohužel, žádnou inerciální vztažnou soustavu neznáme, a tak se musíme spokojit se soustavami, které můžeme pokládat za přibližně inerciální. Protože všechny známé interakce těles slábnou s jejich vzájemnou vzdáleností, považují se za téměř volné hmotné body objekty, které jsou od sebe velmi hodně vzdáleny³. Za velmi vzdálené objekty můžeme považovat např. stálice naší galaxie, jejichž průměrná vzdálenost činí $\sim 10^{13}$ km. Tyto stálice můžeme s vysokou přesností považovat za volné hmotné body. Souřadnicovou soustavu, která má počátek ve středu hmotnosti naší sluneční soustavy a její dvě osy směřují ke stálicím, pokládáme za téměř inerciální a nazýváme ji **Galileiho soustavou**. Často lze přijmout s dostačující přesností za inerciální i soustavu pevně spojenou se Zemí. Tuto soustavu nazýváme **laboratorní soustavou**.

V Newtonových pohybových zákonech vystupuje síla jako základní pojem, který však těmito zákony nemůže být definován. Proto je potřeba definovat sílu nezávisle zákonem silového působení (interakce) mezi hmotnými body (tělesy). Hybnost \mathbf{p} definoval Newton jako součin hmotnosti m a okamžité rychlosti tělesa

²Volný hmotný bod je hmotný bod, na který nepůsobí vnější síly a který není podroben vazbám (není omezen ve svém pohybu).

³Tyto objekty pak s ohledem na jejich vzdálenost můžeme považovat za hmotné body.

\mathbf{v} , tj. $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$. Potom na základě zákona síly můžeme psát, že

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = \mathbf{F}. \quad (7.1)$$

Jelikož v klasické mechanice považujeme hmotnost m za nezávislou na pohybovém stavu tělesa⁴ ($m = konst.$), můžeme rovnost (7.1) upravit do následujícího tvaru:

$$\mathbf{F} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = m\mathbf{a}. \quad (7.2)$$

Ze vztahu (7.2) je patrné, že síla je příčinou zrychlení (zrychleného pohybu) uvažovaného tělesa a má s ním stejný směr. To nám dovoluje přeformulovat zákon síly následujícím způsobem:

Zrychlení je přímo úměrné působící síle, má s ní stejný směr a je nepřímo úměrné hmotnosti tělesa.

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m}. \quad (7.3)$$

Protože hmotnost $m = konst.$, pak poměr $m = |\mathbf{F}|/|\mathbf{a}| = F/a = konst.$, tedy poměr velikosti síly a velikosti zrychlení je konstantní.

Pro úplné vybudování mechaniky je třeba přidat ještě axiom (zákon) o nezávislosti silového působení neboli princip superpozice:

Působí-li na hmotný bod (těleso) současně více sil, je výsledné zrychlení rovno vektorovému součtu zrychlení, udělovaných hmotnému bodu (tělesu) jednotlivými silami,

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m} = \frac{\sum_i \mathbf{F}_i}{m} = \sum_i \frac{\mathbf{F}_i}{m} = \sum_i \mathbf{a}_i. \quad (7.4)$$

Hmotnost tělesa budeme chápat jako skalární fyzikální veličinu, jejíž hodnota vyjadřuje míru odporu („neochoty“) tohoto tělesa ke změně svého pohybového stavu. Takže čím je větší hmotnost tělesa, tím klade větší odpor ke změně svého pohybového stavu. Odtud vyplývá, že chceme-li zajistit dané zrychlení (změnu pohybového stavu) tělesa, pak u těles o velké hmotnosti bude k tomuto zapotřebí větší síly, než by tomu bylo u tělesa s hmotností menší. Jinými slovy můžeme říci, že hmotnost je mírou setrvačných vlastností tělesa. Každé těleso, na které působíme silou, potřebuje určitý čas, než změní svou rychlost o danou hodnotu. Působíme-li silou dlouhou dobu, pak těleso „ochotně“ změní svou rychlost i vlivem malé síly. Chceme-li docílit změny rychlosti v krátkém čase, „brání se“ těleso této změně ohromnou silou. Tuto skutečnost je možné demonstrovat tak, že těžké těleso, k němuž je připevněn provázek, položíme na hladkou vodorovnou podložku. Trneme-li prudce provázkem, provázek se přetrhne. Táhneme-li provázek malou silou, těleso tím uvedeme do pohybu, aniž by se provázek přetrhl.

Hmotnost, která je mírou setrvačných vlastností tělesa, budeme nazývat **setrvačnou hmotností** a značíme ji⁵ m_s . Setrvačnou hmotnost určíme například tak, že

⁴Hmotnost se nemění s časem, tedy je nezávislá na čase.

⁵V předchozím textu značíme hmotnost standardně m , i když s ohledem na tento text by měla být značena m_s .

jak na referenční, tak na měřené těleso budeme definovaným způsobem působit stejnou silou. Referenční těleso se bude pohybovat se zrychlením a_0 , kdežto měřené těleso se zrychlením a_X . Označíme-li setrvačnou hmotnost referenčního tělesa m_{s0} a měřenou setrvačnou hmotnost tělesa m_{sX} , potom z důvodu působení stejné síly na obě tělesa můžeme ze vztahu (7.3) psát, že

$$m_{s0}a_0 = m_{sX}a_X . \quad (7.5)$$

Odtud pak určíme setrvačnou hmotnost tělesa jako

$$m_{sX} = \frac{a_0}{a_X} m_{s0} . \quad (7.6)$$

Ze vztahu (7.6) je vidět, že setrvačnou hmotnost určíme měřením zrychlení.

Důležitou experimentální skutečností je, že zrychlení při volném pádu těles je pro všechna tělesa v daném místě stejné. Toto zrychlení zpravidla značíme \mathbf{g} a nazýváme ho **tíhovým zrychlením**. Obecně při každém pohybu v okolí Země bude na těleso působit **tíhová síla**, kterou nazýváme **tíhou** (dříve se říkalo **vahou**) a budeme ji označovat symbolem \mathbf{G} . Pro tíhu (tíhovou sílu) můžeme tedy psát:

$$\mathbf{G} = m_t \mathbf{g} , \quad (7.7)$$

kde m_t je **tíhová hmotnost**.

Tíhovou hmotnost lze stanovit poměrem velikostí tíhových sil působících na referenční těleso (G_0) a na těleso, pro kterého tíhovou hmotnost chceme určit (G_X)

$$m_{tX} = m_{t0} \frac{G_X}{G_0} , \quad (7.8)$$

kde m_{t0} je tíhová hmotnost referenčního tělesa.

Tíhovou hmotnost však běžně určujeme vážením, např. pomocí rovnoramenné váhy, na jejíž jednu miskou položíme těleso, které chceme vážít, a na druhou miskou klademe referenční tělíska (závaží) známých hmotností. Jakmile dosáhneme rovnováhy, jsou tíhové hmotnosti misek vyrovnány a známe tím i tíhovou hmotnost tělesa m_t .

Rovnost tíhových hmotností dvou různých těles určíme tedy vážením. Rovnost dvou setrvačných hmotností se projevuje tím, že stejně velké síly jim udělují stejné velké zrychlení. Otázkou je, zda dvě tělesa, jedno např. olověné a druhé železné, která mají stejnou tíhovou hmotnost, budou mít stejné i hmotnosti setrvačné, tj. při působení stejných sil by nabývaly stejných zrychlení. Experimentálně bylo ukázáno (s velmi vysokou přesností), že různá tělesa o stejných tíhových hmotnostech, mají i stejné setrvačné hmotnosti. Takže byla zjištěna skutečnost, že z rovnosti tíhových hmotností plyne rovnost jejich hmotností setrvačných a naopak, tedy

$$m_{t1} = m_{t2} \Leftrightarrow m_{s1} = m_{s2} . \quad (7.9)$$

Vydělíme-li první rovnici rovnicí druhou, dostaneme:

$$\frac{m_{s1}}{m_{t1}} = \frac{m_{s2}}{m_{t2}} . \quad (7.10)$$

Poměr hmotnosti tíhové a setrvačné téhož tělesa je pro všechna tělesa stejný. Závisí jen na volbě jednotek, v nichž tíhovou a setrvačnou hmotnost měříme. Měříme-li



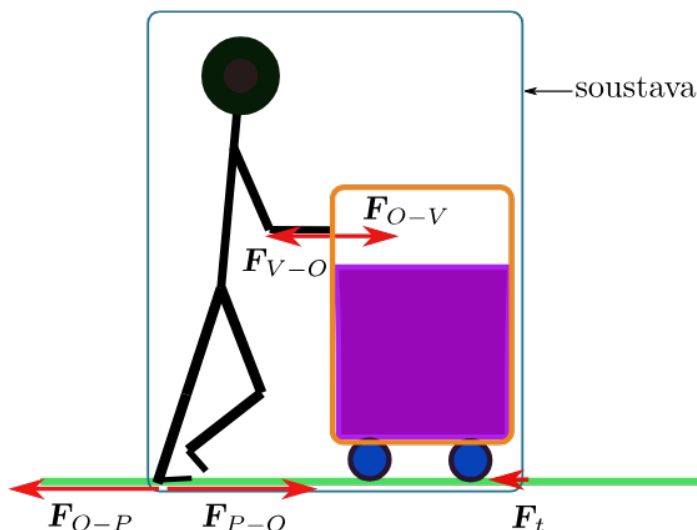
obě hmotnosti ve stejných jednotkách, je tento poměr roven jedné⁶. Pak hmotnost setrvačná každého tělesa je rovna jeho hmotnosti tíhové. Tento zajímavý výsledek je z hlediska Newtonovy mechaniky experimentální skutečností, avšak v Einsteinově teorii gravitace představuje základní princip, podle kterého tíhové a setrvačné vlastnosti jsou projevem jedné a téže fyzikální veličiny - hmotnosti. V dnešní době má tedy otázka existence jakoby dvou různých fyzikálních veličin - hmotnosti setrvačné a hmotnosti tíhové - jen historický význam. V dalším textu budeme proto hovořit jen o hmotnosti a značit ji budeme m .

Hmotnost udáváme v kilogramech, jejichž zkratkou je **kg**. Jelikož síla představuje významnou fyzikální veličinu, tak má i svoji jednotku a tou je **newton**, jehož zkratkou je **N**, $N = \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$. Ze vztahu (7.3) přímo vyplývá, že těleso má hmotnost 1 kg, když mu síla 1 N uděljuje zrychlení $1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Je třeba zdůraznit, že 1. a 2. pohybový zákon platí pouze v inerciální vztažné soustavě. Platnost třetího pohybového zákona však není vázána pouze na inerciální vztažné soustavy. Třetí pohybový zákon umožňuje přechod od dynamiky hmotného bodu k dynamice soustavy hmotných bodů. Z třetího pohybového zákona vyplývá, že součet sil akce a reakce je vždy roven nulovému vektoru. Je však nutné si uvědomit, že tyto síly působí na různá tělesa: \mathbf{F}_{12} označuje sílu, kterou působí první těleso na těleso druhé a \mathbf{F}_{21} je síla, kterou působí druhé těleso na těleso první, a nelze je proto sečíst. Skládat lze totiž jen síly působící na **stejně těleso**.

Příklad 7.0.1

Osoba o hmotnosti $m_O = 65 \text{ kg}$ tlačí vozík po podlaze, jehož hmotnost i s nákupem je $m_V = 19 \text{ kg}$. Osoba při tlačení vozíku působí na podlahu silou $F_{O-P} = 150 \text{ N}$. Proti pohybu vozíku působí třecí síla $F_t = 24 \text{ N}$. Spočítejte jaké zrychlení způsobí daná osoba. Popisovaná situace je zachycena na obr. 7.1.



Obrázek 7.1: Osoba tlačící vozík a síly působící v horizontálním směru.

⁶Nejnovější měření dosáhla při ověřování rovnosti setrvačné a tíhové hmotnosti hodnoty 1 ± 10^{-12} .

Řešení:

Protože osoba a vozík zrychlují společně, tak na ně pohlížíme jako na jednu soustavu. Osoba působí na vozík silou \mathbf{F}_{O-V} (akce) a vozík působí na osobu, podle Zákona akce a reakce, stejně velkou silou, ale opačně orientovanou, tj. $\mathbf{F}_{V-O} = -\mathbf{F}_{O-V}$. Protože osoba působí na podlahu silou \mathbf{F}_{O-P} , tak opět podle Zákona akce a reakce, působí stejně velkou silou, ale opačně orientovanou podlaha na osobu, tj. $\mathbf{F}_{P-O} = -\mathbf{F}_{O-P}$. Protože síly \mathbf{F}_{O-V} , \mathbf{F}_{V-O} a \mathbf{F}_{O-P} jsou síly, které nepůsobí na soustavu, tak je nebudeme při výpočtu jejího zrychlení uvažovat. Jediné síly, které působí na uvažovanou soustavu jsou \mathbf{F}_{P-O} (její velikost je 150 N) a \mathbf{F}_t (její velikost je 24 N), přičemž třecí síla je opačně orientovaná. Takže výsledná síla $\mathbf{F}_c = \mathbf{F}_{P-O} + \mathbf{F}_t$ působící na soustavu má velikost

$$F_c = F_{P-O} - F_t = 150 - 24 = 126 \text{ N}.$$

Hledaná velikost zrychlení soustavy je

$$a = \frac{F_c}{m_O + m_V} = \frac{126}{84} = 1,5 \text{ ms}^{-2}.$$

Pozn.: Ještě na soustavu působí vertikální síly (tíhové síly a jejich reakce), které není již potřeba do výsledné síly zahrnout.

7.1 Základní úlohy dynamiky

Úlohy, se kterými se v dynamice hmotného bodu setkáváme, můžeme rozdělit do dvou skupin.

1. První základní úloha mechaniky

Jedná se o úlohu, která z daného popisu pohybu, tj. kinematické rovnice hmotného bodu $\mathbf{r}(t)$ nebo $\mathbf{v}(t)$, mají určit působící sílu. Působící sílu získáme z 2. pohybového zákona tak, že vynásobíme zrychlení hmotného bodu jeho hmotností:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}, \quad (7.11)$$

přičemž zrychlení získáme z dané kinematické rovnice uvážením rovnosti:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}. \quad (7.12)$$

2. Druhá základní úloha mechaniky

Jedná se o úlohu, která má z daných sil působících na hmotný bod určit průběh pohybu, tj. najít kinematické pohybové rovnice hmotného bodu ($\mathbf{r}(t)$ a $\mathbf{v}(t)$). K vyřešení této úlohy je nutné řešit rovnici, která je matematickým vyjádřením druhého pohybového zákona. Tato rovnice má následující tvar:

$$m \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F} \left(t, \mathbf{r}, \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right), \quad (7.13)$$

kde síla je obecně funkcí času, polohy a rychlosti. Tato rovnice se nazývá **pohybová rovnice ve vektorovém tvaru**. K tomu, abychom mohli řešit vektorovou diferenciální rovnici druhého řádu (7.13), musíme navíc znát počáteční podmínky souřadnic $\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0$ a rychlosti $\mathbf{v}(t_0) = \mathbf{v}_0$. Chceme-li řešit tuto vektorovou diferenciální rovnici, pak ji zpravidla řešíme pro jednotlivé složky⁷, tj. vektorová diferenciální rovnice přejde v soustavu tří skalární diferenciálních rovnic. V kartézských souřadnicích můžeme vyjádřit ve složkovém tvaru druhý pohybový zákon jako

$$ma_x = m \frac{dv_x}{dt} = m \frac{d^2x}{dt^2} = F_x \left(t, x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right), \quad (7.14)$$

$$ma_y = m \frac{dv_y}{dt} = m \frac{d^2y}{dt^2} = F_y \left(t, x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right), \quad (7.15)$$

$$ma_z = m \frac{dv_z}{dt} = m \frac{d^2z}{dt^2} = F_z \left(t, x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right). \quad (7.16)$$

Rovnice (7.14)-(7.16) se nazývají **pohybové rovnice ve složkovém tvaru**. Pro řešení pohybových rovnic ve složkovém tvaru je nutné znát i počáteční podmínky v tomto tvaru:

$$x(t_0) = x_0, \quad v_x(t_0) = v_{x0}, \quad (7.17)$$

$$y(t_0) = y_0, \quad v_y(t_0) = v_{y0}, \quad (7.18)$$

$$z(t_0) = z_0, \quad v_z(t_0) = v_{z0}. \quad (7.19)$$

7.2 Galileiho princip relativity a Galileiho transformace

Uvažujme dvě souřadnicové kartézské soustavy, které se vůči sobě pohybují, situace je zachycena na obrázku 7.2. Nechť hmotný bod P o hmotnosti m má v uvažovaných souřadnicových soustavách polohový vektor \mathbf{r} , resp. \mathbf{r}' . Napíšeme pohybové rovnice hmotného bodu pro obě uvažované soustavy

$$\mathbf{F} = m \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}, \quad (7.20)$$

$$\mathbf{F}' = m \frac{d^2\mathbf{r}'}{dt^2}. \quad (7.21)$$

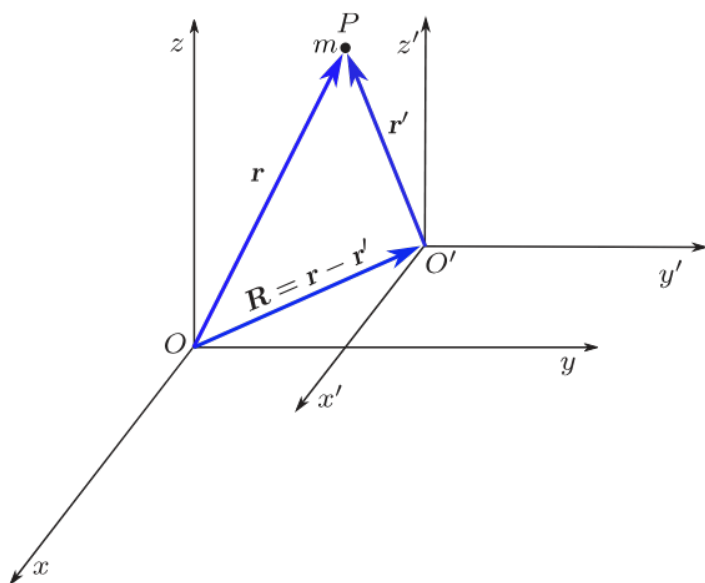
Pro rozdíl sil dostaneme, že

$$\mathbf{F} - \mathbf{F}' = m \frac{d^2}{dt^2}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = m \frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2}. \quad (7.22)$$

Uvážíme-li, že $m \neq 0$, potom rozdíl sil v rovnosti (7.22) bude nulový jen za předpokladu, že

$$\frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2} = \mathbf{0} \quad \text{neboli} \quad \frac{d\mathbf{R}}{dt} = \mathbf{konst.} = \mathbf{v}_R. \quad (7.23)$$

⁷V případě, že síla je konstantní, je možné řešit pohybovou rovnici rovnou ve vektorovém tvaru.



Obrázek 7.2: Polohové vektory bodu P v nečárkované a čárkované kartézské soustavě.

Odtud vyplývá, že síly jsou si rovny jen v případě, že se obě souřadnicové soustavy vůči sobě pohybují konstantní rychlostí \mathbf{v}_R , tj. nemění se jak její velikost, tak její orientace. Předpokládáme-li, že nečárkovaná souřadnicová soustava je soustavou inerciální a čárkovaná soustava se vůči nečárkované pohybuje konstantní rychlostí, jak co do orientace, tak rychlosti, potom je i čárkovaná soustava soustavou inerciální. Tato skutečnost se dá zobecnit a můžeme tvrdit, že všechny soustavy, které se pohybují rovnoměrně přímočaře vzhledem k inerciální vztažné soustavě, jsou rovněž inerciálními vztažnými soustavami.

Na základě výše uvedené rovnosti sil v inerciálních vztažných soustavách tedy platí, že pohybové rovnice mají **stejný** tvar a že síly působící na vyšetřovaný hmotný bod jsou **stejné**. Odtud je možné napsat tzv. **Galileiho (klasický) princip relativity**:

Galileiho princip relativity

Všechny inerciální vztažné soustavy jsou pro popis mechanických dějů rovnocenné a žádnými mechanickými experimenty nelze změřit absolutní pohyb dané inerciální soustavy.

Uvažujme dvě inerciální vztažné souřadnicové soustavy, přičemž předpokládáme, že se čárkovaná soustava vůči té nečárkované pohybuje rovnoměrně přímočaře rychlostí \mathbf{v}_R , opět viz obr. 7.2. Jelikož jeden ze základních postulátů klasické mechaniky je předpoklad absolutního času, pak pro obě soustavy bude platit, že $t = t'$. Pro polohové vektory v uvažovaných soustavách dostáváme následující vztah:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{R} = \mathbf{r}' + \mathbf{v}_R t. \quad (7.24)$$

Derivací podle času, s uvažováním, že $\mathbf{v}_R = \textit{konst.}$, dostaneme:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}'}{dt} + \mathbf{v}_R \quad (7.25)$$

neboli

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}_R . \quad (7.26)$$

Následující derivací podle času⁸ rovnice (7.26) obdržíme rovnost:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\mathbf{v}'}{dt} \quad (7.27)$$

neboli

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' . \quad (7.28)$$

Nalezené transformační vztahy můžeme napsat pohromadě a představují tzv. **Galileiho transformaci**:

Galileiho transformace

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{v}_R t , \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}_R , \quad \mathbf{a} = \mathbf{a}' , \quad t = t' . \quad (7.29)$$

⁸Rychlost $\mathbf{v}_R = \textit{konst.}$ je konstantní co do směru i rychlosti, potom její časová derivace je rovna nulovému vektoru.

Kapitola 8

Neinerciální vztažné soustavy

Uvažujeme čárkovanou vztažnou soustavu \mathcal{S}' , jejíž počátek O' se vzhledem k libovolně zvolené inerciální vztažné soustavě \mathcal{S} (nečárkovaná) se pohybuje s nenulovým zrychlením nebo čárkovaná soustava rotuje kolem okamžité osy otáčení procházející jejím počátkem (osa v čase může měnit svoji polohu a tedy vektor úhlové rychlosti se s časem mění, tj. jak jeho velikost, tak jeho orientace) vůči \mathcal{S} či koná oba zmíněné pohyby současně (jedná se o obecný složený pohyb). V takovém případě představuje čárkovaná soustava **neinerciální vztažnou soustavu**. Připomeňme, že v neinerciální vztažné soustavě neplatí 1. a 2. Newtonův pohybový zákon. Proto našim cílem je nalezení pohybové rovnice, která bude platit pro neinerciální vztažnou soustavu.

8.1 Odvození pohybové rovnice pro neinerciální vztažnou soustavu

Neinerciální vztažná soustava v jistém časovém okamžiku je zachycena na obr. 8.1. Z obrázku lze vidět, že musí platit, že

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{R}. \quad (8.1)$$

Byť čárkovaná (neinerciální) soustava vůči nečárkované (inerciální) soustavě může konat obecný pohyb, tak si zvolíme postup, kdy její pohyb budeme postupně popisovat pro jednodušší případy, až postupně dospějeme k popisu obecnému.

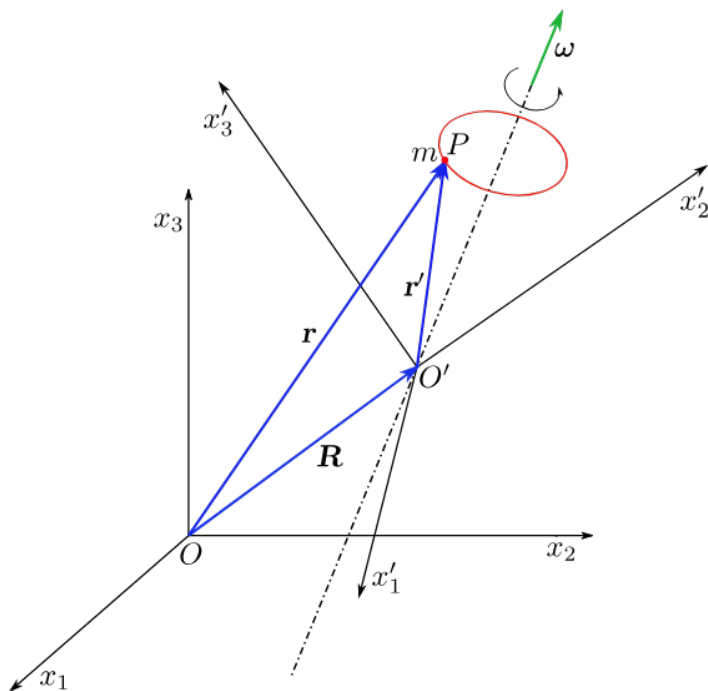
- Počátek čárkované soustavy O' se vůči nečárkované soustavě nepohybuje a čárkovaná soustava koná jen otáčivý (rotační) pohyb vůči nečárkované soustavě s úhlovou rychlostí $\boldsymbol{\omega}$, přičemž bod P se nepohybuje vůči čárkované soustavě (jen vůči nečárkované se otáčí). Tedy musí platit, že

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt} = \mathbf{0}, \quad \frac{d'\mathbf{r}'}{dt} = \mathbf{0} \quad \text{a} \quad \boldsymbol{\omega} \neq \mathbf{0}, \quad (8.2)$$

kde čárkou d' vyjadřujeme, že se jedná o časovou změnu pozorovanou v čárkované soustavě.

S ohledem na vztah (8.1) můžeme časovou změnu vektoru \mathbf{r} , která odpovídá obvodové rychlosti bodu P , zapsat jako

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}'}{dt} + \underbrace{\frac{d\mathbf{R}}{dt}}_{=0} = \frac{d\mathbf{r}'}{dt}, \quad (8.3)$$

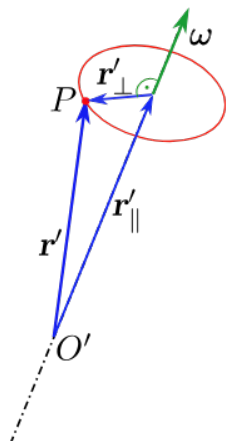


Obrázek 8.1: Orientace neinerciální (čárkované) vztažné soustavy vůči inerciální (nečárkované) soustavě v nějakém časovém okamžiku.

takže obvodová rychlost bodu P je dána jako časová derivace polohového vektoru \mathbf{r}' . Dále si rozložíme vektor \mathbf{r}' na dvě složky, jedna bude rovnoběžná s osou otáčení a druhá bude na ni kolmá, viz obr. 8.2, tj.

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r}'_{\parallel} + \mathbf{r}'_{\perp} . \quad (8.4)$$

Obvodovou rychlost bodu P můžeme na základě vztahu (6.67) napsat jako



Obrázek 8.2: Rozklad vektoru \mathbf{r}' na dvě složky \mathbf{r}'_{\parallel} a \mathbf{r}'_{\perp} .

$$\frac{d\mathbf{r}'}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_{\perp} . \quad (8.5)$$

Protože z definice vektorového součinu musí platit, že $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_{\parallel} = \mathbf{0}$, tak tento člen můžeme přičíst k členu na pravé straně rovnice (8.5), aniž se její rovnost

poruší, takže dostaneme:

$$\frac{d\mathbf{r}'}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_{\perp} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_{\parallel} = \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}'_{\perp} + \mathbf{r}'_{\parallel}) = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' . \quad (8.6)$$

Tedy platí, že

$$\frac{d\mathbf{r}'}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' . \quad (8.7)$$

2. V dalším případě uvažujme, že se oproti předchozímu případu mění s časem poloha bodu P i vzhledem k čárkované soustavě, takže platí:

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt} = \mathbf{0} , \quad \frac{d'\mathbf{r}'}{dt} \neq \mathbf{0} \quad \text{a} \quad \boldsymbol{\omega} \neq \mathbf{0} . \quad (8.8)$$

To má za následek, že vůči nečárkované soustavě je změna polohy bodu P dána jak otáčením čárkované soustavy, tak jeho změnou polohy v této soustavě. Takže s ohledem na vztah (8.7) může psát:

$$\frac{d\mathbf{r}'}{dt} = \frac{d'\mathbf{r}'}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' . \quad (8.9)$$

Tento vztah nám udává časovou změnu vektor \mathbf{r}' v nečárkované soustavě. Budeme-li na vektor \mathbf{r}' pohlížet jako na „geometrický model“, tedy nahradíme-li ho jiným vektorem, třeba \mathbf{q} , tak pro jeho časovou změnu bychom dostali stejný vztah, tj.

$$\frac{d\mathbf{q}}{dt} = \frac{d'\mathbf{q}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q} \quad (8.10)$$

neboli pro vyjádření časové změny libovolné vektorové veličiny v nečárkované soustavě je možné použít následujícího operátoru:

$$\frac{d\cdot}{dt} = \frac{d'\cdot}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \cdot , \quad (8.11)$$

kde za tečku dosadíme konkrétní vektorovou veličinu, jejíž časovou změnu chceme určit.

3. Nyní budeme předpokládat nejobecnější případ, tedy že se vůči nečárkované soustavě pohybuje počátek čárkované soustavy O' , čárkovaná soustava v nečárkované soustavě vykonává otáčivý pohyb a poloha bodu P se s časem mění, tedy

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt} \neq \mathbf{0} , \quad \frac{d'\mathbf{r}'}{dt} \neq \mathbf{0} \quad \text{a} \quad \boldsymbol{\omega} \neq \mathbf{0} . \quad (8.12)$$

S ohledem na vztahy (8.1) a (8.9) lze psát:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{R}}{dt} + \frac{d'\mathbf{r}'}{dt} = \frac{d\mathbf{R}}{dt} + \frac{d'\mathbf{r}'}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' . \quad (8.13)$$

Vztah (8.13) můžeme vyjádřit pomocí okamžitých rychlostí:

$$\mathbf{v} = \mathbf{V} + \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' , \quad (8.14)$$

kde \mathbf{v} představuje rychlost bodu P v nečárkované soustavě, \mathbf{V} vyjadřuje rychlost počátku čárkované soustavy O' , \mathbf{v}' je rychlost bodu P z pohledu čárkované soustavy a $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'$ reprezentuje unášivou rychlost.

Protože naším cílem je nalezení pohybové rovnice HB pro neinerciální vztažnou soustavu, je nejdříve nutné nalézt vztah pro zrychlení. Proto zderivujeme podle času rovnici (8.14):

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\mathbf{V}}{dt} + \frac{d\mathbf{v}'}{dt} + \frac{d(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')}{dt} . \quad (8.15)$$

Pro derivaci vektorového součinu dvou vektorových veličin platí:

$$\frac{d(\mathbf{u} \times \mathbf{w})}{dt} = \frac{d\mathbf{u}}{dt} \times \mathbf{w} + \mathbf{u} \times \frac{d\mathbf{w}}{dt} . \quad (8.16)$$

S ohledem na toto pravidlo můžeme dále vztah (8.15) upravit jako

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\mathbf{V}}{dt} + \frac{d\mathbf{v}'}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}'}{dt} . \quad (8.17)$$

V této rovnici použijeme operátor pro časovou derivace (8.11), ze kterého vyplývá, že

$$\frac{d\mathbf{v}'}{dt} = \frac{d'\mathbf{v}'}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' , \quad (8.18)$$

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \frac{d'\boldsymbol{\omega}}{dt} + \underbrace{\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega}}_{=0} = \frac{d'\boldsymbol{\omega}}{dt} , \quad (8.19)$$

$$\frac{d\mathbf{r}'}{dt} = \frac{d'\mathbf{r}'}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' . \quad (8.20)$$

Vidíme z výsledku (8.19), že časová změna úhlové rychlosti $\boldsymbol{\omega}$ je z pohledu obou soustav stejná. Za příslušné derivace ve vztahu (8.17) dosadíme ze vztahů (8.18) a (8.20):

$$\underbrace{\frac{d\mathbf{v}}{dt}}_{\mathbf{a}} = \underbrace{\frac{d\mathbf{V}}{dt}}_{\mathbf{A}} + \underbrace{\frac{d'\mathbf{v}'}{dt}}_{\mathbf{a}'} + \underbrace{\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}}_{\boldsymbol{\varepsilon}} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times \left(\underbrace{\frac{d'\mathbf{r}'}{dt}}_{\mathbf{v}'} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' \right) . \quad (8.21)$$

Odtud pak můžeme psát:

$$\mathbf{a} = \mathbf{A} + \mathbf{a}' + \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}' + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') , \quad (8.22)$$

kde \mathbf{a} je zrychlení bodu P z pohledu nečárkované (inerciální) vztažné soustavy, \mathbf{a}' je zrychlení bodu P z pohledu čárkované (neinerciální) vztažné soustavy a $\boldsymbol{\varepsilon}$ představuje úhlové zrychlení čárkované soustavy.

Rovnici (8.22) vynásobíme hmotností uvažovaného HB:

$$m\mathbf{a} = m\mathbf{a}' + m\mathbf{A} + m\boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}' + 2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' + m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') . \quad (8.23)$$

Z této rovnice si můžeme snadno vyjádřit pohybovou rovnici pro neinerciální soustavu:

$$m\mathbf{a}' = \mathbf{F} - m\mathbf{A} - m\boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}' - 2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') , \quad (8.24)$$

kde $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$.

Tuto pohybovou rovnici můžeme přepsat do následujícího tvaru:

$$m\mathbf{a}' = \mathbf{F} + \mathbf{F}_s + \mathbf{F}_E + \mathbf{F}_C + \mathbf{F}_O, \quad (8.25)$$

kde \mathbf{F} je **pravá** (skutečná, reálná, vtištěná) síla působící na hmotný bod, zatímco zbývající čtyři síly představují síly, které zajišťují jakousi „korekci“ pohybové rovnice, aby mohla platit pro uvažovanou neinerciální soustavu. Tyto čtyři síly se označují jako síly **nepravé** (kinematické, zdánlivé, fiktivní, neskutečné), což souvisí s faktem, že tyto síly jsou jen kinematickým důsledkem posuvného (translačního) a otáčivého (rotačního) pohybu vztažné soustavy a ne výsledkem silového působení reálného fyzikálního objektu, takže k nim **neexistuje** příslušná silová reakce. Na rozdíl od sil nepravých se změnou vztažné soustavy, bez ohledu jestli jde o soustavu inerciální či neinerciální, **se pravé síly nemění**. Setrvačné síly se objevují jen v pohybových rovnicích pro neinerciální vztažné soustavy, takže přechodem od soustavy neinerciální k soustavě inerciální tyto síly **vymizí**.

První z nepravých sil je tzv. **setrvačná síla**

$$\mathbf{F}_s = -m\mathbf{A}. \quad (8.26)$$

Druhá z nepravých sil je tzv. **Eulerova síla**

$$\mathbf{F}_E = m\mathbf{a}_E = -m\boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}', \quad (8.27)$$

kde $\mathbf{a}_E = -\boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}'$ je **Eulerovo zrychlení**.

Třetí nepravá síla je tzv. **Coriolisova síla**

$$\mathbf{F}_C = m\mathbf{a}_C = -2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}', \quad (8.28)$$

kde $\mathbf{a}_C = -2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'$ je **Coriolisovo zrychlení**.

Poslední nepravou silou je tzv. **odstředivá síla**

$$\mathbf{F}_O = m\mathbf{a}_O = -m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'), \quad (8.29)$$

kde $\mathbf{a}_O = -\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')$ je **odstředivé zrychlení**.

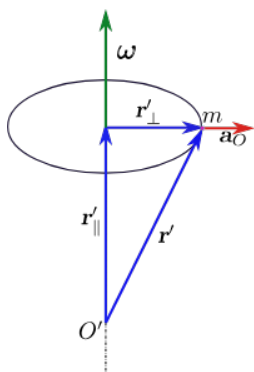
8.1.1 Odstředivá síla

K určení směru a velikosti odstředivého zrychlení vyjdeme z obrázku 8.3. Provedeme rozklad polohového vektoru do dvou složek $\mathbf{r}' = \mathbf{r}'_{\perp} + \mathbf{r}'_{\parallel}$, kde složka \mathbf{r}'_{\perp} je kolmá k ose rotace, kdežto složka \mathbf{r}'_{\parallel} je s ní rovnoběžná, viz obr. 8.3. Dosazením těchto složek do výrazu pro odstředivou sílu a po následné úpravě dostaneme

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_O &= -\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') = -\boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}'_{\perp} + \mathbf{r}'_{\parallel})] = -\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_{\perp}) - \underbrace{\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_{\parallel})}_{=0} = \\ &= -\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_{\perp}) = -\underbrace{\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}'_{\perp})}_{=0} + \mathbf{r}'_{\perp}(\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}) = \omega^2 \mathbf{r}'_{\perp}. \end{aligned} \quad (8.30)$$

Z výsledku (8.30) je vidět, že odstředivé zrychlení je kolmé na okamžitou osu otáčení¹ (viz obr. 8.3) a má velikost, jež je dána součinem poloměru kružnice,

¹Vektor odstředivého zrychlení je orientován od středu kružnice, po které se pohybuje bod P , odtud je zřejmé pojmenování tohoto vektoru.

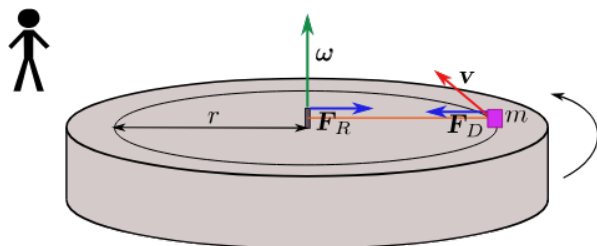


Obrázek 8.3: Uspořádání vektorů při určení velikosti a směru odstředivého zrychlení.

kolem které bod P obíhá, a kvadrátu velikosti úhlové rychlosti. Z rovnosti (8.30) je patrné, že (na rozdíl od dostředivého zrychlení) odstředivé zrychlení, a tedy i odstředivá síla, **nezávisí na rychlosti** pohybu tělesa (hmotného bodu, které těleso reprezentuje).

Pro vysvětlení odstředivé síly budeme uvažovat následující případ. Nechť se disk otáčí konstantní úhlovou rychlostí ω . Uprostřed tohoto disku je pivot, ke kterému je pomocí provázku přichyceno těleso ve tvaru kvádru o hmotnosti m a toto těleso se pohybuje obvodovou rychlostí v po kružnici a tato rychlost je v každém okamžiku k ní tečná. Pozorovatel se nachází mimo tento disk a je v klidu vůči inerciální vztažné soustavě, takže pozoruje vyšetřovaný pohyb z pozice inerciální vztažné soustavy, viz obr. 8.4. Pozorovatel vidí, že se těleso pohybuje po kružnici o poloměru r , takže na něj musí působit síla směřující do středu rotujícího disku, jedná se tedy o dostředivou sílu $\mathbf{F}_D = m\mathbf{a}_D$, protože jinak těleso, podle Zákona setrvačnosti, by muselo být v klidu nebo rovnoměrném přímočarém pohybu. Kdybychom přestřihli provázek, tak by se těleso pohybovalo rovnoměrně přímočaře ve směru obvodové rychlosti, kterou má těleso v okamžiku přestřižení, protože těleso setrvává ve svém pohybovém stavu. V důsledku Zákona akce a reakce bude prostřednictvím tohoto provázku působit těleso na pivot reakční silou \mathbf{F}_R , která je stejně velká jako síla dostředivá, ale je opačně orientovaná, tedy $\mathbf{F}_D + \mathbf{F}_R = \mathbf{0}$. Síla dostředivá je silou pravou a existuje k ní reakce, přičemž dostředivá síla působí na těleso, kdežto reakční síla (reakce) působí na pivot.

Nyní si popíšeme, jak by situaci viděl tento pozorovatel, kdy se postavil na rotující

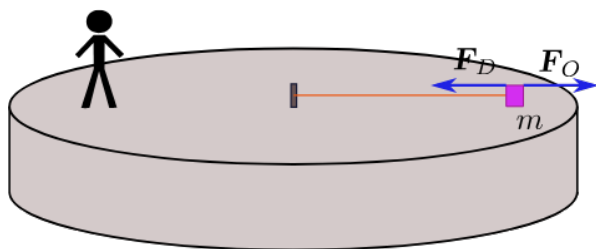


Obrázek 8.4: Pozorovatel je v klidu vůči inerciální vztažné soustavě.

disk. V tomto případě pozoruje situaci z pohledu neinerciální vztažné soustavy, což je soustava spojená s rotujícím diskem, viz obr. 8.5. Pozorovatel vidí, že těleso

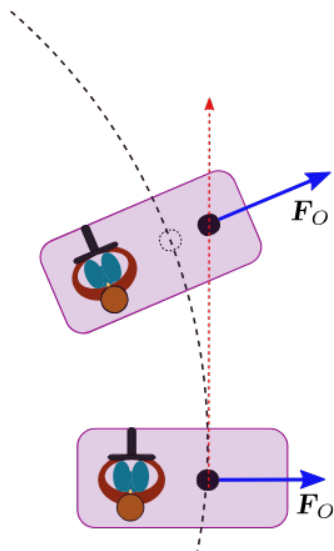
je vůči němu v klidu, to znamená, že na něj nepůsobí žádná výsledná síla. Aby tomu tak mohlo být, tak se musí síla odstředivá (o které ví z předchozího pozorování z pohledu inerciální vztažné soustavy) vyrušit nějakou jinou silou a tou je právě síla odstředivá F_O , pro kterou platí, že $F_O = -F_D$ (obě síly působí na totéž těleso). Tedy k vysvětlení pozorované situace potřebuje novou sílu (nepravou), která se v předchozím případě nevyskytovala. Tato odstředivá síla je tedy jen důsledkem pozorování z pohledu neinerciální vztažné soustavy a nemá k sobě reakci.

Je nutné si uvědomit, že ačkoliv odstředivá síla představuje nepravou (zdánlivou)



Obrázek 8.5: Pozorovatel je v klidu vůči neinerciální vztažné soustavě.

sílu, tak její účinky jsou reálné. Kdyby se pozorovatel nacházel na okraji disku, tak by mohl z disku spadnout (v případě nedostatečně velké třecí síly) působením této síly. Ke znázornění působení odstředivé síly může posloužit obr. 8.6. Na obrázku je zachycen předmět na sedadle automobilu, který vjel do kruhové zatáčky. Díky slabé třecí síle se se předmět vedle řidiče začne pohybovat po sedadle. Z



Obrázek 8.6: Posun předmětu na sedle automobilu jedoucího kruhovou zatáčkou.

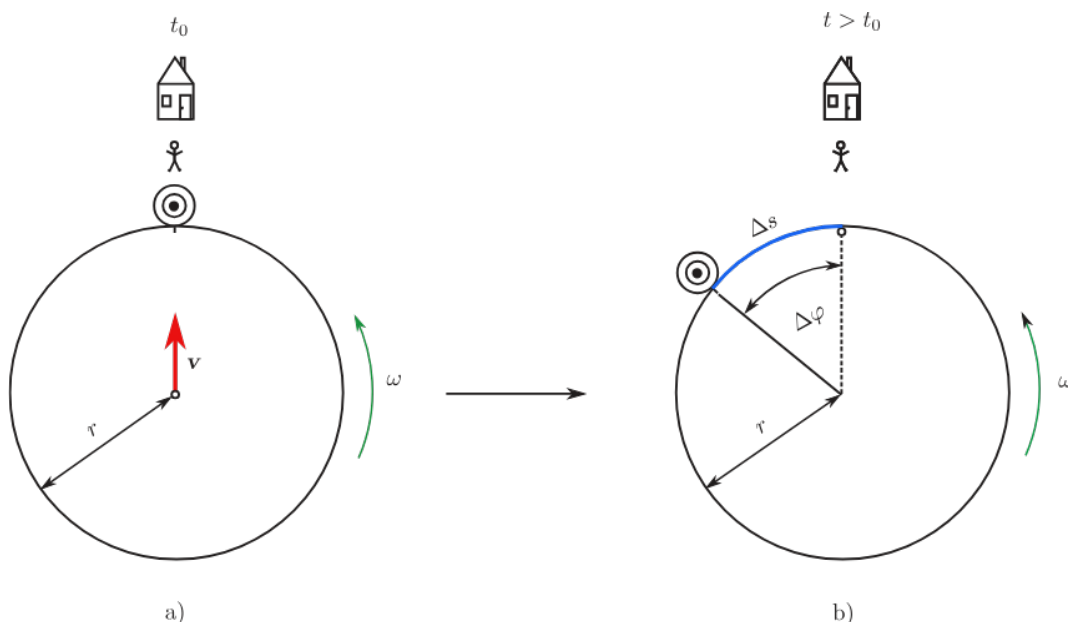
pohledu inerciální vztažné soustavy si předmět zachovává svůj pohybový stav, tj. bude se pohybovat ve směru tečném ke kružnici, jejíž poloměr odpovídá poloměru kruhové zatáčky, čímž se při jízdě automobilu zatáčkou pohybuje po sedadle ve směru od řidiče. Z pohledu neinerciální vztažné soustavy působí na předmět odstředivá síla, která má za následek posun předmětu po sedadle ve směru od středu dráhy automobilu (kružnice).

Některá zařízení využívají působení odstředivých sil, patří k nim zejména ždímačky prádla či odstředivky používané v chemických a biochemických laboratořích.

8.1.2 Coriolisova síla

Coriolisova síla (8.28) **závisí na rychlosti**, se kterou se vzhledem k rotující soustavě hmotný bod pohybuje. Je-li hmotný bod v klidu anebo se pohybuje rovnoběžně s osou otáčení, Coriolisova síla na něj nepůsobí. Největší vliv má Coriolisova síla na pohyby kolmé k ose otáčení. Coriolisova síla je vždy kolmá na směr pohybu hmotného bodu, a tedy se jedná o sílu **gyroskopickou**.

Coriolisovu sílu je možné fyzikálně demonstrovat na následujícím příkladu. Uvažujme rotující disk s úhlovou rychlostí ω a o poloměru r , v jehož středu se nachází zařízení, které vystřelí kuličku rychlostí \mathbf{v} , tak aby zasáhla terč umístěný na okraji disku. Kulička, kterou reprezentujeme hmotným bodem, se bude tedy pohybovat k okraji rotujícího disku a my její pohyb budeme pozorovat jak z pozice pozorovatele, který se nachází v inerciální soustavě (mimo disk), tak z pozice pozorovatele, jenž se nachází ve středu rotujícího disku, tedy v neinerciální vztažné soustavě. Nejdříve se budeme věnovat pozorovateli, který se nachází v inerciální soustavě, viz obrázek 8.7. Na obrázku 8.7 a) je zachycena situace v počátečním čase t_0 . Díky tomu, že se disk otáčí konstantní úhlovou rychlostí ω , nezasáhne kulička terč. Z pohledu pozorovatele v inerciální soustavě se kulička pohybuje po přímce rychlostí v a v čase $t > t_0$ dosáhne kraje disku, tj. $r = v(t - t_0) = \Delta s$, jak je zachyceno na obrázku 8.7 b). Za čas Δt se terč posunul o úsek Δs , jemuž odpovídá středový



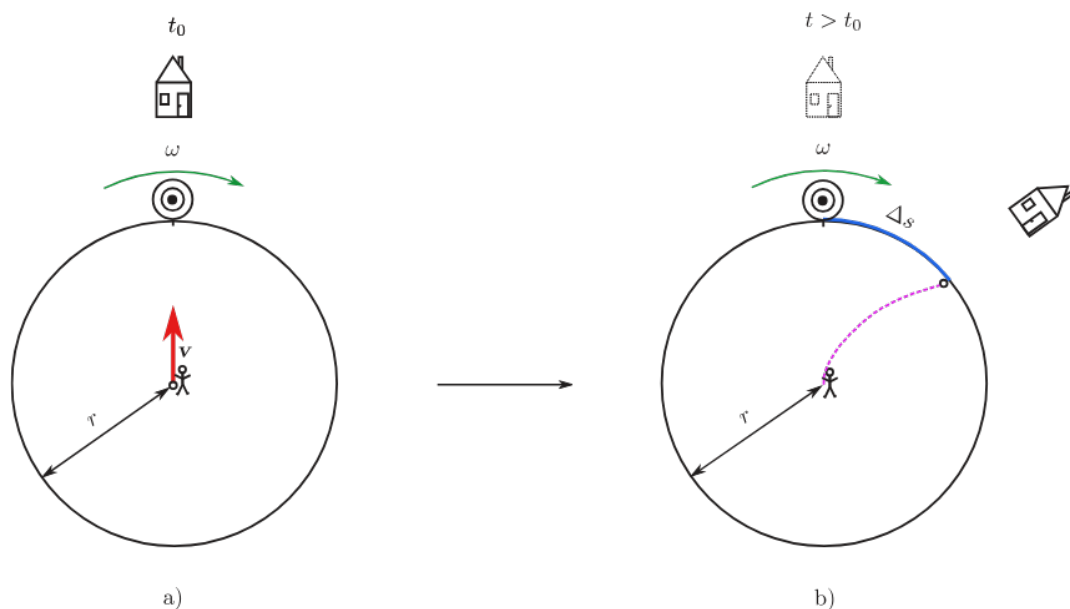
Obrázek 8.7: Pozorování pohybu kuličky z pohledu pozorovatele nacházejícího se v inerciální soustavě. Na obrázku je zachycena situace v počátečním čase t_0 a v čase dopadu t .

úhel $\Delta\varphi$, takže platí:

$$\Delta s = r\Delta\varphi = r\omega\Delta t = v\omega\Delta t^2, \quad (8.31)$$

kde za poloměr bylo dosazeno $r = v\Delta t$.

Jinak pohyb kuličky vidí pozorovatel, který se nachází ve středu otáčejícího se disku. Tento pozorovatel je součástí neinerciální rotující vztažné soustavy. Pro tohoto pozorovatele se otáčejí objekty mimo disk úhlovou rychlostí ω , avšak v opačném směru, než rotuje disk vzhledem k inerciální vztažné soustavě. Popsaná situace se nachází na obrázku 8.8 a). Pozorovatel v neinerciální soustavě samozřejmě rov-



Obrázek 8.8: Pozorování pohybu kuličky z pohledu pozorovatele nacházejícího se v neinerciální soustavě. Na obrázku je zachycena situace v počátečním čase t_0 a v čase dopadu t .

něž pozoruje, že kulička nezasáhla terč (změnou souřadnicové soustavy se nemůže změnit fyzikální skutečnost). Jenže příčinu toho, že kulička, ač byla vystřelena přesně na terč, nezasáhla terč vidí z pohledu své soustavy jinak. Tento pozorovatel měl za to, že se kulička bude pohybovat rovnoměrně přímočaře, avšak vidí, že výsledný pohyb se děje po křivce², viz obr. 8.8 b). Protože na základě Zákona setrvačnosti se těleso pohybuje rovnoměrně přímočaře, dokud není přinuceno vnější silou jinak, usoudí pozorovatel z neinerciální soustavy, že na kuličku (hmotný bod) musela působit nějaká síla, kterou reprezentuje Coriolisova síla \mathbf{F}_C . Jelikož nezávisle na volbě vztažné soustavy musíme pozorovat stejný fyzikální výsledek, tak tato síla způsobí stejný odklon kuličky od terče Δs , jako v případě pozorování děje z pohledu inerciální vztažné soustavy.

Coriolisovu sílu můžeme snadno pocítit „na vlastní kůži“, když se posadíme na otočnou židli. Nejprve uvolněnou rukou nacvičme rychlý pohyb od kolenou směrem k našemu tělu. Potom židli roztočíme a nacvičeným pohybem se pokusíme trefit do čela. Pokud na samotný pohyb příliš nemyslíme, Coriolisova síla nám odkloní pohybující se ruku, takže se do čela netrefíme.

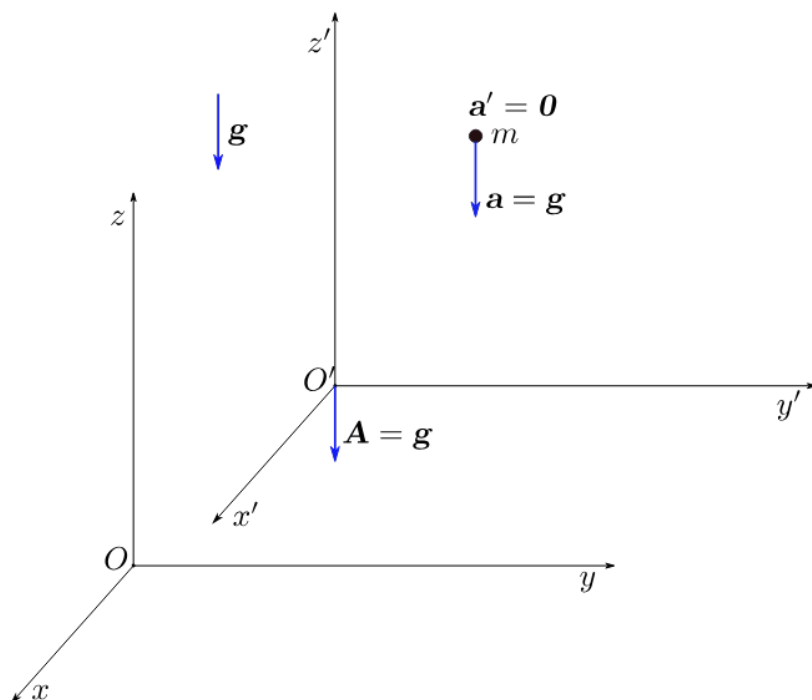
²Dá se ukázat, že touto křivkou je spirála. Tato křivka je výsledkem současného působení Coriolisovy a odstředivé síly.

Ostředivá síla \mathbf{F}_O působí ve směru radiálním, takže odklon kuličky nemůže způsobit.

8.1.3 Setrvačná síla a princip ekvivalence

Uvažujme těleso (HB) o hmotnosti m padající volným pádem v homogenním tíhovém poli Země. V takovém případě se bude těleso pohybovat se zrychlením \mathbf{g} a jeho pohyb bude přímočarý a rovnoměrně zrychlený. Zvolíme za čárkovanou (neinerciální) soustavu takovou, že se její počátek O' bude pohybovat právě se zrychlením \mathbf{g} , tedy $\mathbf{A} = \mathbf{g}$, viz obr. 8.9. Z pohledu nečárkované (inerciální) soustavy se bude těleso pohybovat se zrychlením $\mathbf{a} = \mathbf{g}$.

Vzhledem k tomu, že v našem případě $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0}$, tak z rovnice (8.22), resp.



Obrázek 8.9: Volný pád tělesa z pohledu inerciální a neinerciální vztažné soustavy, která se pohybuje se zrychlením \mathbf{g} .

(8.24) obdržíme:

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a} - \mathbf{A} = \mathbf{g} - \mathbf{g} = \mathbf{0}, \quad \text{resp.} \quad m\mathbf{a}' = \mathbf{G} + \mathbf{F}_S = m\mathbf{g} - m\mathbf{g} = \mathbf{0}, \quad (8.32)$$

kde $\mathbf{F} = \mathbf{G}$ je síla gravitace.

Odtud dostáváme, že v čárkované soustavě všechna tělesa se pohybují s nulovým zrychlením, jako by zde žádná tíže neexistovala a platí pro ně Zákon setrvačnosti. Prakticky neexistuje způsob, jak např. v kosmické lodi určit, zda loď padá volným pádem v tíhovém poli Země nebo se pohybuje rovnoměrně přímočaře ve vesmíru daleko od všech zdrojů gravitace.

Jiný případ zachycuje obr. 8.10. Na tomto obrázku se váží pasažér kosmické lodi před startem na Zemi ($\mathbf{A} = \mathbf{0}$) a zjistí svoji hmotnost 75 kg neboť podle rovnice (8.24) dostáváme (jak čárkovaná, tak nečárkovaná soustava jsou soustavami inerciálními):

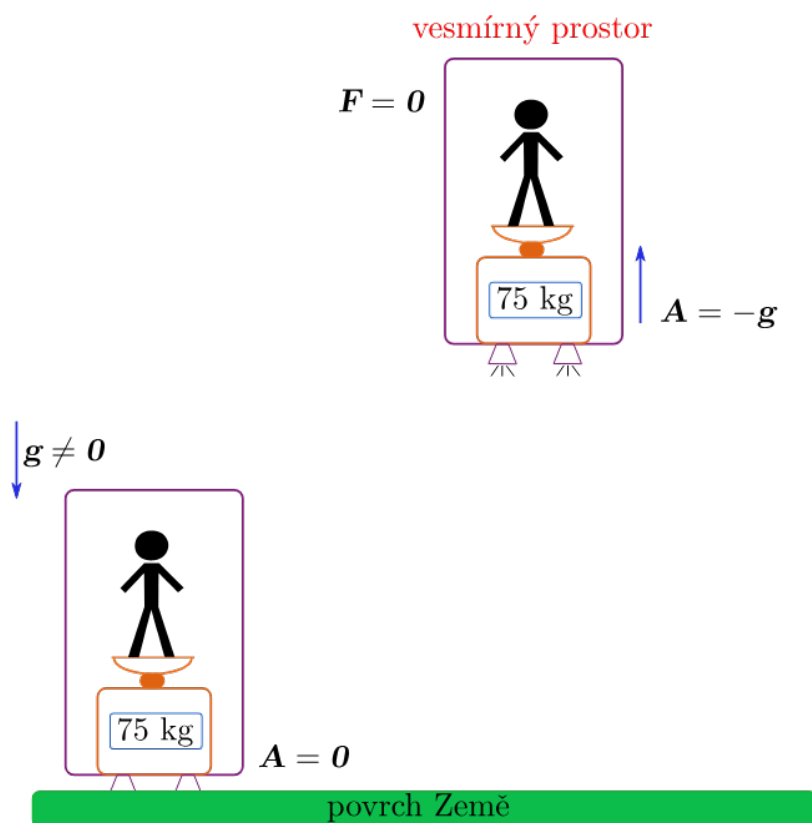
$$m\mathbf{a}' = \mathbf{F} + \mathbf{F}_S = \mathbf{G} + \mathbf{F}_S = m\mathbf{g} - m\mathbf{A} = m\mathbf{g} - m\mathbf{0} = m\mathbf{g} = \mathbf{G}. \quad (8.33)$$

Následně se zváží tento pasažér v kosmické lodi daleko od všech zdrojů gravitace, tj. pravá síla je nulová ($\mathbf{F}=\mathbf{0}$), přičemž tato loď se pohybuje se zrychlením $\mathbf{A} = -\mathbf{g}$. Na základě pohybové rovnice (8.24) pro tento případ můžeme psát:

$$m\mathbf{a}' = \mathbf{F} + \mathbf{F}_S = \mathbf{0} - m\mathbf{A} = -m(-\mathbf{g}) = m\mathbf{g} = \mathbf{G}. \quad (8.34)$$

Odtud vidíme, že pasažér naměří stejnou hmotnost jako před startem.

Výše popsané případy jsou důsledkem rovnosti tíhové a setrvačné hmotnosti, tedy



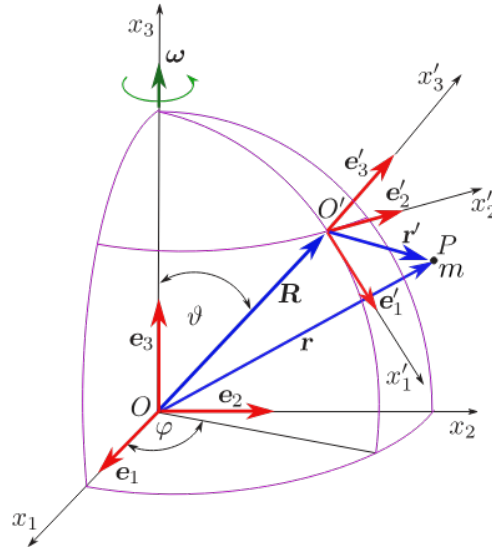
Obrázek 8.10: Určení hmotnosti pasažéra v kosmické lodi stojící na Zemi a pohybující se vesmírným prostorem se zrychlením \mathbf{g} .

principu ekvivalence.

8.2 Pohybová rovnice hmotného bodu pohybujícího se blízko nad zemským povrchem pro soustavu pevně spojenou s rotující Zemí

Předpokládejme, že Země koná pouze rotační pohyb kolem své osy, přičemž vektor úhlové rychlosti $\boldsymbol{\omega}$ Země považujeme za konstantní, tj. $d\boldsymbol{\omega}/dt = \mathbf{0}$. Dále Zemi považujeme za homogenní kouli o poloměru³ R a počátek inerciální soustavy umístíme do jejího středu. Počátek neinerciální soustavy se nachází na povrchu Země,

³Za poloměr Země budeme považovat $R = 6378$ km.



Obrázek 8.11: Poloha čárkované a nečárkované souřadnicové soustavy na Zemi.

přičemž jeho poloha je určena pouze dvěma souřadnicemi ϑ a φ , viz obr. 8.11. Neinerciální soustava tedy koná čistě rotační pohyb kolem osy a počátky inerciální a neinerciální soustavy nejsou totožné. V tomto případě je možné použít k popisu hmotného bodu vůči rotující soustavě pohybovou rovnici (8.24), kterou přepíšeme do tvaru:

$$m \frac{d'^2 \mathbf{r}'}{dt^2} = \mathbf{F} - m \frac{d^2 \mathbf{R}}{dt^2} - m \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}' - 2m\boldsymbol{\omega} \times \frac{d'\mathbf{r}'}{dt} - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'). \quad (8.35)$$

kde polohový vektor \mathbf{R} ukazující na počátek neinerciální soustavy nemění s časem svoji velikost, ale jen orientaci, jelikož počátek O' neinerciální soustavy obíhá po kružnici. Ukazuje-li polohový vektor \mathbf{r}' na bod P , který by byl nepohyblivý vzhledem k neinerciální soustavě, bude obíhat se stejným vektorem úhlové rychlosti $\boldsymbol{\omega}$ jako koncový bod polohového vektoru \mathbf{R} , viz obr.8.11. Vzhledem k tomu, že časová změna polohového vektoru \mathbf{R} je časová změna pozorovaná v inerciální vztažné soustavě, vyjdeme pro vyjádření této změny ze vztahu (6.67), který pro náš účel přepíšeme jako

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt} = \mathbf{V} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}. \quad (8.36)$$

Derivací této rovnice podle času s uvažováním $d\boldsymbol{\omega}/dt = \mathbf{0}$ dostaneme:

$$\frac{d^2 \mathbf{R}}{dt^2} = \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{R}}{dt}. \quad (8.37)$$

Dosadíme-li do posledního členu na pravé straně rovnice (8.37) ze vztahu (8.36), pak dostáváme, že

$$\frac{d^2 \mathbf{R}}{dt^2} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}). \quad (8.38)$$

Dosazením vztahu (8.38) do rovnice (8.35), opět s uvažováním $d\boldsymbol{\omega}/dt = \mathbf{0}$, dospějeme k následující pohybové rovnici:

$$m \frac{d'^2 \mathbf{r}'}{dt^2} = \mathbf{F} - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) - 2m\boldsymbol{\omega} \times \frac{d'\mathbf{r}'}{dt} - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'). \quad (8.39)$$

Jestliže jedinou reálnou silou, která na hmotný bod o hmotnosti m působí, je gravitační síla, jež má v inerciální soustavě tvar (podrobněji v kapitole věnované gravitačnímu poli):

$$\mathbf{F}_g = -\kappa \frac{mM}{r^3} \mathbf{r} = \mathbf{a}_g m ,$$

kde M je hmotnost Země, kterou nahrazujeme HB a o stejné hmotnosti, a $\mathbf{r} = \mathbf{R} + \mathbf{r}'$ a \mathbf{a}_g je tzv. **gravitační zrychlení**. Dosazením této síly do pohybové rovnice (8.39) dostaneme:

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}'}{dt^2} = -\kappa \frac{mM}{r^3} \mathbf{r} - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) - 2m\boldsymbol{\omega} \times \frac{d'\mathbf{r}'}{dt} - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') . \quad (8.40)$$

Jestliže pohybová rovnice (8.40) bude popisovat pohyb hmotného bodu v blízkosti zemského povrchu, pak si můžeme dovolit aproximaci, že $\mathbf{r} = \mathbf{R} + \mathbf{r}' \approx \mathbf{R}$, protože $|\mathbf{R}| \gg |\mathbf{r}'|$.

Na základě této aproximace si zavedeme tzv. **tíhové zrychlení** jako

$$\mathbf{g} = -\kappa \frac{M}{R^3} \mathbf{R} - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) = \mathbf{a}_g + \mathbf{a}_O . \quad (8.41)$$

Ze vztahu pro tíhové zrychlení (8.41) je vidět, že tíhové zrychlení představuje pro danou zeměpisnou šířku θ ($\theta = \pi/2 - \vartheta$) konstantní vektor. Díky vektorovému součtu s odstředivým zrychlením $\mathbf{a}_O = -\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R})$ je zřejmé, že vektor tíhového zrychlení, na rozdíl od gravitačního zrychlení, \mathbf{a}_g nesměruje přesně do středu země pro $\vartheta \neq 0$. Odstředivé zrychlení závisí na zeměpisné šířce a na pólech Země je nulové ($\boldsymbol{\omega} \parallel \mathbf{R}$).

Pomocí tíhového zrychlení můžeme přepsat pohybovou rovnici (8.40) do následujícího tvaru:

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}'}{dt^2} = m\mathbf{g} - 2m\boldsymbol{\omega} \times \frac{d'\mathbf{r}'}{dt} - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') . \quad (8.42)$$

Jelikož se v odstředivém zrychlení vyskytuje kvadrát velikosti úhlové rychlosti, která je pro Zemi⁴ $\omega \ll 1$ a v blízkosti zemského povrchu platí, že $|\mathbf{R}| \gg |\mathbf{r}'|$, je možné poslední člen na pravé straně rovnice (8.42) zanedbat⁵, čímž se nám pohybová rovnice (8.42) redukuje na následující tvar:

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}'}{dt^2} = m\mathbf{g} - 2m\boldsymbol{\omega} \times \frac{d'\mathbf{r}'}{dt} , \quad (8.43)$$

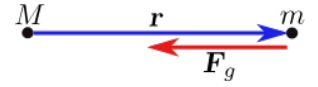
kde poslední člen na pravé straně reprezentuje Coriolisovu sílu. Tato pohybová rovnice pro souřadnicovou vztažnou soustavu s dostatečnou přesností popisuje pohyb hmotných bodů v blízkosti povrchu Země.

S ohledem na zavedení čárkované soustavy, viz obrázek 8.11, je možné po vydělení hmotností a uplatnění tečkové notace pro derivace podle času přepsat pohybovou rovnici (8.43) do tvaru:

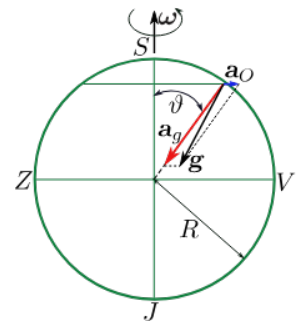
$$\ddot{\mathbf{r}}' = -g\mathbf{e}_3' - 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}' , \quad (8.44)$$

resp.

$$\ddot{\mathbf{r}}' = \mathbf{g} - 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}' , \quad (8.45)$$



Gravitační síla má opačnou orientaci než polohový vektor, proto znaménko minus.



⁴ $\omega = 2\pi/T = 2\pi/86400 \approx 7,3 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$.

⁵Odstředivé zrychlení na povrchu Země je zahrnuto do tíhového zrychlení \mathbf{g} .

kde, s ohledem na skutečnost, že $\omega \ll 1$, se předpokládá, že vektor tíhového zrychlení směřuje do středu Země, tj. $\mathbf{g} = (0, 0, -g) = -g\mathbf{e}'_3$.

Jednotkový souřadnicový vektor \mathbf{e}_3 má v čárkované souřadnicové soustavě následující souřadnice⁶:

$$\mathbf{e}_3 = (\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}'_1)\mathbf{e}'_1 + (\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}'_2)\mathbf{e}'_2 + (\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}'_3)\mathbf{e}'_3 = \cos(\vartheta + \pi/2)\mathbf{e}'_1 + 0\mathbf{e}'_2 + \cos(\vartheta)\mathbf{e}'_3 = -\sin(\vartheta)\mathbf{e}'_1 + \cos(\vartheta)\mathbf{e}'_3. \quad (8.46)$$

Protože vektor úhlové rychlosti Země je dán v nečárkované soustavě jako $\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{e}_3$, je možné složky tohoto vektoru vyjádřit pomocí rovnosti (8.46) následovně:

$$\boldsymbol{\omega} = -\omega \sin(\vartheta)\mathbf{e}'_1 + \omega \cos(\vartheta)\mathbf{e}'_3, \quad (8.47)$$

takže můžeme psát, že

$$-\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}' = - \begin{vmatrix} \mathbf{e}'_1 & \mathbf{e}'_2 & \mathbf{e}'_3 \\ -\omega \sin \vartheta & 0 & \omega \cos \vartheta \\ \dot{x}'_1 & \dot{x}'_2 & \dot{x}'_3 \end{vmatrix} = (\omega \dot{x}'_2 \cos \vartheta)\mathbf{e}'_1 - (\omega \dot{x}'_3 \sin \vartheta + \omega \dot{x}'_1 \cos \vartheta)\mathbf{e}'_2 + (\omega \dot{x}'_2 \sin \vartheta)\mathbf{e}'_3. \quad (8.48)$$

Pomocí rovnosti (8.46) a výsledku (8.48) je možné přepsat rovnici (8.44) do následujícího tvaru

$$(\ddot{x}'_1, \ddot{x}'_2, \ddot{x}'_3) = (0, 0, -g) + 2(\omega \dot{x}'_2 \cos \vartheta, -\omega \dot{x}'_3 \sin \vartheta - \omega \dot{x}'_1 \cos \vartheta, \omega \dot{x}'_2 \sin \vartheta). \quad (8.49)$$

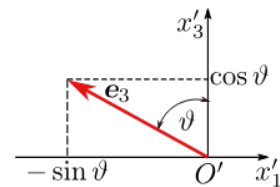
Vektorová rovnice (8.49) představuje následující tři složkové rovnice:

$$\ddot{x}'_1 = 2\omega \dot{x}'_2 \cos \vartheta, \quad (8.50)$$

$$\ddot{x}'_2 = -2\omega(\dot{x}'_3 \sin \vartheta + \dot{x}'_1 \cos \vartheta), \quad (8.51)$$

$$\ddot{x}'_3 = -g + 2\omega \dot{x}'_2 \sin \vartheta. \quad (8.52)$$

Soustava rovnic (8.50), (8.51), (8.52) představuje soustavu vázaných diferenciálních rovnic, kde parametrem vazby je úhlová rychlost ω . Pro případ, že $\omega = 0$ se soustava těchto rovnic redukuje na jedinou rovnici, která popisuje volný pád v inerciální vztažné soustavě. Uvedenou soustavu diferenciálních rovnic je sice možné vyřešit analyticky, avšak řešení je poměrně zdlouhavé. Využijeme-li skutečnosti, že $\omega \ll 1$, je možné řešit vektorovou diferenciální rovnici (8.44) či soustavu diferenciálních rovnic (8.50), (8.51), (8.52) za daných počátečních podmínek např. metodou postupných aproximací.



Příklad 8.2.1

Určete velikost a směr odchylky od těžnice při pádu těles z věže vysoké 100 m, která se nachází na 50° severní zeměpisné šířky (řešte metodou postupných aproximací).

⁶Skalární součiny ve vztahu (8.46) představují směrové kosiny.

Řešení:

Při řešení této úlohy vyjdeme z pohybové rovnice (8.45), kterou budeme řešit metodou postupných aproximací, což nám dovoluje skutečnost, že Coriolisova síla je slabá. Řešení budeme hledat ve tvaru:

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v}'^{(1)} + \mathbf{v}'^{(2)}, \quad (8.53)$$

pro které platí, že $|\mathbf{v}'^{(1)}| \gg |\mathbf{v}'^{(2)}|$. Řešení v prvním přiblížení (aproximaci) $\mathbf{v}'^{(1)}$ představuje řešení rovnice (8.45) při zanedbání Coriolisovy síly a řešení v druhém přiblížení $\mathbf{v}'^{(2)}$ představuje korekci působení Coriolisovy síly. Do pohybové rovnice (8.45) dosadíme za relativní rychlost ze vztahu (8.53):

$$\dot{\mathbf{v}}'^{(1)} + \dot{\mathbf{v}}'^{(2)} = \mathbf{g} - 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'^{(1)} - 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'^{(2)}. \quad (8.54)$$

S ohledem na výše uvedené předpoklady získáme z rovnice (8.54) následující diferenciální rovnice

$$\dot{\mathbf{v}}'^{(1)} = \mathbf{g}, \quad (8.55)$$

$$\dot{\mathbf{v}}'^{(2)} = -2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'^{(1)}, \quad (8.56)$$

přičemž díky skutečnosti, že Coriolisova síla je slabá a že $|\mathbf{v}'^{(1)}| \gg |\mathbf{v}'^{(2)}|$, jsme zanedbali vliv členu $2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'^{(2)}$.

Řešením rovnice (8.55) dostaneme, že

$$\mathbf{v}'^{(1)} = \mathbf{g}t + \mathbf{v}'_0, \quad (8.57)$$

kde integrační konstanta \mathbf{v}'_0 reprezentuje počáteční rychlost. Řešení (8.57) dosadíme do diferenciální rovnice (8.56):

$$\dot{\mathbf{v}}'^{(2)} = -2\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{g}t + \mathbf{v}'_0) = -2(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{g})t - 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'_0, \quad (8.58)$$

jejíž řešením dostaneme:

$$\mathbf{v}'^{(2)} = -2(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'_0)t - (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{g})t^2, \quad (8.59)$$

přičemž integrační konstantu volíme rovnu nule, protože počáteční rychlost jsme již uvažili ve výrazu pro $\mathbf{v}'^{(1)}$. Dosazením jednotlivých řešení (8.57) a (8.59) do předpokládaného tvaru řešení (8.53) dostáváme přibližné řešení pro relativní rychlost \mathbf{v}'

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v}'_0 + \mathbf{g}t - 2(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'_0)t - (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{g})t^2. \quad (8.60)$$

Jelikož $\mathbf{v}' = \dot{\mathbf{r}}'$, dostaneme jednoduchou integrací vztahu (8.60) následující přibližné řešení pro polohový vektor spojený s neinerciální souřadnicovou soustavou, tedy

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r}'_0 + \mathbf{v}'_0t + \frac{1}{2}\mathbf{g}t^2 - (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'_0)t^2 - \frac{1}{3}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{g})t^3, \quad (8.61)$$

kde integrační \mathbf{r}'_0 konstanta odpovídá počáteční poloze hmotného bodu vůči čárkované soustavě.

Řešení (8.61) představuje řešení pohybové rovnice (8.45) ve vektorovém tvaru. Použijeme-li vztahu (8.47), pak řešení (8.60) a (8.61) si můžeme vyjádřit pomocí složek jejich jednotlivých vektorových členů, tedy

$$\begin{aligned} (v'_1, v'_2, v'_3) &= (v'_{01}, v'_{02}, v'_{03}) + (0, 0, -g)t + \\ &+ 2\omega(v'_{02} \cos \vartheta, -v'_{03} \sin \vartheta - v'_{01} \cos \vartheta, v'_{02} \sin \vartheta)t + \omega(0, -g \sin \vartheta, 0)t^2, \end{aligned} \quad (8.62)$$

$$(x'_1, x'_2, x'_3) = (x'_{01}, x'_{02}, x'_{03}) + (v'_{01}, v'_{02}, v'_{03})t + \frac{1}{2}(0, 0, -g)t^2 + \omega(v'_{02} \cos \vartheta, -v'_{03} \sin \vartheta - v'_{01} \cos \vartheta, v'_{02} \sin \vartheta)t^2 + \frac{1}{3}\omega(0, -g \sin \vartheta, 0)t^3. \quad (8.63)$$

S ohledem na zadání můžeme napsat následující počáteční podmínky:

$$\mathbf{r}'_0 = (0, 0, h), \quad \mathbf{v}_0 = (0, 0, 0), \quad (8.64)$$

kde $h = 100$ m a uvažované zeměpisné šířce odpovídá $\vartheta = \vartheta_p = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$. Dosazením počátečních podmínek do řešení (8.62) a (8.63) dostaneme

$$(v'_1, v'_2, v'_3) = (0, 0, 0) + (0, 0, -g)t + (0, 0, 0)t + \omega(0, -g \sin \vartheta_p, 0)t^2, \quad (8.65)$$

$$(x'_1, x'_2, x'_3) = (0, 0, h) + (0, 0, 0)t + \frac{1}{2}(0, 0, -g)t^2 + \omega(0, 0, 0)t^2 + \frac{1}{3}\omega(0, -g \sin \vartheta_p, 0)t^3. \quad (8.66)$$

Z rovnice (8.66) můžeme přímo psát, že

$$x'_1 = 0, \quad (8.67)$$

$$x'_2 = -\frac{1}{3}\omega g t^3 \sin \vartheta_p, \quad (8.68)$$

$$x'_3 = h - \frac{1}{2}g t^2. \quad (8.69)$$

Položením levé strany rovnice (8.69) rovnou nule, můžeme z této rovnice určit dobu pádu, tj.

$$t_d = \sqrt{\frac{2h}{g}}. \quad (8.70)$$

Dosazením této doby do rovnice (8.70) dostaneme, že

$$x'_2 = -\frac{1}{3}\omega g t_d^3 \sin \vartheta_p = -\frac{1}{3}\omega g \left(\frac{2h}{g}\right)^{3/2} \sin \vartheta_p = -0,014 \text{ m}. \quad (8.71)$$

Takže místo dopadu bude mít souřadnice $(0; 0,014; 0)$ neboli odchylka od těžnice bude 1,4 cm východním směrem.

Pozn.: Řešení (8.60) a (8.61) představují obecná řešení pohybové rovnice (8.45) a tedy se dají použít pro různé typy zadání.

8.2.1 Projevy Coriolisovy síly na Zemi

Jelikož je Coriolisova síla na Zemi malá, bude se projevovat zejména u pohybů, které trvají dostatečně dlouho. Příkladem takového působení jsou tzv. **pasáty**, což jsou větry, které na obou polokoulích pravidelně vanou směrem k rovníku. Vlivem Coriolisovy síly se na severní polokouli stáčí doprava, tedy na západ. Na jižní polokouli se vlivem Coriolisovy síly pasáty stáčí doleva, tedy rovněž na západ. Z hlediska inerciální vztažné soustavy lze pohyb pasátů vysvětlit tak, že setrvávají v rovnoměrném přímočarém pohybu, zatímco Země se pod nimi otáčí

směrem na východ. Obecně pohyb vzdušných mas je ovlivňován mimo jiné právě pohybem Coriolisovy síly, takže tato síla je součástí řady meteorologických a klimatologických modelů. Např. vlivem rozdílných tlaků vniká vzdušné proudění, které by mělo směřovat od tlakové výše (anticyklóna) k tlakové níži (cyklóna), a tudíž by mělo být kolmé na izobary. Avšak vlivem Coriolisovy síly se toto proudění stáčí, na severní polokouli doprava, a tak výsledné proudění má spíše směr podél izobar. Podobně jsou Coriolisovou silou ovlivňovány i mořské proudy a řeky na Zemi. U velkých vodních toků se na severní polokouli více podemílají pravé břehy než levé. Nejlépe lze tuto skutečnost pozorovat u řek, které tečou na sever nebo jih, neboť v tomto případě pozorovaný jev neovlivňuje odstředivá síla.

Dalším významným případem, u kterého se projevuje vliv Coriolisovy síly, je postupné stáčení roviny kyvu kyvadla, jenž je k tomuto účelu vhodně zkonstruováno a nazývá se Foucaultovo kyvadlo. Samozřejmě se s vlivem Coriolisových sil na Zemi setkáváme ve vojenství, např. při výpočtu dopadu střel dalekonosných děl. V praxi se můžeme setkat s průtokoměry využívající projev Coriolisovy síly (Coriolisovy průtokoměry). Dalším případem účinků Coriolisových sil jsou koleje s převládajícím jednosměrným provozem, kdy se na severní polokouli více opotřebovává pravá kolejnice ve směru jízdy. S vlivem Coriolisovy síly je možné se také setkat např. u volně padajících těles z vysoké věže, kdy pozorujeme odklon od přímého směru pohybu, viz předchozí příklad. Dalším z projevů Coriolisovy síly, který se často demonstruje, souvisí se směrem otáčení vodního víru při vypouštění vody z umyvadla či jiné nádoby. Na severní polokouli se vír vody točí doleva a na jižní polokouli opačným směrem. Při demonstraci tohoto pokusu je nutné si však uvědomit, že výtok vody je citlivý na počáteční podmínky, a tak při rychlém vypouštění z klasického umyvadla může mít náhodný vznik pohybu víru na opačnou stranu silnější účinek než Coriolisova síla, čímž se pokus stane neprůkazným. Proto je k demonstraci vhodnější např. vana, u které není rychlost vypouštění tak velká, a tudíž se vzniklý vír otáčí zpravidla předpokládaným směrem.

Kapitola 9

Práce, výkon, impuls síly a mechanická energie

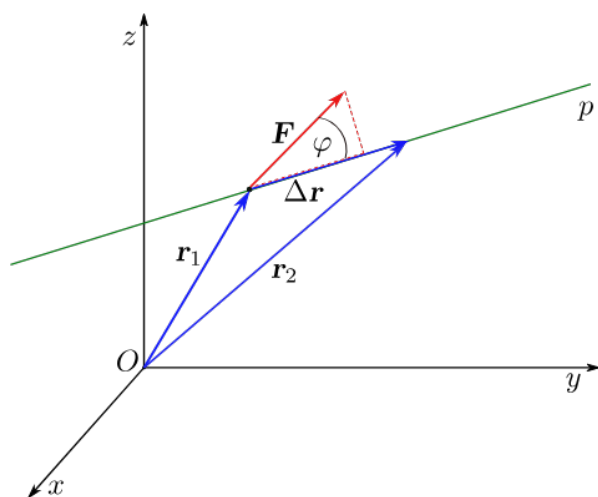
9.1 Práce, výkon a impuls síly

Když zmiňujeme, že člověk koná práci, tak zpravidla máme primárně na mysli skutečnost, že silou svých svalů přemísťuje nějaké předměty. Tedy v obvyklé řeči spojujeme pojem práce se silou a přemístěním. Podobně mechanickou práci definujeme i ve fyzice. Práci definujeme jako dráhový účinek síly, resp. sil.

9.1.1 Práce konstantní síly po přímce

Nejjednodušším případem je práce konstantní síly ($\mathbf{F} = \text{konst.}$) po přímce p , situace je zachycena na obr. 9.1.

Práce A konstantní síly je definována jako skalární součin vektoru síly \mathbf{F} a vektoru



Obrázek 9.1: Práce konstantní síly \mathbf{F} po úseku přímky $\Delta \mathbf{r}$.

posunutí $\Delta \mathbf{r}$ jejího působíště, tj.

$$A = \mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{r} = F s \cos \varphi = F_t s, \quad \text{kde} \quad s = |\Delta \mathbf{r}| = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1| \quad (9.1)$$

a φ je úhel, který svírá vektor síly \mathbf{F} s vektorem posunutí $\Delta \mathbf{r}$.

Práce A je tedy skalární fyzikální veličina, jejíž jednotkou je **joule**, kterou značíme J . Polohový vektor můžeme vyjádřit i pomocí parametru času, tj. $\mathbf{r}_1 \equiv \mathbf{r}(\alpha)$ a $\mathbf{r}_2 \equiv \mathbf{r}(\beta)$, kde $\beta > \alpha$. Časové okamžiky α , resp. β odpovídají časům, kdy se HB na přímce p nacházel v místě o polohovém vektoru \mathbf{r}_1 , resp. \mathbf{r}_2 . Potom vektor posunutí $\Delta \mathbf{r}$ můžeme vyjádřit jako $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(\beta) - \mathbf{r}(\alpha)$.

Z definice skalárního součinu vyplývá, že práce konstantní síly je rovna součinu velikosti posunutí a průmětu síly do směru posunutí F_t ($F_t = F \cos \varphi$), tedy $A = F_t s$. Je-li úhel mezi vektorem síly a vektorem posunutí ostrý, koná síla **kladnou** práci a v tomto případě se síla nazývá **hybná**. Je-li úhel mezi vektorem síly a vektorem posunutí tupý, koná síla práci **zápornou** a v tomto případě se síla nazývá **odporem proti pohybu**, příp. **odporující silou**. Svírají-li vektor síly a vektor posunutí úhel $\pi/2$, tj. jsou na sebe kolmé, pak z definice skalárního součinu rovněž plyne, že práce síly je rovna **nule**. Tedy rozložíme-li sílu na tečnou složku \mathbf{F}_t (složka ve směru posunutí) a normálovou složku \mathbf{F}_n , pak normálová složka práci **nekoná**.

Uvažujeme-li kartézský souřadnicový systém, pak $\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z)$ a $\Delta \mathbf{r} = (\Delta x, \Delta y, \Delta z)$, takže vztah (9.1) můžeme vyjádřit v následujícím složkovém tvaru:

$$A = \mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{r} = F_x \Delta x + F_y \Delta y + F_z \Delta z . \quad (9.2)$$

Jelikož pro skalární součin platí distributivní zákon, můžeme psát, že

$$\mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{r} = (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{F}_N) \cdot \Delta \mathbf{r} = \mathbf{F}_1 \cdot \Delta \mathbf{r} + \mathbf{F}_2 \cdot \Delta \mathbf{r} + \dots + \mathbf{F}_N \cdot \Delta \mathbf{r} . \quad (9.3)$$

Z rovnosti (9.3) vyplývá, že práce výslednice sil \mathbf{F} je rovna algebraickému součtu prací jednotlivých konstantních sil, které působí na tentýž hmotný bod.

Rovněž na základě distributivního zákona platí, že

$$\mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{r}^{(1)} + \mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{r}^{(2)} + \dots + \mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{r}^{(N-1)} = \mathbf{F} \cdot (\Delta \mathbf{r}^{(1)} + \Delta \mathbf{r}^{(2)} + \dots + \Delta \mathbf{r}^{(N-1)}) = \mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{r} , \quad (9.4)$$

kde $\Delta \mathbf{r}^{(i)} = \mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i$, $i = 1, \dots, N-1$.

Tedy rovnost (9.4) vyjadřuje skutečnost, že práci, kterou vykoná konstantní síla \mathbf{F} po sobě provedenými posunutími $\Delta \mathbf{r}^{(1)}$, $\Delta \mathbf{r}^{(2)}$, ..., $\Delta \mathbf{r}^{(N)}$ příslušného hmotného bodu, je rovna práci, kterou by tato síla vykonala při jednom posunutí, které představuje výslednici všech posunutí $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_N - \mathbf{r}_1$.

9.1.2 Práce obecné síly po křivce

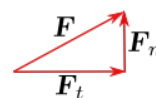
Uvažujme, že se HB pohybuje po úseku křivky (oblouku) $\mathcal{C} : \mathbf{r}(t)$, kterou vyjadřujeme parametricky pomocí času, přičemž bude platit, že $t \in \langle \alpha; \beta \rangle$. Sílu konající práci po úseku křivky chápeme jako obecnou sílu, čímž myslíme, že může záviset na poloze, rychlosti HB a explicitně na čase, tedy $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r}(t), \mathbf{v}(t), t)$.

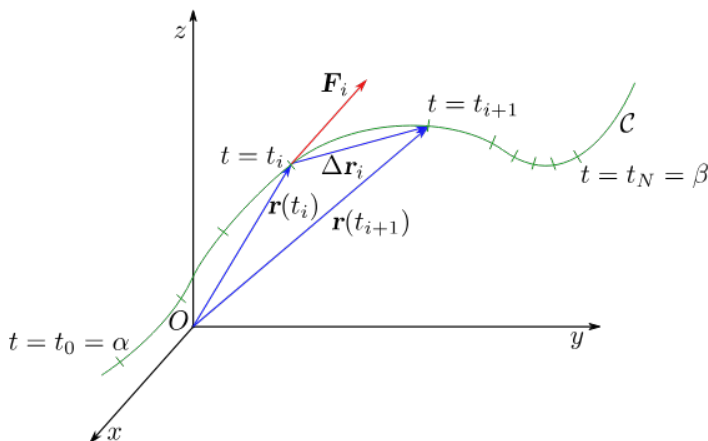
Zvolíme-li dostatečně jemné dělení časového intervalu $\langle \alpha; \beta \rangle$:

$\mathcal{D} = \{t_0, t_1, \dots, t_N\}$, $\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_N = \beta$, potom v každém intervalu $\langle t_i; t_{i+1} \rangle$ lze považovat sílu \mathbf{F} za téměř konstantní a nahradit ji silou v počátečním okamžiku tohoto intervalu, tj.

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r}(t), \mathbf{v}(t), t) \approx \mathbf{F}(\mathbf{r}(t_i), \mathbf{v}(t_i), t_i) \equiv \mathbf{F}_i , \quad t \in \langle t_i; t_{i+1} \rangle . \quad (9.5)$$

Místo značení práce A (z němčiny Arbeit) se někdy v literatuře používá značení W (z angličtiny Work).





Obrázek 9.2: Práce obecné síly \mathbf{F} po úseku křivky \mathcal{C} pro jemné dělení časového intervalu $\langle \alpha; \beta \rangle$.

Na obr. 9.2 je zachycena uvažovaná situace. V časové intervalu $\langle t_i; t_{i+1} \rangle$, tj mezi body $\mathbf{r}(t_i)$ a $\mathbf{r}(t_{i+1})$, viz obr. 9.2, vykoná síla \mathbf{F} práci ΔA_i , která je přibližně rovna

$$\Delta A_i \approx \mathbf{F}(\mathbf{r}(t_i), \mathbf{v}(t_i), t_i) \cdot \Delta \mathbf{r}_i = \mathbf{F}(\mathbf{r}(t_i), \mathbf{v}(t_i), t_i) \cdot \frac{\mathbf{r}(t_{i+1}) - \mathbf{r}(t_i)}{t_{i+1} - t_i} \Delta t_i, \quad \Delta t_i = t_{i+1} - t_i. \quad (9.6)$$

Celková práce po úseku křivky \mathcal{C} vymezeném časovým intervalem $\langle \alpha; \beta \rangle$ je dána následujícím součtem:

$$A(\mathcal{C}) = \sum_{i=0}^{N-1} \Delta A_i \approx \sum_{i=0}^{N-1} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t_i), \mathbf{v}(t_i), t_i) \cdot \frac{\mathbf{r}(t_{i+1}) - \mathbf{r}(t_i)}{t_{i+1} - t_i} \Delta t_i. \quad (9.7)$$

Zavedeme si normu $\mathcal{Q}(\mathcal{D})$ představující kritérium jemnosti dělení (velikost nejmenšího dílku) na časovém intervalu $\langle \alpha; \beta \rangle$ jako

$$\mathcal{Q}(\mathcal{D}) = \max\{\Delta t_i | i \in \{0, 1, \dots, N-1\}\}. \quad (9.8)$$

Pro $\mathcal{Q}(\mathcal{D}) \rightarrow 0$ přechází diskrétně indexovaná proměnná t_i v proměnnou spojitou t , čímž přejde sumace ve vztahu (9.7) v integraci:

$$A(\mathcal{C}) = \lim_{\mathcal{Q}(\mathcal{D}) \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{N-1} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t_i), \mathbf{v}(t_i), t_i) \cdot \frac{\mathbf{r}(t_{i+1}) - \mathbf{r}(t_i)}{t_{i+1} - t_i} \Delta t_i = \int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t), \mathbf{v}(t), t) \cdot \mathbf{v}(t) dt. \quad (9.9)$$

Tedy

$$A(\mathcal{C}) = \int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t), \mathbf{v}(t), t) \cdot \mathbf{v}(t) dt \quad \text{či zkráceně} \quad A(\mathcal{C}) = \int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} dt. \quad (9.10)$$

Protože $d\mathbf{r} = \mathbf{v}(t)dt$, tak lze také práci po křivce vyjádřit jako

$$A(\mathcal{C}) = \int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t), \mathbf{v}(t), t) \cdot \mathbf{v}(t) dt = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t), \dot{\mathbf{r}}(t), t) \cdot d\mathbf{r}, \quad (9.11)$$

kde polohové vektory $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}(\alpha)$ a $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}(\beta)$ vymezují úsek na křivce \mathcal{C} .

Často zapisujeme vztah pro práci obecné síly po křivce \mathcal{C} ve zkráceném tvaru:

$$A(\mathcal{C}) = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}, \quad (9.12)$$

kde \mathbf{F} reprezentuje obecnou sílu či výslednici sil a tento integrál představuje křivkový integrál druhého druhu vektorové funkce \mathbf{F} .

Budeme-li předpokládat nekonečně malé (infinitesimální, resp. elementární) posunutí $d\mathbf{r}$, potom na základě vztahu (9.12) dostáváme vztah pro **elementární práci**:

$$dA = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = F ds \cos \varphi. \quad (9.13)$$

V případě kartézských souřadnic můžeme element práce vyjádřit jako

$$dA = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = (F_x, F_y, F_z) \cdot (dx, dy, dz) = F_x dx + F_y dy + F_z dz. \quad (9.14)$$

Při výpočtu křivkového integrálu je třeba mít na paměti, že budeme-li provádět integraci po té samé křivce, ale v opačném směru, pak bude platit, že

$$\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \int_{\mathbf{r}_2}^{\mathbf{r}_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}. \quad (9.15)$$

Příklad 9.1.1

Uvažujte sílu, $\mathbf{F} = (av(t), 0, 0)$, kde $v(t)$ je velikost rychlosti HB, který se pohybuje po přímce a jeho rychlost je dána vztahem: $\mathbf{v}(t) = (bt, 0, 0)$. Spočítejte práci, kterou tato síla vykoná za časový interval $\langle 0; T \rangle$.

Řešení:

Při výpočtu práce vyjdeme ze vztahu (9.11), přičemž ze zadání víme, že se HB pohybuje po dráze (viz vztah (6.37)):

$$\mathbf{r}(t) = \int_{t_0=0}^t \mathbf{v}(t') dt' = \int_{t_0=0}^t (bt', 0, 0) dt' = \left(\frac{bt^2}{2}, 0, 0 \right).$$

Tedy HB se pohybuje po přímce splývající s osou x . Dále víme ze zadání, že $|\mathbf{v}(t)| \equiv v(t) = bt$, takže

$$A(\text{úsečka}) = \int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} dt = \int_0^T (abt, 0, 0) \cdot (bt, 0, 0) dt = ab^2 \int_0^T t^2 dt = \frac{ab^2 T^3}{3}.$$

9.1.3 Kinetická energie

Uvažujme hmotný bod o hmotnosti m , na který působí síla \mathbf{F} , pak můžeme napsat jeho pohybovou rovnici v následujícím tvaru:

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}, \quad (9.16)$$

kde \mathbf{v} je rychlost uvažovaného hmotného bodu v čase t (okamžitá rychlost). V tomto místě neklademe žádná omezení, co se týče působící síly \mathbf{F} . Skalárně vynásobíme pohybovou rovnici (9.16) rychlostí \mathbf{v} uvažovaného hmotného bodu, takže dostaneme

$$m\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} . \quad (9.17)$$

Pro další úpravu levé strany rovnice (9.17) provedeme derivaci skalárního součinu

$$\frac{dv^2}{dt} = \frac{d(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})}{dt} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} = 2\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} . \quad (9.18)$$

Odtud

$$\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{1}{2} \frac{dv^2}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{v^2}{2} \right) . \quad (9.19)$$

S ohledem na skutečnost, že $m = konst.$, můžeme levou stranu rovnice (9.17) pomocí rovnosti (9.19) upravit následujícím způsobem:

$$m\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}mv^2 \right) ,$$

můžeme pomocí této rovnosti upravit rovnici (9.17)

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}mv^2 \right) = \frac{dT}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} , \quad (9.20)$$

kde

$$T = \frac{1}{2}mv^2 \quad (9.21)$$

je tzv. **kinetická energie** (pohybová energie) hmotného bodu.

Z rovnosti (9.20) a (9.13) vyplývá, že

$$dT = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}dt = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = dA . \quad (9.22)$$

a odtud integrací dostáváme, že

$$T_2 - T_1 = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}dt = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = A(\mathcal{C}) , \quad (9.23)$$

kde A je práce vykonaná přemístěním hmotného bodu z místa o polohovém vektoru $\mathbf{r}_1(t_1)$ do místa o polohovém vektoru $\mathbf{r}_2(t_2)$ po trajektorii, jíž odpovídá křivka \mathcal{C} . T_1 je kinetická energie hmotného bodu v čase $t = t_1$ a T_2 je kinetická energie hmotného bodu v čase $t = t_2$, přičemž s časem je svázána jak poloha, tak rychlost uvažovaného hmotného bodu.

Je nutné si uvědomit skutečnost, že obecně hodnota vykonané práce A závisí na zvolené cestě (křivce), po které se hmotný bod pohyboval neboli pro různé cesty vymezené stejnými body \mathbf{r}_1 a \mathbf{r}_2 získáme **rozdílné** hodnoty vykonané práce. Odtud vyplývá, že elementární práce (9.13) obecně nepředstavuje úplný diferenciál, jak je tomu v případě kinetické energie dT , ale neúplný diferenciál. To znamená, že k určení hodnoty vykonané práce nám stačí znát kinetickou energii v počátečním a koncovém bodě, kdežto k určení vykonané práce obecnou silou po křivce musíme spočítat hodnotu křivkového integrálu

$$A(\mathcal{C}) = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} , \quad (9.24)$$

přičemž potřebujeme znát křivku \mathcal{C} , po které se pohyboval uvažovaný hmotný bod a tedy cestu, podle které provedeme příslušnou integraci.

Můžeme konstatovat, že na změnu rychlosti hmotného bodu (urychlení), musíme vykonat práci a tato práce je uchována ve formě kinetické energie.

V následujícím příkladu je ukázána skutečnost, že obecně hodnota práce závisí na zvolené cestě.

Příklad 9.1.2

Určete práci, kterou vykoná silové pole $\mathbf{F} = (axy, by)$ při přemístění tělesa z bodu $\mathbf{r}_1 = (0, 0)$ do bodu $\mathbf{r}_2 = (3, 9)$ a) po parabole $y = x^2$, b) po přímce $y = 3x$. Necht' rozměrové konstanty jsou jednotkové, tj. $a = 1 \text{ Nm}^{-2}$, $b = 1 \text{ Nm}^{-1}$.

Řešení:

a) Práce po parabole

Nejdříve provedeme parametrizaci paraboly pomocí času:

$$\mathcal{P} : \mathbf{r}(t) = (u_a t, u_b t^2), \quad u_a = 1 \text{ ms}^{-1}, \quad u_b = 1 \text{ ms}^{-2}, \quad t \in \langle 0; 3 \rangle.$$

Odtud $\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t) = (u_a, 2u_b t)$ a $\mathbf{F} = (au_a u_b t^3, bu_b t^2)$, kam dosadíme za rozměrové konstanty a a b .

Pak práci spočítáme podle vztahu (9.10):

$$\begin{aligned} A(\text{parabola}) &= \int_0^3 \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} dt = \int_0^3 (t^3, t^2) \cdot (1, 2t) dt = \int_0^3 (t^3 + 2t^3) dt = \\ &= \int_0^3 3t^3 dt = \frac{3}{4} [t^4]_0^3 = \frac{243}{4} \text{ J}. \end{aligned}$$

b) Práce po přímce

Nejdříve provedeme parametrizaci přímky pomocí času:

$$\mathcal{P} : \mathbf{r}(t) = (u_c t, u_d t), \quad u_c = 1 \text{ ms}^{-1}, \quad u_d = 3 \text{ ms}^{-1}, \quad t \in \langle 0; 3 \rangle.$$

Odtud $\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t) = (u_c, u_d)$ a $\mathbf{F} = (au_c u_d t^2, bu_d t)$, kam dosadíme za rozměrové konstanty.

Pak práci spočítáme podle vztahu (9.10):

$$\begin{aligned} A(\text{přímka}) &= \int_0^3 \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} dt = \int_0^3 (3t^2, 3t) \cdot (1, 3) dt = \int_0^3 (3t^2 + 9t) dt = \\ &= [t^3]_0^3 + \frac{9}{2} [t^2]_0^3 = \frac{135}{2} \text{ J}. \end{aligned}$$

Odtud vidíme, že práce po dvou různých cestách mezi stejnými body se pro zvolenou sílu liší.

Pozn.: Při parametrizaci, kdy parametrem je čas, z fyzikálního hlediska znamená, že HB projde po téže geometrické křivce obecně v různých časových intervalech a různě rychle. Avšak při volbě jiné parametrizace bychom dospěli ke stejným výsledkům. Kdybychom například parametrizovali uvažovanou parabolu jako

$$\mathcal{P} : \mathbf{r}(t) = (u_e \sqrt{t - t_0}, u_f (t - t_0)), \quad u_e = 1 \text{ ms}^{-\frac{1}{2}}, \quad u_f = 1 \text{ ms}^{-1}, \quad t_0 = 1 \text{ s}, \quad t \in \langle 1; 10 \rangle.$$

Odtud

$$\mathbf{v}(t) = \left(\frac{u_e}{2\sqrt{t-t_0}}, u_f \right), \quad \mathbf{F} = (au_e u_f (t-t_0)\sqrt{t-t_0}, bu_f (t-t_0)),$$

kam dosadíme za rozměrové konstanty. Pak práci spočítáme podle vztahu (9.10):

$$\begin{aligned} A(\text{parabola}) &= \int_1^{10} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} dt = \int_1^{10} ((t-1)\sqrt{t-1}, (t-1)) \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{t-1}}, 1 \right) dt = \\ &= \int_1^{10} \left(\frac{t-1}{2} + t-1 \right) dt = \left[\frac{3}{4}t^2 - \frac{3}{2}t \right]_1^{10} = \frac{243}{4} \text{ J}. \end{aligned}$$

Tedy výsledek je shodný s výsledkem při původní parametrizaci. Vzhledem k tomu, že volba parametrizace neovlivňuje výsledek, tak volíme parametrizaci takovou, aby byl výpočet práce co nejjednodušší.

9.1.4 Výkon a impulz síly

Z hlediska technických aplikací je práce důležitá nejen sama o sobě, nýbrž je důležitý i poměr práce a doby, za kterou byla vykonána. Je zřejmé, že ze dvou strojů, které vykonávají tu samou práci, je ekonomicky cennější ten, který tuto práci vykoná za kratší dobu. Abychom mohli posoudit práci s ohledem na dobu potřebnou k jejímu vykonání, zavádíme novou fyzikální veličinu, tzv. **výkon**. Podíl vykonané práce ΔA za dobu Δt definuje tzv. **průměrný výkon**

$$\bar{P} = \frac{\Delta A}{\Delta t}. \quad (9.25)$$

Výkon měříme jednotkou zvanou **watt** která má značku **W**.

Kromě průměrného výkonu definujeme ještě **okamžitý výkon**

$$P = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{dA}{dt} = \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = F_x \dot{x} + F_y \dot{y} + F_z \dot{z}, \quad (9.26)$$

kde $\mathbf{v} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ je okamžitá rychlost, kterou síla \mathbf{F} přemísťuje hmotný bod (těleso). Nutno připomenout, že normálová složka síly, jež je kolmá ke směru pohybu, a tedy k rychlosti, nekoná práci a má tudíž nulový výkon.

Další fyzikální veličinou, která souvisí se silou, je **impuls síly**. Impuls síly vyjadřuje časový účinek síly a budeme ho značit **I**. Nechť na HB působí síla obecně závislá na čase, tj. $\mathbf{F} = \mathbf{F}(t)$. Podle Zákona síly (2. Newtonův zákon) platí, že

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}(t). \quad (9.27)$$

Odtud lze spočítat změnu hybnosti hmotného bodu, kterou uvažovaná síla způsobí za časový interval $\langle \alpha; \beta \rangle$:

$$\Delta \mathbf{p} = \int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{F}(t) dt. \quad (9.28)$$

Během posunu působí síla po elementu křivky považujeme sílu za neproměnnou.

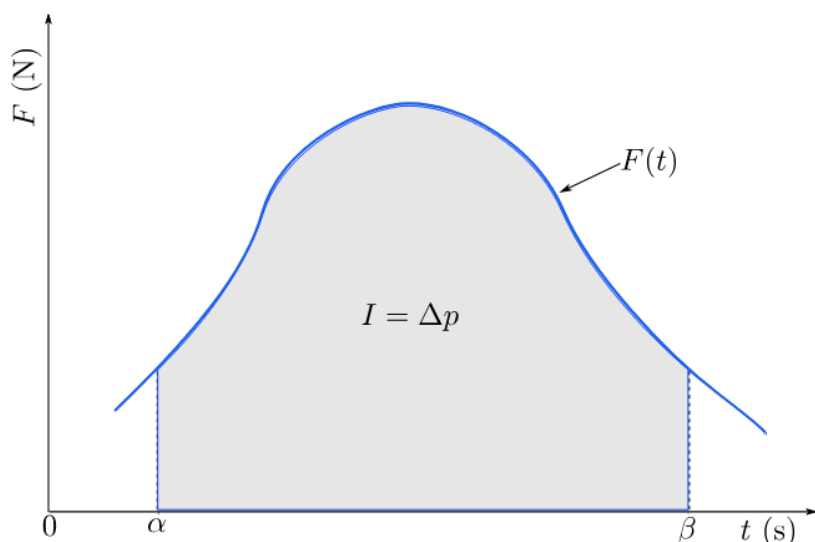
Změna hybnosti, kterou uvažovaná síla způsobí za časový interval $\langle \alpha; \beta \rangle$, je rovna impulzu síly:

$$\mathbf{I} = \int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{F}(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d\mathbf{p}}{dt} dt = \int_{\mathbf{p}(\alpha)}^{\mathbf{p}(\beta)} d\mathbf{p} = \mathbf{p}(\beta) - \mathbf{p}(\alpha). \quad (9.29)$$

Předpokládejme, že uvažovaná síla mění v časovém intervalu $\langle \alpha; \beta \rangle$ jen svoji velikost a její orientace zůstává stejná, tedy $\mathbf{F}(t) = F(t)\mathbf{F}^0$, kde $\mathbf{F}^0 = \text{konst.}$ je jednotkový vektor síly a $F(t) \equiv |\mathbf{F}(t)|$. Potom jednotkový vektor hybnosti \mathbf{I}^0 bude totožný s jednotkovým vektorem síly, tj. $\mathbf{I}^0 \equiv \mathbf{F}^0$. Pak pro velikost hybnosti bude platit:

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} F(t) dt = \Delta p. \quad (9.30)$$

Na obr. 9.3 je zachycen časový průběh velikosti působící síly. Z tohoto obrázku



Obrázek 9.3: Časová závislost velikosti síly působící na HB v časovém intervalu $\langle \alpha; \beta \rangle$.

vidíme, že velikost impulzu síly, a tedy i velikost změny hybnosti, pro časový interval $\langle \alpha; \beta \rangle$ odpovídá ploše pod grafem. Odtud je zřejmé, že budeme-li chtít zajistit stejnou velikost změny hybnosti v kratším časovém intervalu, pak je nutné působit na HB daleko větší silou, aby plocha pod grafem byla stejná. Tedy k dosažení rychlé změny velikosti hybnosti je nutné použít velmi velké síly. I působením malé síly je možné dosáhnout požadované změny velikosti hybnosti, pakliže máme k tomu dostatek času.

9.2 Rozdělení sil a mechanická energie

Síly, se kterými ve fyzice pracujeme, je možné rozdělit následujícím způsobem:

1. Síly **gyroskopické** \mathbf{F}_{Gy} , což jsou síly, které závisí lineárně na rychlosti hmotného bodu a mají směr kolmý na tuto rychlost, z čehož na základě vztahu

(9.26) vyplývá, že výkon gyroskopických sil je vždy roven nule, neboť

$$\frac{dA}{dt} = \mathbf{F}_{Gy} \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (9.31)$$

S ohledem na vztah (9.10) můžeme také konstatovat, že gyroskopické síly nekonají práci.

Příkladem gyroskopické síly je síla Coriolisova či magnetická síla.

2. Síly **disipativní** \mathbf{F}_{Dis} , což jsou síly, které jsou namířené proti směru pohybu hmotného bodu. Disipativní síla se dá zapsat ve tvaru:

$$\mathbf{F}_{Dis} = -\lambda \mathbf{v}, \quad (9.32)$$

kde λ je kladná skalární funkce, která může obecně záviset na poloze a na rychlosti hmotného bodu. Pomocí těchto sil se projevuje odpor prostředí při pohybu hmotných bodů či těles ve spojitém prostředí (tekutinách) nebo při vzájemném styku těles. Obecný zákon působení těchto sil nebyl dosud nalezen, takže se zpravidla využívá následujícího empirického vzorce:

$$\mathbf{F}_{Dis} = -\lambda(v) \mathbf{v} = -k v^{n-1} \mathbf{v} = -k v^n \mathbf{v}^0, \quad (9.33)$$

kde k značí konstantu úměrnosti, exponent n nabývá nezáporných hodnot a \mathbf{v}^0 je jednotkový vektor tečný k dráze. Fyzikálními příčinami vzniku těchto sil jsou:

- (a) interakce mezi dotýkajícími se plochami pevných těles
- (b) viskozita, tj. působení třecích sil ve vrstvách tekutiny, s nimiž dochází do styku povrch tělesa,
- (c) tlakový odpor, tj. výslednice tlaků v tekutině, které působí na povrch tělesa,
- (d) vlnový odpor, tj. způsobený ztrátami energie v důsledku vzniku vlnění prostředí při pohybu tělesa v něm. Uplatňuje se zejména při řešení pohybu lodí, kdy každá vlna způsobená lodí odnáší energii, která musí být nahrazena jinou formou energie, např. motorem.

3. síly **potenciálové**, což jsou síly, které lze vyjádřit jako

$$\mathbf{F} = -\nabla U, \quad (9.34)$$

kde U je skalární funkce (pole), kterou nazýváme **potenciální energie** hmotného bodu. Je-li potenciální energie pouze funkcí polohy, tj. $U = U(\mathbf{r})$, potom sílu s ní spojenou vztahem (9.34) nazýváme **stacionární potenciálovou silou**, je-li potenciální energie navíc funkcí času, tj. $U = U(\mathbf{r}, t)$, potom sílu s ní spojenou vztahem (9.34) nazýváme **nestacionární potenciálovou silou**¹.

¹Příkladem takovéto síly může být pole časově proměnného náboje nebo pole nabíjeného či vybíjeného kondenzátoru.

Pro úplný diferenciál potenciální energie $U = U(\mathbf{r}, t)$ je možné psát, že

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz + \frac{\partial U}{\partial t}dt = \nabla U \cdot d\mathbf{r} + \frac{\partial U}{\partial t}dt. \quad (9.35)$$

Odtud

$$\nabla U \cdot d\mathbf{r} = dU - \frac{\partial U}{\partial t}dt. \quad (9.36)$$

Na základě vztahů (9.34) a (9.36) je možné vyjádřit element práce (9.13) jako

$$dA = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\nabla U \cdot d\mathbf{r} = -dU + \frac{\partial U}{\partial t}dt, \quad (9.37)$$

odtud pak s ohledem na vztah (9.36) dostáváme okamžitý výkon nestacionární potenciálové síly:

$$\frac{dA}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = -\nabla U \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = -\nabla U \cdot \mathbf{v} = -\frac{dU}{dt} + \frac{\partial U}{\partial t}. \quad (9.38)$$

Předpokládejme, že na hmotný bod působí nestacionární potenciálová síla, disipativní síla a gyroskopická síla, takže jejich výslednicí je síla:

$$\mathbf{F} = -\nabla U + \mathbf{F}_{Gy} + \mathbf{F}_{Dis}. \quad (9.39)$$

S uvážením vztahu (9.38) můžeme pro okamžitý výkon výslednice uvažovaných sil (9.39) psát, že

$$\frac{dA}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = -\nabla U \cdot \mathbf{v} + \underbrace{\mathbf{F}_{Gy} \cdot \mathbf{v}}_{=0} + \mathbf{F}_{Dis} \cdot \mathbf{v} = -\frac{dU}{dt} + \frac{\partial U}{\partial t} + \mathbf{F}_{Dis} \cdot \mathbf{v}. \quad (9.40)$$

Ze vztahu (9.22) vyplývá rovnost:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dT}{dt}, \quad (9.41)$$

s jejíž pomocí můžeme dále upravit výraz (9.40) následujícím způsobem:

$$\frac{d(T + U)}{dt} = \frac{\partial U}{\partial t} + \mathbf{F}_{Dis} \cdot \mathbf{v}. \quad (9.42)$$

Součet kinetické a potenciální energie představuje celkovou mechanickou energii a budeme ji značit E , tedy $E = T + U$. Takže můžeme tímto přepsat rovnici (9.42) jako

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\partial U}{\partial t} + \mathbf{F}_{Dis} \cdot \mathbf{v}, \quad (9.43)$$

resp. s ohledem na vztah (9.32)

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\partial U}{\partial t} - \lambda v^2. \quad (9.44)$$

Z rovnice pro časovou změnu celkové mechanické energie (9.43), resp. (9.44) je vidět, že gyroskopické síly celkovou mechanickou energii nemění, a že časová změna celkové mechanické energie je dána časovou změnou potenciální energie a existencí

(okamžitým výkonem) disipativních sil. S ohledem na vztah (9.32) je zřejmé, že okamžitý výkon disipativních sil je vždy záporný ($\lambda > 0$), takže disipativní síly se podílejí na poklesu celkové mechanické energie.

Jedná-li se o stacionární síly ($\partial U / \partial t = 0$), pak ze vztahu (9.44) plyne, že

$$\frac{dE}{dt} = -\lambda v^2 < 0, \quad (9.45)$$

tedy časová změna celkové mechanické energie je spojena pouze s jejím úbytkem. Nepůsobí-li na hmotný bod disipativní síly ($\mathbf{F}_{Dis} = \mathbf{0}$) a současně platí, že potenciálové síly jsou stacionární, potom ze vztahu (9.45) dostaneme:

$$\frac{dE}{dt} = 0 \Rightarrow E = konst., \text{ resp. } T + U = konst. \quad (9.46)$$

Vztah (9.46) vyjadřuje **Zákon zachování mechanické energie**. Jelikož se celková mechanická energie E zachovává, neboli konzervuje, nazývají se stacionární potenciálové síly jako síly **konzervativní**, resp. pole těchto sil se nazývá **konzervativním silovým polem**. Jelikož konzervativní síly hrají ve fyzice zásadní význam, budeme se jimi dále zabývat.

Na základě definice totálního (úplného) diferenciálu a vztahu (9.34) můžeme psát, že

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\nabla U \cdot d\mathbf{r} = -dU, \quad (9.47)$$

u kterého je nutné připomenout, že pro konzervativní síly je potenciální energie pouze funkcí polohy, tj. $U = U(\mathbf{r})$. Z tohoto důvodu nazýváme takovou potenciální energii také jako **polohová energie**.

Při konečném přemístění hmotného bodu z místa o polohovém vektoru \mathbf{r}_1 do místa o polohovém vektoru \mathbf{r}_2 po nějaké křivce \mathcal{C} vykonáme, s ohledem na vztah (9.47) práci:

$$A(\mathcal{C}) = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \int_{U(\mathbf{r}_1)}^{U(\mathbf{r}_2)} dU = U(\mathbf{r}_1) - U(\mathbf{r}_2). \quad (9.48)$$

Odtud vyplývá, že budou-li konzervativní síly konat práci po libovolné uzavřené křivce, tudíž počáteční a koncový pod je stejný, potom na základě vztahu (9.48) můžeme říct, že vykonaná práce bude rovna nule, tj. $A = U(\mathbf{r}_1) - U(\mathbf{r}_1) = 0$. Tuto skutečnost je možné zapsat jako

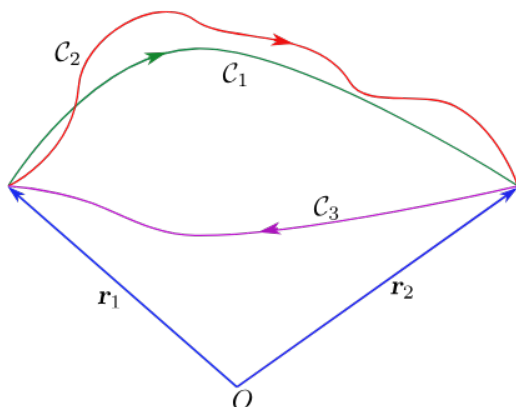
$$A(\mathcal{C}) = \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0. \quad (9.49)$$

Vztah (9.49) je vyjádřením faktu, že koná-li konzervativní síla práci po libovolné uzavřené křivce, pak se její práce rovná nule neboli cirkulace vektoru konzervativní síly podél libovolné křivky je rovna nule.

Uvažujme práci konzervativní síly po dvou uzavřených křivkách \mathcal{C}_A a \mathcal{C}_B , které se sestávají ze dvou libovolných křivek, tj. $\mathcal{C}_A = \mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_3$ a $\mathcal{C}_B = \mathcal{C}_2 + \mathcal{C}_3$, viz obr. 9.4. Potom s ohledem na rovnost (9.49) musí platit:

$$0 = A(\mathcal{C}_A) = A(\mathcal{C}_1) + A(\mathcal{C}_3) = A(\mathcal{C}_2) + A(\mathcal{C}_3) = A(\mathcal{C}_B) = 0 \Rightarrow A(\mathcal{C}_1) = A(\mathcal{C}_2). \quad (9.50)$$

Z výsledku je zřejmé, že v případě práce konzervativních sil nezáleží na cestě, po které se jejich práce koná. Z rovnosti tedy (9.48) vyplývá, že v případě konzervativních sil práce závisí pouze na rozdílu hodnot potenciálních energií v počátečním



Obrázek 9.4: Práce konzervativní síly po různých křivkách mezi body \mathbf{r}_1 a \mathbf{r}_2 .

a koncovém bodě, přičemž tento výsledek není ovlivněn cestou (křivkou), po které byl hmotný bod přesouván, neboli v případě konzervativních sil nezávisí hodnota vykonané práce na křivce, po které se uvažovaný hmotný bod přemístil z bodu o polohovém vektoru \mathbf{r}_1 do bodu o polohovém vektoru \mathbf{r}_2 , ale jen na poloze těchto bodů.

Ověřit konzervativnost silového pole na základě vztahu (9.49) je ovšem komplikované, protože nikdy si nemůžete být jisti tím, že pro zcela určitou křivku či oblouk, po které jsme příslušný integrál druhého druhu ještě nepočítali, uvedené vztahy platí.

Kritérium konzervativnosti silového pole dostaneme použitím Stokesovy věty (teorému), který zní:

Stokesova věta

Nechť S je po částech hladká orientovaná plocha v \mathbb{R}^3 s hranicí ∂S . Jestliže vektorové pole \mathbf{A} je definováno a má spojité první parciální derivace v oblasti obsahující S , pak

$$\iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = \oint_{\partial S} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}. \quad (9.51)$$

Integrand v plošném integrálu $\nabla \times \mathbf{A}$ představuje operaci zvanou **rotace** vektorové funkce \mathbf{A} a v případě uvažování kartézských souřadnic je tato operace dána jako

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \mathbf{k}. \quad (9.52)$$

V našem případě je vektorové pole \mathbf{A} dáno konzervativním silovým polem \mathbf{F} a hranice plochy $\partial S \equiv \mathcal{C}$. Zavedeme úmluvu, že ∂S budeme zapisovat jako $\mathcal{C}(S)$. Pomocí Stokesovy věty můžeme rovnost (9.49) vyjádřit následujícím způsobem:

$$\oint_{\mathcal{C}(S)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = 0. \quad (9.53)$$

Jelikož křivka \mathcal{C} ohraničující plochu S je libovolnou křivkou, tak plošný integrál ve vztahu (9.53) roven nule, pakliže

$$\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}. \quad (9.54)$$

Vztah (9.54) je nutnou a postačující podmínkou konzervativnosti silového pole. V následujícím příkladu je ukázána skutečnost, že obecně hodnota práce závisí na zvolené cestě.

Příklad 9.2.1

Rozhodněte, zda silové pole $\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z) = (3ax^2y^2, 2bx^3y, 0)$ je polem konzervativním. Nechť rozměrové konstanty jsou jednotkové, tj. $a = 1 \text{ Nm}^{-4}$, $b = 1 \text{ Nm}^{-4}$.

Řešení:

Použijeme kritérium (9.54):

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3x^2y^2 & 2x^3y & 0 \end{vmatrix} = \\ &= \left(\frac{\partial 0}{\partial y} - \frac{\partial 2x^3y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial 3x^2y^2}{\partial z} - \frac{\partial 0}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial 2x^3y}{\partial x} - \frac{\partial 3x^2y^2}{\partial y} \right) \mathbf{k} \\ &= 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + (6x^2y - 6x^2y)\mathbf{k} = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Protože $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$, jedná se o konzervativní silové pole.

Ze vztahu (9.47) můžeme psát, že

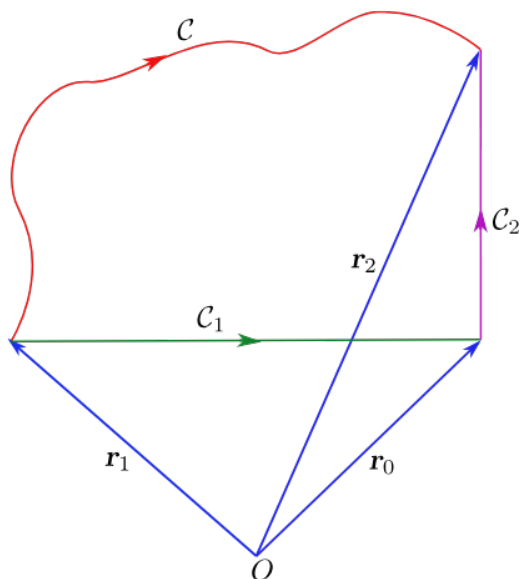
$$dU = -\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}. \quad (9.55)$$

Potenciální energii U v místě o polohovém vektoru \mathbf{r} pak učíme integrací pravé strany vztahu (9.55):

$$U(\mathbf{r}) = - \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}'. \quad (9.56)$$

kde polohový vektor \mathbf{r}_0 ukazuje na referenční bod, ve kterém nabývá potenciální energie dané hodnoty.

Práci z bodu o poloze \mathbf{r}_1 do bodu \mathbf{r}_2 po křivce \mathcal{C} , viz obr. 9.5, spočítáme jako



Obrázek 9.5: Výpočet práce z rozdílu potenciálních energií.

$$A(\mathcal{C}) = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} . \quad (9.57)$$

Jelikož uvažujeme práci konzervativních sil, a tedy nezáleží na volbě integrační cesty, zvolíme si integrační cestu z bodu o polohovém vektoru \mathbf{r}_1 do referenčního bodu \mathbf{r}_0 ($A(\mathcal{C}_1)$) a od něho ke koncovému bodu \mathbf{r}_2 ($A(\mathcal{C}_2)$), viz obr. 9.5, přičemž při výpočtu použijeme vztah (9.56), takže můžeme psát, že

$$\begin{aligned} A(\mathcal{C}) &= \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = A(\mathcal{C}_1) + A(\mathcal{C}_2) = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_0} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \\ &= - \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = U(\mathbf{r}_1) - U(\mathbf{r}_0) - U(\mathbf{r}_2) + U(\mathbf{r}_0) = U(\mathbf{r}_1) - U(\mathbf{r}_2) . \end{aligned} \quad (9.58)$$

Výsledek (9.58) ukazuje skutečnost, že práce je dána rozdílem potenciálních energií v příslušných místech, přičemž volba polohy referenčního bodu nemá na samotný výsledek vliv, takže volba referenčního bodu \mathbf{r}_0 ve vztahu (9.40) není striktně limitována, zpravidla polohu referenčního bodu volíme tak, aby v něm potenciální energie nabývala nulové hodnoty.

Uvažujeme sílu, která je dána následujícím vztahem

$$\mathbf{F} = f(r) \frac{\mathbf{r}}{r} = g(r) \mathbf{r} . \quad (9.59)$$

Ze vztahu (9.59) je patrné, že tato síla nabývá stejné velikosti ve všech bodech, které jsou stejně vzdáleny od počátku souřadnic. Rovněž z tohoto vztahu vyplývá, že všechny směry od počátku souřadnic jsou si rovnocenné, tj. vektorové pole této síly je pole izotropní. Je-li vektorové pole této síly třídímní, potom je geometrickým místem bodů, ve kterých nabývá toto silové pole stejné velikosti, kulová plocha. Počátek souřadnic je v tomto případě totožný s tzv. **silovým centrem** a síly, resp. silové pole, které vyhovují předpisu (9.59) se nazývají **centrální**

síly (radiální síly), resp. centrální silové pole. Příkladem centrálního silového pole je pole gravitační. Pomocí podmínky (9.54) zjistíme, zda centrální síly jsou síly konzervativní.

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{F} = \nabla \times (g(r)\mathbf{r}) &= \nabla \times (g(r)(x, y, z)) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ g(r)x & g(r)y & g(r)z \end{vmatrix} = \\ &= \left(\frac{\partial(g(r)z)}{\partial y} - \frac{\partial(g(r)y)}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial(g(r)x)}{\partial z} - \frac{\partial(g(r)z)}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \\ &+ \left(\frac{\partial(g(r)y)}{\partial x} - \frac{\partial(g(r)x)}{\partial y} \right) \mathbf{k} = \left(\frac{\partial g(r)}{\partial y} z + g(r) \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial g(r)}{\partial z} y - g(r) \frac{\partial y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \\ &+ \left(\frac{\partial g(r)}{\partial z} x + g(r) \frac{\partial x}{\partial z} - \frac{\partial g(r)}{\partial x} z - g(r) \frac{\partial z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \\ &+ \left(\frac{\partial g(r)}{\partial x} y + g(r) \frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial g(r)}{\partial y} x - g(r) \frac{\partial x}{\partial y} \right) \mathbf{k}. \quad (9.60)\end{aligned}$$

Jelikož x , y a z jsou nezávislé proměnné, potom všechny jejich parciální derivace v rovnosti (9.60) jsou rovny nule, takže výsledek (9.60) je možné zjednodušit na tvar

$$\begin{aligned}\nabla \times (g(r)\mathbf{r}) &= \left(\frac{\partial g(r)}{\partial y} z - \frac{\partial g(r)}{\partial z} y \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial g(r)}{\partial z} x - \frac{\partial g(r)}{\partial x} z \right) \mathbf{j} + \\ &+ \left(\frac{\partial g(r)}{\partial x} y - \frac{\partial g(r)}{\partial y} x \right) \mathbf{k}. \quad (9.61)\end{aligned}$$

V argumentu funkce g je velikost polohového vektoru, tj. $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, takže derivací této funkce podle jednotlivých proměnných dostaneme, že

$$\nabla \times (g(r)\mathbf{r}) = \left(\frac{\partial g}{\partial y} \frac{yz}{r} - \frac{\partial g}{\partial z} \frac{yz}{r} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial g}{\partial z} \frac{xz}{r} - \frac{\partial g}{\partial x} \frac{xz}{r} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial g}{\partial x} \frac{xy}{r} - \frac{\partial g}{\partial y} \frac{xy}{r} \right) \mathbf{k}. \quad (9.62)$$

Vzhledem k tomu, že parciální derivace funkce g jako vnější funkce podle jednotlivých proměnných musí být stejná a označíme ji g' . Pak je možné výsledek (9.62) upravit jako

$$\nabla \times (g(r)\mathbf{r}) = g' \left(\frac{yz}{r} - \frac{yz}{r} \right) \mathbf{i} + g' \left(\frac{xz}{r} - \frac{xz}{r} \right) \mathbf{j} + g' \left(\frac{xy}{r} - \frac{xy}{r} \right) \mathbf{k} = \mathbf{0}. \quad (9.63)$$

Výsledek (9.63) nám říká, že všechny centrální síly jsou silami konzervativními.

Příklad 9.2.2

Spočtěte centrální izotropní silové pole (sílu), je-li zadána jeho potenciální energie $U = \frac{1}{2}kr^2$, kde $k > 0$ je konstanta a souřadnice $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Řešení:

$$\mathbf{F} = -\nabla U = -\nabla \frac{1}{2}k(x^2 + y^2 + z^2) = (-kx, -ky, -kz) = -k(x, y, z) = -k\mathbf{r}.$$

Homogenní silové pole např. můžeme vyjádřit jako²

$$\mathbf{F} = a\mathbf{k} = (0, 0, a), \quad (9.64)$$

kde a je konstanta.

K ověření skutečnosti, zda homogenní silové pole je pole konzervativní, použijeme opět podmínky (9.54), takže můžeme psát, že

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{F} = \nabla \times (a\mathbf{k}) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} = \\ &= \left(\frac{\partial a}{\partial y} - \frac{\partial 0}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial 0}{\partial z} - \frac{\partial a}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial 0}{\partial x} - \frac{\partial 0}{\partial y} \right) \mathbf{k} = \mathbf{0}, \end{aligned}$$

protože derivace konstanty je rovna nule. Tedy v případě homogenních sil (silových polí) platí, že jsou vždy konzervativní. Příkladem homogenního pole je homogenní tíhové pole Země.

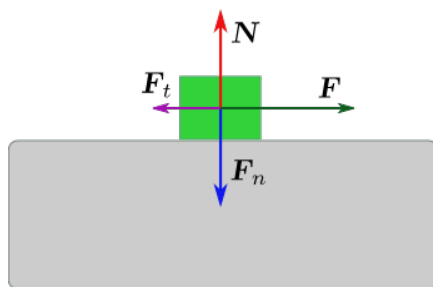
9.3 Třecí síly při vzájemném klouzavém pohybu dvou těles

Při vzájemném (relativním) klouzavém pohybu dvou těles, mezi kterými není žádná tekutina (lubrikant), dochází k tzv. **suchému smykovému tření**, jehož příčinou je třecí síla působící proti vzájemnému pohybu.

Uvažujme případ, kdy na sobě spočívají dvě tělesa a na horní těleso o hmotnosti m působíme silou \mathbf{F} . Kromě této síly působí na toto těleso ještě přítláčná síla normálová \mathbf{F}_n . To má za následek, že na horní těleso působí druhé těleso tlakovou silou (reakce) \mathbf{N} . Kromě zmíněných sil působí ještě na horní těleso třecí síla \mathbf{F}_t , která má opačnou orientaci než síla \mathbf{F} , viz obr. 9.6.

Předpokládejme, že se velikost síly, kterou na horní těleso působíme postupně zvětšuje od nulové hodnoty. Zpočátku se horní těleso vůči spodnímu tělesu nepohybuje a tedy v každém okamžiku musí platit, že $\mathbf{F} + \mathbf{F}_t = \mathbf{0}$. Postupně zvětšujeme

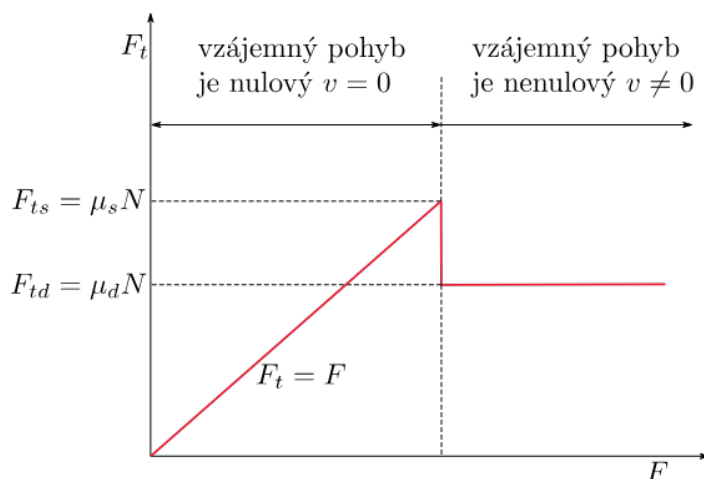
²Vždy si můžeme zvolit orientaci kartézské souřadnicové soustavy tak, aby bylo možné vyjádřit homogenní silové pole uvedeným způsobem.



Obrázek 9.6: Síly působící na horní těleso při vzájemném klouzavém pohybu dvou těles.

sílu, kterou na horní těleso působíme, a od jisté její hodnoty, víceméně skokem, klesne velikost třecí síly a tělesa se začnou vůči sobě vzájemně pohybovat. Popsaná situace je zachycena na obr. 9.7.

Maximální hodnota třecí síly je dána vztahem:



Obrázek 9.7: Závislost velikosti třecí síly F_t na velikosti působící síly F .

$$F_t^{\max} \equiv F_{ts} = \mu_s N, \quad (9.65)$$

kde μ_s se nazývá **součinitel statického tření** (bezrozměrná veličina).

Hodnota třecí síly při jejím poklesu z maximální hodnoty (započne vzájemný pohyb mezi tělesy) se nazývá **dynamická třecí síla** a je rovna:

$$F_{td} = \mu_d N, \quad (9.66)$$

kde μ_d se nazývá **součinitel dynamického tření**.

Ze vztahů (9.65) a (9.66) vyplývá, že platí mezi součiniteli následující relace:

$$\mu_s > \mu_d. \quad (9.67)$$

Ze vztahů (9.65) a (9.66) je rovněž vidět, že hodnoty F_{ts} a F_{td} **nezávisí** na velikosti stykových ploch, pouze na materiálech stykových ploch a jejich opracování (hrubosti). Kdybychom si zvětšili povrch dvou stykových ploch, tak bychom viděli jejich hrubost a že jsou stykové plochy do sebe zamknuty. Jakmile se vůči sobě



počnou pohybovat, pak dochází k obrušování těchto ploch a tyto plochy jakoby po sobě skákaly, a proto platí, že $\mu_s > \mu_d$.

Poznamenejme, že velmi často je jako přitlačná síla zastoupena jen síla tíhová, tj. $\mathbf{F}_n = \mathbf{G} = m\mathbf{g}$.

Jestliže je vzájemná rychlost dvou těles $\mathbf{v} = v\mathbf{v}^0$, kde \mathbf{v}^0 je jednotkový vektor vzájemné rychlosti, potom pro třecí sílu platí, že

$$\mathbf{F}_{td} = -\mu_d N \mathbf{v}^0, \quad (9.68)$$

kde znaménko minus souvisí s tím, že třecí síla vždy působí proti pohybu. Třecí síla patří mezi disipativní síly a můžeme si ji v souladu se vztahem pro disipativní síly (9.32) vyjádřit jako

$$\mathbf{F}_{td} = -\mu_d N \mathbf{v}^0 = -\frac{\mu_d N}{v} v \mathbf{v}^0 = -\frac{\mu_d N}{v} \mathbf{v} = -\lambda \mathbf{v} = \mathbf{F}_{Dis}. \quad (9.69)$$

Z obrázku 9.7 vidíme, že pro $F > F_{td}$ bude vzájemná rychlost mezi tělesy s časem narůstat (těleso se bude pohybovat se zrychlením). V případě, že $F = F_{td}$, pak rychlost vzájemného pohybu bude konstantní, protože $\mathbf{F} + \mathbf{F}_{td} = \mathbf{0}$, tedy na těleso nebude působit žádná síla, takže se těleso bude bez zrychlení.

V tabulce 9.1 jsou pro představu uvedeny součinitele tření mezi povrchy vybraných materiálů.

	μ_d	μ_s
ocel - led	0,01	0,03
ocel - teflon	0,04	0,09
ocel - ocel	0,10	0,15 - 0,60
ocel - guma	0,5 - 1,0	1 - 4
dřevo - dřevo	0,3 - 0,5	0,6

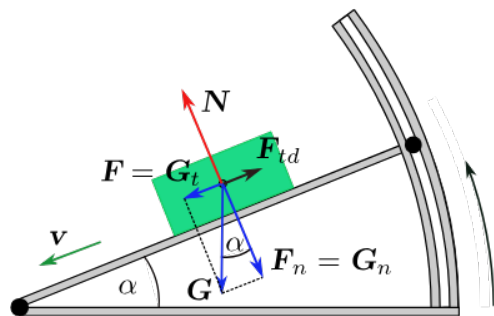
Tabulka 9.1: Tabulka vybraných součinitelů tření.

Uvažujme desku, na které se nachází těleso o hmotnosti m . Tuto desku postupně nakláníme, až dosáhne sklonu α , při kterém se začne těleso posouvat konstantní rychlostí $\mathbf{v} = \mathbf{konst.}$, viz obr. 9.8. V tomto případě je přitlačná síla \mathbf{F}_n rovna normálové složce tíhového zrychlení \mathbf{G}_n , která je kolmá k naklánějící se rovině. Působící síla \mathbf{F} je rovna tečné složce tíhové síly \mathbf{G}_t , která je rovnoběžná s naklánějící se rovinou. Protože uvažujeme situaci, kdy $\mathbf{F} + \mathbf{F}_{td} = \mathbf{0}$, tedy $\mathbf{v} = v\mathbf{v}^0 = \mathbf{konst.}$, tak na základě rovnosti (9.69) musí platit:

$$\mathbf{F} = \mathbf{G}_t = G_t \mathbf{G}^0 = G_t \mathbf{v}^0 = -\mathbf{F}_{td} = \mu_d N \mathbf{v}^0. \quad (9.70)$$

Odtud

$$F = G_t = \mu_d N. \quad (9.71)$$



Obrázek 9.8: Naklánějící se deska s tělesem.

Uvážíme-li, že $\mathbf{G} = m\mathbf{g}$, pak z obr. 9.8 je vidět, že

$$F = G_t = mg \sin \alpha . \quad (9.72)$$

Rovněž z tohoto obrázku vidíme, že

$$N = |\mathbf{G}_n| = mg \cos \alpha . \quad (9.73)$$

Dosadíme-li ze vztahů (9.72) a (9.73) do vztahu (9.71), ta dostáváme:

$$mg \sin \alpha = \mu_d mg \cos \alpha . \quad (9.74)$$

Odtud můžeme psát, že

$$\mu_d = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha . \quad (9.75)$$

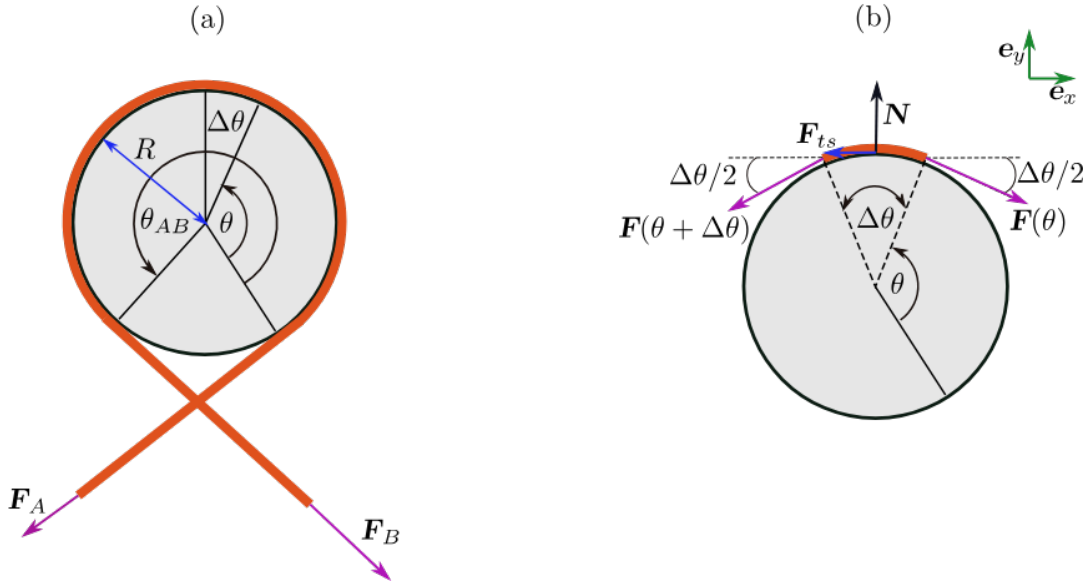
Takže můžeme určit součinitel dynamického tření μ_d pro dané dva materiály a povrchy (tělese a deska) jako tangens úhlu sklonu desky, při kterém začne klouzat těleso konstantní rychlostí.

Stejným způsobem můžeme určit i součinitel statického tření μ_s s tím, že úhel sklonu nakloněné desky α bude odpovídat nejvyššímu možnému úhlu, kdy se ještě těleso po desce nepohybuje.

9.4 Lanové tření

Uvažujme kůl o poloměru R , na který je namotáno lano, přičemž lano je taženo silou \mathbf{F}_A na jednom konci a na druhém konci je taženo silou \mathbf{F}_B , která je co do velikosti menší, tj. $F_B < F_A$. Mezi lanem a kůlem uvažujeme suché smykové tření, viz obr. 9.9(a). Síly působící na kousek lana jsou zachyceny na obr. 9.9(b). Z obrázku lze vidět, že na kousek lana působí na jeho koncích síly $\mathbf{F}(\theta + \Delta\theta)$, $\mathbf{F}(\theta)$, třecí síla \mathbf{F}_{ts} a reakce přítláčné síly \mathbf{N} . Síly působící na vybraný kousek lana si rozložíme na složky ve směru vektorů \mathbf{e}_x a \mathbf{e}_y tím, že je těmito vektory skalárně vynásobíme. Jelikož víme, že se lano nepohybuje, tak složky sil působících na vybraný kousek lana v jednotlivých směrech se musí rovnat (musí být v rovnováze) neboli platí následující rovnice:

$$\mathbf{e}_x : \quad F(\theta) \cos \left(\frac{\Delta\theta}{2} \right) - F_{ts} - F(\theta + \Delta\theta) \cos \left(\frac{\Delta\theta}{2} \right) = 0 , \quad (9.76)$$



Obrázek 9.9: (a) Lano částečně omotané kolem kúlu. (b) Síly působící na kousek namotaného a napínaného lana.

$$\mathbf{e}_y : -F(\theta) \sin\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right) + N - F(\theta + \Delta\theta) \sin\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right) = 0. \quad (9.77)$$

Vzhledem k tomu, že uvažujeme hodně malý kousek lana, tak z Taylorova rozvoje můžeme psát:

$$F(\theta + \Delta\theta) \approx F(\theta) + \frac{dF}{d\theta} \Delta\theta \approx F(\theta) + \frac{\Delta F}{\Delta\theta} \Delta\theta = F(\theta) + \Delta F. \quad (9.78)$$

Dále díky malosti elementu středového úhlu ($\Delta\theta \ll 1$) můžeme goniometrické funkce nahradit jako:

$$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \approx \frac{\theta}{2}, \quad \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \approx 1. \quad (9.79)$$

Aproximace (9.78) a (9.79) dosadíme do rovnic (9.76) a (9.77), čímž dostaneme:

$$\mathbf{e}_x : F(\theta) - F_{ts} - F(\theta) - \Delta F = 0, \quad \Rightarrow \quad F_{ts} = -\Delta F, \quad (9.80)$$

$$\mathbf{e}_y : -F(\theta) \frac{\Delta\theta}{2} + N - (F(\theta) + \Delta F) \frac{\Delta\theta}{2} = 0, \quad \Rightarrow \quad N = F(\theta) \Delta\theta, \quad (9.81)$$

kde jsme zanedbali člen $\Delta F \Delta\theta/2$, protože je vůči zbývajícím členům výrazně menší.

Na základě vztahu (9.65) a výsledku (9.80) můžeme psát:

$$F_{ts} = \mu_s N \quad \Rightarrow \quad -\Delta F = \mu_s N. \quad (9.82)$$

Za velikost reakční síly N do tohoto výsledku dosadíme ze vztahu (9.81):

$$-\Delta F = \mu_s F(\theta) \Delta\theta > 0. \quad (9.83)$$

Odtud

$$\frac{\Delta F}{\Delta\theta} = -\mu_s F(\theta) < 0. \quad (9.84)$$

Protože pravá strana této rovnice je záporná, proto musí platit, že $\Delta F < 0$. Derivace funkce $F(\theta)$ podle θ je na základě vztahu (9.84) rovna:

$$\frac{dF}{d\theta} = \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta\theta} = -\mu_s F(\theta) . \quad (9.85)$$

Z obr. 9.9(a) vidíme, že pro středový úhel $\theta = 0$ je velikost síly rovna $F(0) = F_A$ a pro $\theta = \theta_{AB}$ je velikost síly rovna $F(\theta_{AB}) = F_B$. Rovnici (9.85) můžeme řešit metodou separace proměnných, takže dostáváme, že

$$\int_{F_A}^{F_B} \frac{dF}{F} = -\mu_s \int_0^{\theta_{AB}} d\theta . \quad (9.86)$$

Řešením integrálů dostaneme:

$$\ln \left(\frac{F_B}{F_A} \right) = -\mu_s \theta_{AB} . \quad (9.87)$$

Odlogaritmováním dostaneme, že

$$F_B = F_A e^{-\mu_s \theta_{AB}} . \quad (9.88)$$

Odtud vidíme, že pro $\theta_{AB} > 0$ platí, že $F_B < F_A$.

Ze vztahu (9.88) vidíme, že pokud bychom měli udržet na laně velkou sílu holýma rukama, tak stačí lano omotat kolem nějakého kůlu a pak udržíme téměř cokoliv a spíše se přetrhne lano, než že bychom lano neudrželi. V případě, že součinitel suchého tření $\mu_s = 1$ a $\theta_{AB} = 2\pi$, tj. obtočíme jednou kůl lanem, pak síla F_B (síla, kterou táhneme za lano) bude cca 500-krát menší než je síla F_A . Při dvojitým obtočení ($\theta_{AB} = 4\pi$) již síla F_B bude cca 300 000-krát menší než síla F_A , a při trojitým obtočení ($\theta_{AB} = 6\pi$) by síla F_B byla cca 150 000 000-krát menší.

Poznamenejme, že i pevnost všech typů uzlů je vlastně založena na lanovém tření. Dokonce i stehy, kterými jsou sešity jednotlivé díly oblečení drží pohromadě díky tomuto tření. Tedy můžeme konstatovat, že praktický význam lanového tření je obrovský.

Kapitola 10

Analytická mechanika

V předchozích kapitolách věnované mechanice hmotných bodů jsme používali fyzikálních vektorových veličin, a proto takovouto mechaniku označujeme jako vektorovou (newtonovskou). Při řešení složitějších problémů spadajících do mechaniky se přístup založený na vektorových veličinách stává velmi komplikovaným a z tohoto důvodu byla zavedena mechanika skalární (analytická), která, jak už její označení napovídá, využívá k popisu mechanických dějů skalárních veličin, čímž se řešení komplikovanějších mechanických úloh výrazně zjednoduší. Někdy bývá analytická mechanika označována jako teoretická mechanika, ale toto označení je poněkud zavádějící, protože právě analytická mechanika umožní řešit praktické úlohy, které jsou současně zpravidla i poměrně komplikované.

10.1 Klasifikace vazeb a stupeň volnosti

K popisu volného hmotného bodu v prostoru potřebujeme znát 3 souřadnice, nejčastěji závisí na rychlosti se jedná o souřadnice kartézské, přičemž přívlastkem „volný“ vyjadřujeme v analytické mechanice skutečnost, že hmotný bod není ve svém pohybu omezen (není podroben vazbám).

Uvažujme soustavu N volných hmotných bodů. K jednoznačnému určení jejich polohy budeme potřebovat $3N$ souřadnic. Například si představme soustavu tvořenou dvěma volnými hmotnými body, na které ukazují dva polohové vektory \mathbf{r}_1 a \mathbf{r}_2 . Potom k určení jejich polohy potřebujeme znát celkem 6 souřadnic, tj. $x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2$, resp. $x_{1,1}, x_{1,2}, x_{1,3}; x_{2,1}, x_{2,2}, x_{2,3}$, příp. $x_1, x_2, x_3; x_4, x_5, x_6$. Uvedli jsme tři způsoby indexování souřadnic, přičemž v nastávající části textu věnovanému analytické mechanice **budeme používat druhý** uvedený způsob, kdy je každá souřadnice značena dvěma indexy. První index označuje o jaký z N hmotných bodů se jedná a druhý index určuje souřadnici a obecně nabývá hodnot 1,2,3.

V případě, že je pohyb hmotných bodů nějak omezen, mluvíme o existenci tzv. **vazeb** (vazebních sil).

Charakter vazeb může být rozmanitý. Matematicky je vazba vyjádřena buď rovnicí $f = 0$, pak mluvíme o vazbě **oboustranné** (udržující), nebo nerovnicí $f \geq 0$, resp. $f \leq 0$ a v tomto případě mluvíme o vazbě **jednostranné** (neudržující). Pokud se jednostranná vazba projevuje na pohybu, její efekt se neliší od působení vazby oboustranné, a můžeme se proto v další části textu omezit na oboustranné vazby.

Oboustrannou vazbu můžeme vyjádřit následovně

$$f(x_{1,1}, x_{1,2}, x_{1,3}, x_{2,1}, x_{2,2}, x_{2,3}, \dots, x_{N,1}, x_{N,2}, x_{N,3}, t) = 0, \quad (10.1)$$

resp.

$$f(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N, t) = 0. \quad (10.2)$$

Vazba vyjádřená vazebnou podmínkou (10.1) se nazývá vazbou **geometrickou**. V případě, že vazebná podmínka obsahuje i rychlost

$$f(x_{1,1}, x_{1,2}, x_{1,3}, \dots, x_{N,1}, x_{N,2}, x_{N,3}, \dot{x}_{1,1}, \dot{x}_{1,2}, \dot{x}_{1,3}, \dots, \dot{x}_{N,1}, \dot{x}_{N,2}, \dot{x}_{N,3}, t) = 0, \quad (10.3)$$

pak se tato vazba nazývá **kinematickou**.

Zderivujeme-li vazebnou podmínku geometrické vazby (10.1) podle času, pak dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} = \sum_{\alpha=1}^N \sum_{i=1}^3 \frac{\partial f}{\partial x_{\alpha,i}} \dot{x}_{\alpha,i} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \quad \text{neboli} \\ \varphi(x_{1,1}, x_{1,2}, x_{1,3}, \dots, x_{N,1}, x_{N,2}, x_{N,3}, \dot{x}_{1,1}, \dot{x}_{1,2}, \dot{x}_{1,3}, \dots, \dot{x}_{N,1}, \dot{x}_{N,2}, \dot{x}_{N,3}, t) = 0. \end{aligned} \quad (10.4)$$

Srovnáním vazebných podmínek (10.3) a (10.4) vidíme, že jsme geometrickou vazebnou podmínku převedli na vazebnou podmínku kinematickou. Praktický význam mají hlavně kinematické vazby lineární v rychlostech. Můžeme je zapsat jako

$$\sum_{\alpha=1}^N \sum_{i=1}^3 a_{\alpha,i}(x_{\alpha,i}, t) \dot{x}_{\alpha,i} + b(x_{\alpha,i}, t) = 0. \quad (10.5)$$

Pokud lze levou stranu rovnice (10.5) přepsat jako totální derivaci podle času, tj.

$$\frac{dg}{dt} = \sum_{\alpha=1}^N \sum_{i=1}^3 \frac{\partial g}{\partial x_{\alpha,i}} \dot{x}_{\alpha,i} + \frac{\partial g}{\partial t}, \quad (10.6)$$

pak je možné následnou integrací podle času získat vazebnou podmínku (viz rovnost (10.4))

$$\begin{aligned} f(x_{1,1}, x_{1,2}, x_{1,3}, x_{2,1}, x_{2,2}, x_{2,3}, \dots, x_{N,1}, x_{N,2}, x_{N,3}, t) = \\ g(x_{1,1}, x_{1,2}, x_{1,3}, x_{2,1}, x_{2,2}, x_{2,3}, \dots, x_{N,1}, x_{N,2}, x_{N,3}, t) - C = 0, \end{aligned} \quad (10.7)$$

kde C je integrační konstanta závislá na počátečních podmínkách. Vazebná podmínka (10.7) představuje vlastně geometrickou podmínku. Kinematická vazba je v tomto případě **integrabilní**, tj. převoditelná na vazbu geometrickou. Každou geometrickou vazbu nebo kinematickou vazbu, která je integrabilní, budeme nazývat **holonomní vazbou**¹. Vazba, která tuto vlastnost nemá, se nazývá **neholonomní** (anholonomní). Neholonomní vazby se vyskytují zejména v mechanice tuhých těles. Dále rozlišujeme případ, kdy vazebná podmínka explicitně neobsahuje čas, pak se nazývá **stacionární** (skleronomní). Vazebná podmínka závislá na čase se nazývá

¹Někdy jsou v literatuře geometrické vazby nazývány holonomními a integrabilní kinematické vazby vazbami **semiholonomními**.

nestacionární (rheonomní). V dalším textu se budeme zabývat **jen vazbami holonomními**.

Je-li mechanická soustava podrobena pouze holonomním vazbám, pak se nazývá **holonomní soustavou**. Typickými holonomními vazbami jsou vazby, které udržují hmotné body při jejich pohybu na stanovených plochách, příp. křivkách, nebo v daných vzájemných vzdálenostech. Jestliže se tvar ani poloha těchto ploch, příp. křivek, nebo vzájemné vzdálenosti nemění, jde zároveň o vazbu skleronomní.

Fyzikálně jsou vazby realizovány např. spojujícími tyčemi, lany, kloubovými mechanizmy apod. **Vazby holonomní mají ve fyzice největší význam a snižují počet stupňů volnosti!**

Počet stupňů volnosti s rozumíme počet nezávislých údajů (parametrů), kterými lze jednoznačně určit polohu systému (objektu).

Systém N hmotných bodů s R holonomními vazbami má počet stupňů volnosti

$$s = 3N - R . \quad (10.8)$$

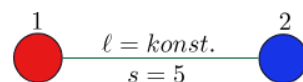
Níže si ukážeme příklady vázaných pohybů (vazeb) spolu s uvedeným stupněm volnosti.

Příklady vazeb

Uvažujme dva HB, které při pohybu vůči sobě zachovávají vzdálenost ℓ . V tomto případě si vazebnou podmínku $f(x_{1,1}, x_{1,2}, x_{1,3}, x_{2,1}, x_{2,2}, x_{2,3}) = 0$ můžeme vyjádřit jako

$$(x_{1,1} - x_{2,1})^2 + (x_{1,2} - x_{2,2})^2 + (x_{1,3} - x_{2,3})^2 - \ell^2 = 0 .$$

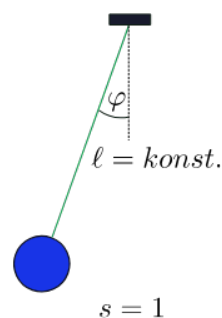
Jedná se tedy o jednu geometrickou (nezávisí na rychlosti HB) skleronomní (vazba explicitně nezávisí na čase) holonomní vazbu ($R = 1$) mezi dvěma HB ($N = 2$), takže pro počet stupňů volnosti dle vztahu (10.8) dostáváme: $s = 3N - R = 3 \cdot 2 - 1 = 5$. Takže k jednoznačnému určení polohy těchto dvou HB nám stačí 5 nezávislých parametrů, když víme jak jsou od sebe vzdáleny, tj. nepotřebujeme 6 kartézských souřadnic.



Jako další případ budeme uvažovat rovinné matematické kyvadlo, které se sestává ze závěsu délky ℓ a jednoho HB ($N = 1$), jehož poloha je dána souřadnicemi $x_{1,1}, x_{1,2}, x_{1,3}$, a kmitá v rovině po kružnici o poloměru ℓ kolem rovnovážného bodu. Kmitající HB je podroben dvěma holonomním vazbám ($R = 2$), kdy jedna souvisí s jeho omezením pohybu v rovině a druhá souvisí s konstantní délkou závěsu:

$$f_1(x_{1,3}) = 0 \Rightarrow x_{1,3} = 0 , \quad f_2(x_{1,1}, x_{1,2}) = 0 \Rightarrow x_{1,1}^2 + x_{1,2}^2 - \ell^2 = 0 .$$

Vidíme, že obě vazby jsou geometrické, tudíž holonomní, a navíc skleronomní. Počet stupňů volnosti: $s = 3N - R = 3 \cdot 1 - 2 = 1$. Tedy k jednoznačnému určení polohy tohoto HB nepotřebujeme tři kartézské souřadnice, ale stačí nám s jeden parametr (údaj). Tímto parametrem je hodnota středového úhlu φ .



Dalším příkladem je jeden HB ($N = 1$), který pohybuje se po povrchu koule, které lineárně s časem roste poloměr $r(t) = r_0 t$ (např. mravenec pohybující se

po nafukovacím balónku kulového tvaru). V tomto případě můžeme rovnici vazby (vazební podmínku) napsat jako

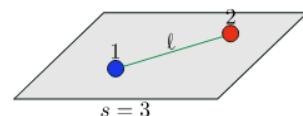
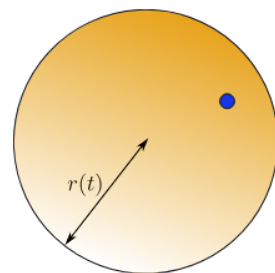
$$f(x_{1,1}, x_{1,2}, x_{1,3}, x_{2,1}, x_{2,2}, x_{2,3}, t) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,1}^2 + x_{1,2}^2 + x_{1,3}^2 - r_0^2 t^2 = 0.$$

Vidíme že se jedná o rheonomní geometrickou vazbu (explicitně závisí na čase a nezávisí na rychlosti), tudíž se jedná o jednu holonomní vazbu ($R = 1$). Takže počet stupňů volnosti je: $s = 3N - R = 3 \cdot 1 - 1 = 2$. Protože známe předpis, jak se mění v čase poloměr koule, tak k jednoznačnému určení polohy HB na povrchu koule nám stačí 2 nezávislé parametry namísto tří kartézských souřadnic.

Jako poslední případ si uvedeme dva HB ($N = 2$) pohybující se v rovině (např. na desce stolu) a zachovávající vůči sobě konstantní vzdálenost ℓ . V tomto případě se uplatňují tři vazební podmínky, protože oba HB jsou ve svém pohybu vázané na rovinu a navíc vůči sobě musí zachovávat konstantní vzdálenost, tedy

$$\begin{aligned} f_1(x_{1,3}) = 0 &\Rightarrow x_{1,3} = 0, & f_2(x_{2,3}) = 0 &\Rightarrow x_{2,3} = 0, \\ f_3(x_{1,1}, x_{1,2}, x_{2,1}, x_{2,2}) = 0 &\Rightarrow (x_{1,1} - x_{2,1})^2 + (x_{1,2} - x_{2,2})^2 - \ell^2 = 0. \end{aligned}$$

Vidíme, že se jedná o tři skleronomní geometrické vazby, tedy tři holonomní vazby ($R = 3$). Počet stupňů volnosti: $s = 3N - R = 3 \cdot 2 - 3 = 3$. Takže nám k jednoznačnému určení polohy dvou HB pohybující se po dané rovině a zachovávající vůči sobě vzdálenost stačí tři nezávislé parametry.



10.2 Zobecněné souřadnice

Uvažujme soustavu N hmotných bodů s holonomními vazbami, která má počet stupňů volnosti s . Polohu všech těchto bodů v daném časovém okamžiku vzhledem ke zvolené vztažné soustavě nazýváme **konfigurací soustavy**. Konfiguraci soustavy v každém okamžiku můžeme jednoznačně vyjádřit s nezávislými parametry $q_1(t), q_2(t), \dots, q_s(t)$, které nazveme **zobecněné souřadnice**². Zobecněné souřadnice představují kombinaci různých typů souřadnic a parametrů (zpravidla vzdálenosti a úhly). Jejich volba není předem ničím předepsána, jediným omezením je, aby zvolené zobecněné souřadnice $q_1(t), q_2(t), \dots, q_s(t)$ jednoznačně popisovaly všechny možné polohy hmotných bodů soustavy, tj. konfiguraci soustavy. Jinými slovy „ušíjeme na míru“ vhodné souřadnice řešenému problému, přičemž tento úkol často vyžaduje jistou dávku zkušenosti a intuice.

Zobecněné souřadnice³ q_1, q_2, \dots, q_s vymezují takzvaný **konfigurační prostor** všech možných poloh (konfigurací) soustavy. Máme-li N hmotných bodů určených obecnými souřadnicemi $q_1(t), q_2(t), \dots, q_s(t)$, potom si můžeme soustavu obecných souřadnic představit jako souřadnice jednoho bodu v prostoru dimenze $s = 3N - R$, na který ukazuje polohový vektor $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_s)$. Je potřeba si uvědomit, že konfigurační prostor není prostorem fyzikálních stavů soustavy, jelikož vypovídá pouze o polohách, tedy konfiguracích, všech uvažovaných hmotných bodů soustavy. Pro úplnou informaci o úplném fyzikálním stavu soustavy je nutné znát

²Na rozdíl od kartézských souřadnic, obecné souřadnice nemusí mít fyzikální rozměr délky.

³Připomeňme, že jejich počet odpovídá stupni volnosti soustavy.

také jejich rychlosti. Proto konfigurační prostor musíme doplnit o tzv. **zobecněné rychlosti** $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s$, resp. $\dot{\mathbf{q}}$. Teprve spojením informací o polohách a rychlostech vzniká **prostor fyzikálních stavů** dané mechanické soustavy, jehož dimenze je $2s$ a je tedy parametrizovaný souřadnicemi $q_1, q_2, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s$, které určují fyzikální stav mechanické soustavy v čase t v tom smyslu, že zahrnuje nezbytné údaje k určení časového vývoje této soustavy.

V další části textu budeme usilovat o nalezení vhodného formálního aparátu, který by umožňoval zapsat pohybové rovnice dané soustavy pomocí zvolených zobecněných souřadnic. Vyřešení tohoto problému bude mít i význam pro soustavy, které nejsou podrobeny vazbám, avšak je z nějakých důvodů pro ně vhodné zavést křivočaré souřadnice.

Předpokládejme, že mezi kartézskými a zobecněnými souřadnicemi platí transformační vztahy⁴ (zobrazení⁵):

$$x_{\alpha,i} = x_{\alpha,i}(q_1, q_2, \dots, q_s, t), \quad \alpha = 1, 2, \dots, N; \quad i = 1, 2, 3. \quad (10.9)$$

Udáme-li polohu hmotných bodů pomocí zobecněných souřadnic q_j , předpokládáme, že jsou automaticky splněny vazebné podmínky⁶

$$f_k(x_{1,1}, x_{1,2}, x_{1,3}, x_{2,1}, x_{2,2}, x_{2,3}, \dots, x_{N,1}, x_{N,2}, x_{N,3}, t) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, R. \quad (10.10)$$

Jsou-li vazby skleronomní, tj.

$$f_k(x_{1,1}, x_{1,2}, x_{1,3}, x_{2,1}, x_{2,2}, x_{2,3}, \dots, x_{N,1}, x_{N,2}, x_{N,3}) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, R, \quad (10.11)$$

pak je možné zapsat transformační vztahy jako

$$x_{\alpha,i} = x_{\alpha,i}(q_1, q_2, \dots, q_s), \quad \alpha = 1, 2, \dots, N; \quad i = 1, 2, 3, \quad (10.12)$$

Za povšimnutí stojí skutečnost, že transformační vztah pro skleronomní vazby neobsahuje explicitně čas t , jak je tomu u rheonomní vazby (10.10).

Příklad 10.2.1

Uvažujte dvě matematická rovinná kyvadla o hmotnosti m a délkou ℓ tuhého závěsu zanedbatelné hmotnosti. Kyvadla jsou zavěšena ve stejné výšce ve vzdálenosti a , která je i rovna klidové délce pružiny o tuhosti k , která je spojuje ve vzdálenosti $\ell/2$ od místa jejich zavěšení, viz obr. 10.1. Určete stupeň volnosti hmotných bodů, nalezněte zobecněné souřadnice, zobecněné rychlosti a transformační vztahy mezi kartézskými a zobecněnými souřadnicemi.

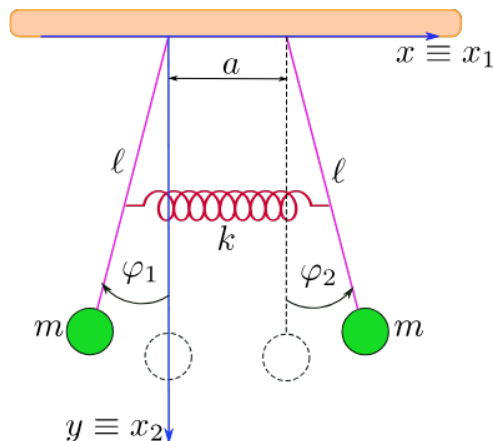
Řešení:

Protože se jedná o rovinná matematická kyvadla, tak každé z kyvadel je podro-

⁴Tento zápis je obecně pouze lokální, jelikož nemusí být možné popsat daný problém jedinou souřadnicovou soustavou.

⁵Toto zobrazení musí být prosté a regulární, tj. jednoznačné a existuje k němu jednoznačné inverzní zobrazení, neboli v každém časovém okamžiku můžeme z hodnot zobecněných souřadnic stanovit polohu všech hmotných bodů soustavy v prostoru pomocí kartézských souřadnic.

⁶Indexem k odlišujeme jednotlivé holonomní vazby, kterých je R .



Obrázek 10.1: Dvě stejná rovinná sprzęžená matematická kyvadla.

beno dvěma vazbám, viz část textu Příklady vazeb. Takže stupeň volnosti je: $s = 3N - R = 3 \cdot 2 - 4 = 2$, tedy k jednoznačnému určení konfigurace (polohy) kmitajících dvou hmotných bodů nám budou stačit dvě zobecněné souřadnice. Těmito zobecněnými souřadnicemi jsou středové úhly u kyvadel, viz obr. 10.1, tj. $q_1 = \varphi_1$ a $q_2 = \varphi_2$. Poznamenejme, že středové úhly (zobecněné souřadnice) se s časem mění, $\varphi_1 = \varphi_1(t)$ a $\varphi_2 = \varphi_2(t)$. Zobecněné rychlosti nalezneme derivováním zobecněných souřadnic podle času, tj. $\dot{q}_1 = \dot{\varphi}_1$ a $\dot{q}_2 = \dot{\varphi}_2$.

Z obr. 10.1 můžeme snadno určit transformační vztahy mezi kartézskými a zobecněnými souřadnicemi:

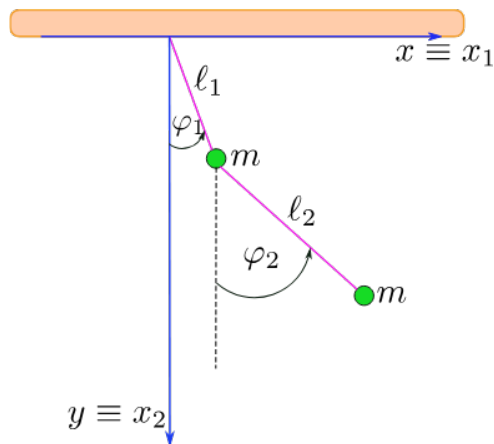
$$\begin{aligned} x_{1,1} = x_{1,1}(q_1) &\Rightarrow x_{1,1} = -\ell \sin \varphi_1, & x_{1,2} = x_{1,2}(q_1) &\Rightarrow x_{1,2} = \ell \cos \varphi_1, \\ x_{2,1} = x_{1,2}(q_2) &\Rightarrow x_{2,1} = \ell \sin \varphi_2 + a, & x_{2,2} = x_{2,2}(q_2) &\Rightarrow x_{2,2} = \ell \cos \varphi_2. \end{aligned}$$

Příklad 10.2.2

Uvažujte matematické rovinné dvojkyvadlo, které se sestává ze dvou matematických kyvadel o stejné hmotnosti m a s délkami nehmotných tuhých závěsů ℓ_1 a ℓ_2 , přičemž druhé kyvadlo je uchyceno na prvním, viz obr. 10.2. Určete stupeň volnosti hmotných bodů, nalezněte zobecněné souřadnice a transformační vztahy mezi kartézskými a zobecněnými souřadnicemi.

Řešení:

Protože se jedná o rovinná matematická kyvadla, tak každé z kyvadel je podrobeno dvěma vazbám, viz část textu Příklady vazeb. Takže stupeň volnosti je: $s = 3N - R = 3 \cdot 2 - 4 = 2$, tedy k jednoznačnému určení konfigurace (polohy) kmitajících dvou hmotných bodů nám budou stačit dvě zobecněné souřadnice. Těmito zobecněnými souřadnicemi jsou středové úhly u spojených kyvadel, viz obr. 10.2, tj. $q_1 = \varphi_1$ a $q_2 = \varphi_2$. Poznamenejme, že středové úhly (zobecněné souřadnice) se s časem mění, $\varphi_1 = \varphi_1(t)$ a $\varphi_2 = \varphi_2(t)$.



Obrázek 10.2: Rovinné matematické dvojkyvadlo.

Z obr. 10.2 můžeme snadno určit transformační vztahy mezi kartézskými a zobecněnými souřadnicemi:

$$\begin{aligned} x_{1,1} = x_{1,1}(q_1) &\Rightarrow x_{1,1} = l_1 \sin \varphi_1, & x_{1,2} = x_{1,2}(q_1) &\Rightarrow x_{1,2} = l_1 \cos \varphi_1, \\ x_{2,1} = x_{1,2}(q_1, q_2) &\Rightarrow x_{2,1} = l_1 \sin \varphi_1 + l_2 \sin \varphi_2, \\ x_{2,2} = x_{2,2}(q_1, q_2) &\Rightarrow x_{2,2} = l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2. \end{aligned}$$

10.3 Lagrangeovy rovnice 2. druhu

V předchozí části kapitoly byly zavedeny obecné souřadnice q_j , kde $j = 1, 2, \dots, s$. V rámci této části kapitoly si ukážeme, jak nalézt pohybové rovnice pomocí zobecněných souřadnic.

V rámci kapitoly 9.1.3 jsme si zavedli kinetickou energii pro jeden HB jako

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2) = \frac{1}{2}m \sum_{i=1}^3 \dot{x}_i^2.$$

Uvažujeme-li soustavu soustavu N hmotných bodů, která je podrobena R holonomním vazbám, u nichž připouštíme časovou závislost (rheonomní vazby) a hmotnost jednotlivých hmotných bodů je obecně různá (m_α , $\alpha = 1, 2, \dots, N$), pak celkovou kinetickou energii uvažované soustavy můžeme vyjádřit jako

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N \sum_{i=1}^3 m_\alpha \dot{x}_{\alpha,i}^2. \quad (10.13)$$

Dále derivováním vztahu (10.9) podle času dostaneme:

$$\dot{x}_{\alpha,i} = \sum_{n=1}^s \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial q_n} \dot{q}_n + \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial t}. \quad (10.14)$$

Provedeme-li derivaci rovnice (10.14) podle \dot{q}_n obdržíme:

$$\frac{\partial \dot{x}_{\alpha,i}}{\partial \dot{q}_n} = \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial q_n}, \quad (10.15)$$

kde nalezená rovnost představuje pravidlo **krácení tečkou**.

Dosadíme-li rovnost (10.14) do výrazu pro celkovou kinetickou energii soustavy (10.13), pak můžeme psát, že

$$T(q_1, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s, t) = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N \sum_{i=1}^3 m_{\alpha} \left(\sum_{n=1}^s \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial q_n} \dot{q}_n + \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial t} \right)^2. \quad (10.16)$$

Nyní provedeme následující parciální derivace kinetické energie (10.16):

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{\alpha=1}^N \sum_{i=1}^3 m_{\alpha} \underbrace{\left(\sum_{n=1}^s \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial q_n} \dot{q}_n + \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial t} \right)}_{=\dot{x}_{\alpha,i}} \underbrace{\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\sum_{m=1}^s \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial q_m} \dot{q}_m + \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial t} \right)}_{=\dot{x}_{\alpha,i}}, \quad (10.17)$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_j} = \sum_{\alpha=1}^N \sum_{i=1}^3 m_{\alpha} \underbrace{\left(\sum_{n=1}^s \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial q_n} \dot{q}_n + \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial t} \right)}_{=\dot{x}_{\alpha,i}} \underbrace{\frac{\partial}{\partial q_j} \left(\sum_{m=1}^s \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial q_m} \dot{q}_m + \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial t} \right)}_{=\dot{x}_{\alpha,i}}. \quad (10.18)$$

Pomocí rovností (10.14) a (10.15) upravíme vztahy (10.17) a (10.18):

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{\alpha=1}^N \sum_{i=1}^3 m_{\alpha} \dot{x}_{\alpha,i} \frac{\partial \dot{x}_{\alpha,i}}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{\alpha=1}^N \sum_{i=1}^3 m_{\alpha} \dot{x}_{\alpha,i} \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial q_j}, \quad (10.19)$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_j} = \sum_{\alpha=1}^N \sum_{i=1}^3 m_{\alpha} \dot{x}_{\alpha,i} \frac{\partial \dot{x}_{\alpha,i}}{\partial q_j}. \quad (10.20)$$

Derivací vztahu (10.19) podle času dostaneme:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) &= \sum_{\alpha=1}^N \sum_{i=1}^3 m_{\alpha} \left[\ddot{x}_{\alpha,i} \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial q_j} + \dot{x}_{\alpha,i} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial q_j} \right) \right] = \\ &= \sum_{\alpha=1}^N \sum_{i=1}^3 m_{\alpha} \left(\ddot{x}_{\alpha,i} \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial q_j} + \dot{x}_{\alpha,i} \frac{\partial \dot{x}_{\alpha,i}}{\partial q_j} \right). \end{aligned} \quad (10.21)$$

Využitím vztahů (10.20) a (10.21) můžeme psát, že

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} &= \sum_{\alpha=1}^N \sum_{i=1}^3 m_{\alpha} \left(\ddot{x}_{\alpha,i} \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial q_j} + \dot{x}_{\alpha,i} \frac{\partial \dot{x}_{\alpha,i}}{\partial q_j} - \dot{x}_{\alpha,i} \frac{\partial \dot{x}_{\alpha,i}}{\partial q_j} \right) = \\ &= \sum_{\alpha=1}^N \sum_{i=1}^3 \underbrace{m_{\alpha} \ddot{x}_{\alpha,i}}_{=F_{\alpha,i}} \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial q_j} = \sum_{\alpha=1}^N \sum_{i=1}^3 F_{\alpha,i} \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial q_j} \equiv Q_j, \end{aligned} \quad (10.22)$$

kde $F_{\alpha,i}$ je i -tá složka síly působící na α -tý hmotný bod a Q_j je j -tá složka zobecněné síly:

$$Q_j = \sum_{\alpha=1}^N \sum_{i=1}^3 F_{\alpha,i} \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial q_j}, \quad j = 1, 2, \dots, s. \quad (10.23)$$

Tímto jsme odvodili Lagrangeovy rovnice 2. druhu v nejobecnějším tvaru:

Lagrangeovy rovnice 2. druhu v nejobecnějším tvaru

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \quad j = 1, 2, \dots, s, \quad (10.24)$$

které řešíme s následujícími počátečními podmínkami:

$$q_j(t_0) = q_{j0}, \quad \dot{q}_j(t_0) = \dot{q}_{j0}, \quad (10.25)$$

druhá počáteční podmínka je zkráceným zápisem výrazu:

$$\left(\frac{dq_j}{dt} \right)_{t=t_0} = \dot{q}_{j0}.$$

Rovnice (10.24) představují pohybové rovnice uvažované soustavy N hmotných bodů se stupněm volnosti s .

Volba nezávislých zobecněných souřadnic je zcela libovolná, pakliže jednoznačně popisuje konfigurace soustavy. Kdybychom zvolili jinou soustavu nezávislých zobecněných souřadnic, našli bychom Lagrangeovy rovnice stejného tvaru. Takže Lagrangeovy rovnice druhého druhu mají tu vlastnost, že jsou invariantní (neměnné) při přechodu z jedné soustavy souřadnic k soustavě jiné.

Předpokládejme, že složka síly $F_{\alpha,i}$, vyskytující se ve vztahu (10.23), představuje složku síly, která je výslednicí konzervativní síly a disipativní síly, tedy

$$F_{\alpha,i} = F_{\alpha,i}^K + F_{\alpha,i}^{\text{Dis}}, \quad (10.26)$$

Pro složky konzervativních sil platí:

$$F_{\alpha,i}^K = - \frac{\partial U}{\partial x_{\alpha,i}}, \quad (10.27)$$

kde $U = U(x_{1,1}(q_1, \dots, q_s, t), \dots, x_{N,3}(q_1, \dots, q_s, t))$ je stacionární potenciální energie.

Nechť pro složky disipativní síly platí:

$$F_{\alpha,i}^{\text{Dis}} = - \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{x}_{\alpha,i}}, \quad (10.28)$$

kde \mathcal{D} je Rayleighova disipativní funkce dána následujícím předpisem (předpokládáme, že na všechny HB působí disipativní síly stejného typu):

$$\mathcal{D} = \frac{1}{n+1} \sum_{\alpha=1}^N \sum_{i=1}^3 k_{\alpha} \dot{x}_{\alpha,i}^{n+1}, \quad (10.29)$$

kde $n = 0$ platí pro disipativní třecí síly, $n = 1$ pro disipativní Stokesovu sílu a $n = 2$ pro disipativní Newtonovu odporující sílu a k_α jsou příslušné koeficienty úměrnosti pro jednotlivé hmotné body.

Tedy můžeme dosadit do vztahu (10.26) a dostáváme, že

$$F_{\alpha,i} = -\frac{\partial U}{\partial x_{\alpha,i}} - \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{x}_{\alpha,i}}. \quad (10.30)$$

Za $F_{\alpha,i}$ ve vztahu (10.23) dosadíme ze vztahu (10.30):

$$Q_j = \sum_{\alpha=1}^N \sum_{i=1}^3 \left(-\frac{\partial U}{\partial x_{\alpha,i}} \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial q_j} - \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{x}_{\alpha,i}} \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial q_j} \right). \quad (10.31)$$

Druhý člen upravíme na základě pravidla pro krácení tečkou (10.15), čímž dostaneme:

$$Q_j = \sum_{\alpha=1}^N \sum_{i=1}^3 \left(-\frac{\partial U}{\partial x_{\alpha,i}} \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial q_j} - \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{x}_{\alpha,i}} \frac{\partial \dot{x}_{\alpha,i}}{\partial \dot{q}_j} \right) = -\frac{\partial U}{\partial q_j} - \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}_j}. \quad (10.32)$$

Tento výsledek dosadíme do Lagrangeových rovnic 2. druhu v nejobecnějším tvaru (10.24), takže dostáváme:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = -\frac{\partial U}{\partial q_j} - \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}_j}, \quad j = 1, 2, \dots, s. \quad (10.33)$$

Jelikož stacionární potenciální energie nezávisí na zobecněných rychlostech, pak platí, že $\partial U / \partial \dot{q}_j = 0$. Díky této skutečnosti je možné upravit Lagrangeovy rovnice (10.33) do následujícího tvaru:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial (T - U)}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial (T - U)}{\partial q_j} = -\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}_j}, \quad j = 1, 2, \dots, s. \quad (10.34)$$

Zavedeme-li **Lagrangeovu funkci** (**lagranžián**) následujícím vztahem:

$$\mathcal{L}(q_1, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s, t) = T - U, \quad (10.35)$$

potom je možné Lagrangeovy rovnice 2. druhu přepsat do následujícího tvaru⁷:

Lagrangeovy rovnice 2. druhu pro konzervativní a disipativní síly

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = -\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}_j}, \quad j = 1, 2, \dots, s. \quad (10.36)$$

Dospěli jsme **Lagrangeovým rovnicím 2. druhu pro konzervativní a disipativní síly**.

V případě, že uvažujeme jen konzervativní síly ($\mathcal{D} = 0$), pak odtud dostaneme **Lagrangeovy rovnice 2. druhu pro konzervativní síly**:

⁷Počáteční podmínky jsou opět dány vztahy (10.25).

Lagrangeovy rovnice 2. druhu pro konzervativní síly

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, s. \quad (10.37)$$

Sestavením Lagrangeových rovnic 2. druhu získáme pohybové rovnice soustavy hmotných bodů pro zobecněné souřadnice. Jejich řešením získáme závislost obecných souřadnic $q_j(t)$ na čase.

Z Lagrangeových rovnic 2. druhu je patrné, že pohybové rovnice lze získat přímočarou kombinací parciálních derivací jediné skalární funkce \mathcal{L} , což představuje výhodu Lagrangeova formalismu oproti obvyklému newtonovskému přístupu, kde je nutné provádět složité rozklady působících sil do směrů jednotlivých souřadnic.

V případě, že budeme při sestavování pohybových rovnic pracovat s konzervativními silami, tak budeme postupovat dle následujícího postupu:

1. Určíme počet stupňů volnosti s dané mechanické soustavy a zavedeme vhodné zobecněné souřadnice q_j , $j = 1, \dots, s$, tj. s parametrů q_j , které jednoznačně popisují pohyb soustavy v souladu s vazbami.
2. Vyjádříme kartézské souřadnice $x_{1,1}, \dots, x_{N,3}$ pomocí zobecněných souřadnic, tj. určíme vztahy $x_{\alpha,i} = x_{\alpha,i}(q_1, q_2, \dots, q_s, t)$, kde $\alpha = 1, \dots, N$, $i = 1, 2, 3$.
3. Vypočteme složky kartézské rychlosti, tj. $\dot{x}_{\alpha,i} \equiv dx_{\alpha,i}(q_1(t), \dots, q_s(t), t)/dt$.
4. Dosazením do definice kinetické energie T (10.13) za kartézské složky rychlosti dostaneme vyjádření kinetické energie pro zobecněné souřadnice (10.16).
5. Dosazením $x_{\alpha,i}(q_1, q_2, \dots, q_s, t)$ do potenciální energie $U(x_{1,1}, \dots, x_{N,3})$ vypočítáme $U(q_1, \dots, q_s)$.
6. Určíme Lagrangeovu funkci $\mathcal{L} = T - U$.
7. Derivováním Lagrangeovy funkce a jejím následným dosazením do Lagrangeových rovnic (10.37) získáme hledané pohybové rovnice.

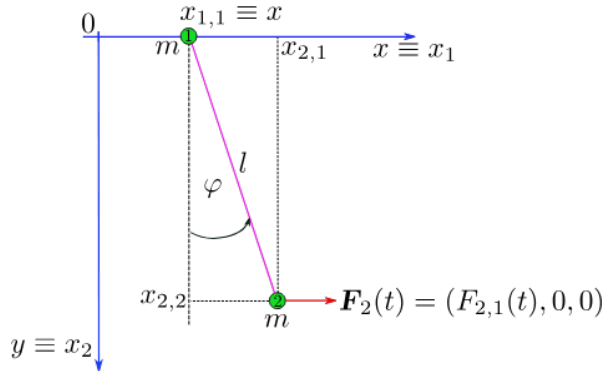
V případě, že uvažujeme i disipativní síly tak v 7. bodě postupu dosadíme do Lagrangeových rovnic (10.36) a vypočítáme pravou stranu na podle typu Rayleighova disipativní funkce, tj. pro danou hodnotu přirozeného čísla n .

Příklad 10.3.1

Uvažujte dva hmotné body o stejné hmotnosti m , kdy první y hmotných bodů klouže po kolejnici bez tření (možné si představit korálek pohybující se pod tenkým drátem) a druhý HB je pevně spojen s prvním bodem pomocí pevného nehmotného závěsu délky l , přičemž na něj působí předepsaná časově proměnná síla \mathbf{F}_2 ve směru osy x , viz obr. 10.3. Neuvažujte vliv tíhového pole Země. Nalezněte složky zobecněné síly a příslušné pohybové rovnice.

Řešení:

Soustava HB ($N = 2$) je podrobena celkem čtyřem holonomním vazbám ($R = 4$):



Obrázek 10.3: Soustava dvou HB.

$$x_{1,2} = 0, \quad x_{1,3} = 0, \quad x_{2,3} = 0, \quad (x_{1,1} - x_{2,1})^2 + x_{2,2}^2 - l^2 = 0.$$

Takže stupeň volnosti je: $s = 3N - R = 3 \cdot 2 - 4 = 2$, takže k jednoznačnému určení polohy obou HB nám stačí dvě zobecněné souřadnice, $q_1 = x_{1,1} \equiv x$ a $q_2 = \varphi$, viz obr. 10.3.

Složky zobecněné síly Q_j ($j = 1, 2$) spočítáme podle vztahu (10.23), přičemž ze zadání víme, že $\mathbf{F}_1 = \mathbf{0}$:

$$Q_j = \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{i=1}^3 F_{\alpha,i} \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial q_j}, \quad j = 1, 2.$$

Tedy

$$Q_1 = \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{i=1}^3 F_{\alpha,i} \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial q_1} = F_{2,1}(t). \quad (10.38)$$

Z obr. 10.3 vidíme, že

$$x_{1,1} = x_{1,1}(q_1) = x, \quad x_{2,1} = x_{2,1}(q_1, q_2) = x + l \sin \varphi, \quad x_{2,2} = x_{2,2}(q_2) = l \cos \varphi, \quad (10.39)$$

takže pro druhou složku zobecněných sil dostáváme, že

$$Q_2 = \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{i=1}^3 F_{\alpha,i} \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial q_2} = l F_{2,1}(t) \cos \varphi. \quad (10.40)$$

Celkovou kinetickou energii pomocí vztahů (10.39) spočítáme jako:

$$\begin{aligned} T &= T_1 + T_2 = \frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{2} m v_2^2 = \frac{1}{2} m \dot{x}_{1,1}^2 + \frac{1}{2} m (\dot{x}_{2,1}^2 + \dot{x}_{2,2}^2) = \\ &= \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m [(\dot{x} + l \dot{\varphi} \cos \varphi)^2 + l^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi] = m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi}^2 + m l \dot{x} \dot{\varphi} \cos \varphi. \end{aligned} \quad (10.41)$$

Pohybové rovnice pro uvažovanou soustavu HB získáme dosazením celkové kinetické (10.41) a složek zobecněné síly do Lagrangeových rovnic 2. druhu (10.24), tedy

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} = Q_1, \quad (10.42)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_2} = Q_2. \quad (10.43)$$

Pro příslušné derivace celkové energie (10.41) dostáváme:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial q_1} \equiv \frac{\partial T}{\partial x} &= 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \equiv \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = 2m\dot{x} + ml\dot{\varphi} \cos \varphi, \\ \frac{\partial T}{\partial q_2} \equiv \frac{\partial T}{\partial \varphi} &= -ml\dot{x}\dot{\varphi} \sin \varphi, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} \equiv \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2\dot{\varphi} + ml\dot{x} \cos \varphi. \end{aligned} \quad (10.44)$$

Dosadíme příslušné derivace do Lagrangeovy rovnice 2. druhu (10.42) derivace z (10.44) a složku zobecněné síly (10.38), čímž obdržíme první pohybovou rovnici:

$$\frac{d}{dt} (2m\dot{x} + ml\dot{\varphi} \cos \varphi) = F_{2,1}(t). \quad (10.45)$$

Provedeme-li derivaci podle času, tak dostaneme:

$$2m\ddot{x} + ml\ddot{\varphi} \cos \varphi - ml\dot{\varphi}^2 \sin \varphi = F_{2,1}(t). \quad (10.46)$$

Dále dosadíme do Lagrangeovy rovnice 2. druhu (10.43) derivace z (10.44) a složku zobecněné síly (10.40), čímž obdržíme druhou pohybovou rovnici:

$$\frac{d}{dt} (ml^2\dot{\varphi} + ml\dot{x} \cos \varphi) - (-ml\dot{x}\dot{\varphi} \sin \varphi) = lF_{2,1}(t) \cos \varphi. \quad (10.47)$$

Provedeme-li derivaci podle času a podělíme l , tak dostaneme:

$$ml\ddot{\varphi} + m\ddot{x} \cos \varphi - \dot{x}\dot{\varphi} \sin \varphi = F_{2,1}(t) \cos \varphi. \quad (10.48)$$

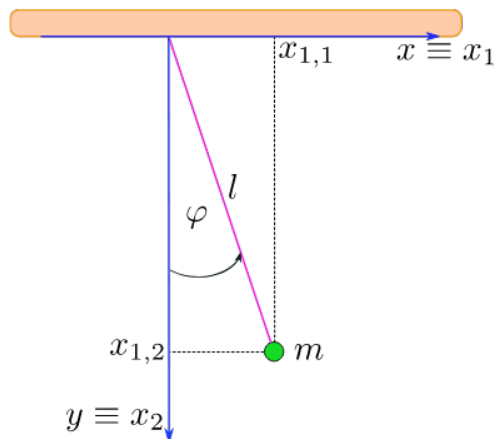
Rovnice (10.46) a (10.48) představují hledané pohybové rovnice, které bychom řešili pro zadané počáteční podmínky.

Příklad 10.3.2

Pomocí Lagrangeových rovnic popište pohyb rovinného matematického kyvadla, na které působí disipativní síly typu $n = 1$. Konstantní délka závěsu nechť je l , přičemž jeho hmotnost zanedbáváme. Hmotnost závaží (hmotného bodu) je m . Situace je zachycena na obrázku 10.4.

Řešení:

Počet stupňů volnosti rovinného matematického kyvadla $s = 1$ (konstantní délka závěsu a omezení se na pohyb rovinný zavádí dvě holonomní skleronomní vazby), $N = 1$, takže k jeho popisu vystačíme pouze s jednou zobecněnou souřadnicí.



Obrázek 10.4: Pohyb rovinného matematického kyvadla.

Touto zobecněnou souřadnicí bude středový úhel φ , viz obr. 10.4, tedy $q_1 \equiv \varphi$, $\dot{q}_1 \equiv \dot{\varphi}$. Transformační vztahy mezi zobecněnou souřadnicí a souřadnicemi kartézskými je následující

$$x \equiv x_{1,1} = l \sin \varphi , \quad (10.49)$$

$$y \equiv x_{1,2} = l \cos \varphi , \quad (10.50)$$

$$z \equiv x_{1,3} = 0 . \quad (10.51)$$

Zderivujeme vztahy (10.49), (10.50) a (10.51) podle času, čímž dostaneme složky rychlosti hmotného bodu⁸

$$v_x = \dot{x} \equiv \dot{x}_{1,1} = l \dot{\varphi} \cos \varphi , \quad (10.52)$$

$$v_y = \dot{y} \equiv \dot{x}_{1,2} = -l \dot{\varphi} \sin \varphi , \quad (10.53)$$

$$v_z = \dot{z} \equiv \dot{x}_{1,3} = 0 . \quad (10.54)$$

Abychom určili Lagrangeovu funkci $\mathcal{L} = T - U$, musíme nejdříve určit kinetickou T a potenciální U energii. Pro kinetickou energii můžeme psát, že

$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N \sum_{i=1}^3 m_{\alpha} \dot{x}_{\alpha,i}^2 = \frac{1}{2} m (\dot{x}_{1,1}^2 + \dot{x}_{1,2}^2 + \dot{x}_{1,3}^2) , \quad (10.55)$$

kde $m_1 \equiv m$. Za složky rychlosti v rovnosti (10.55) dosadíme výrazy (10.52), (10.53) a (10.54), čímž dostáváme

$$T = \frac{1}{2} m (l^2 \dot{\varphi}^2 \cos^2 \varphi + l^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi) = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi}^2 \underbrace{(\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi)}_{=1} = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi}^2 . \quad (10.56)$$

Pro potenciální energii v homogenním tíhovém poli Země s nulovou hodnotou pro $y = 0$ můžeme psát, že

$$U = -m g x_{1,2} . \quad (10.57)$$

⁸Při derivování je třeba si uvědomit, že zobecněná souřadnice je funkcí času $\varphi = \varphi(t)$ a že délka závěsu je konstantní $l = konst.$

Za $x_{1,2}$ ve vztahu (10.57) dosadíme výraz (10.50)

$$U = -mgl \cos \varphi . \quad (10.58)$$

Pomocí rovností (10.56) a (10.58) může již vyjádřit Lagrangeovu funkci

$$\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 + mgl \cos \varphi . \quad (10.59)$$

Rayleighova disipativní funkce (10.29) pro $n = 1$ bude mít tvar:

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N \sum_{i=1}^3 k_{\alpha} \dot{x}_{\alpha,i}^2 = \frac{1}{2} (k_1 \dot{x}_{1,1}^2 + k_1 \dot{x}_{1,2}^2) = \\ &= \frac{1}{2} k_1 (l^2 \dot{\varphi}^2 \cos^2 \varphi + l^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi) = \frac{1}{2} k_1 l^2 \dot{\varphi}^2 . \end{aligned} \quad (10.60)$$

Lagrangeovu rovnici 2. druhu (10.36) můžeme napsat jako

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1} = - \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}_1} . \quad (10.61)$$

Protože v našem případě $q_1 \equiv \varphi$ a $\dot{q}_1 \equiv \dot{\varphi}$, přepíšeme rovnici (10.61)

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = - \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{\varphi}} . \quad (10.62)$$

Derivací Lagrangeovy funkce (10.59) dostáváme:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{1}{2} ml^2 2\dot{\varphi} = ml^2 \dot{\varphi} . \quad (10.63)$$

Ještě zderivujeme výraz (10.63) podle času

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \right) = \frac{dml^2 \dot{\varphi}}{dt} = ml^2 \ddot{\varphi} . \quad (10.64)$$

Dále

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = -mgl \sin \varphi . \quad (10.65)$$

Derivací Rayleighovy disipativní funkce podle zobecněné rychlosti získáme:

$$\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{\varphi}} = k_1 l^2 \dot{\varphi} . \quad (10.66)$$

Dosazením výrazů (10.64), (10.65) a (10.66) do Lagrangeovy rovnice (10.62) dostaneme:

$$ml^2 \ddot{\varphi} + mgl \sin \varphi = -k_1 l^2 \dot{\varphi} . \quad (10.67)$$

Rovnici (10.67) podělíme výrazem ml^2

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = -\frac{k_1}{m} \dot{\varphi} . \quad (10.68)$$

Člen na pravé straně rovnice přesuneme na levou stranu rovnice a položíme $2\delta = k_1/m$:

$$\ddot{\varphi} + 2\delta\dot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0. \quad (10.69)$$

Rovnice (10.69) popisuje pohyb rovinného matematického kyvadla (pohybová rovnice) vystavenému působení jak konzervativní síly (tíhová síla), tak disipativní Stokesovy síly. Tato pohybová rovnice je obyčejnou nelineární diferenciální rovnicí druhého řádu. Pro malé amplitudy úhlové výchylky (maximální hodnoty úhlové výchylky) $\varphi_m < 5^\circ$, je možné rovnici (10.69) linearizovat náhradou $\sin \varphi \approx \varphi$, tedy

$$\ddot{\varphi} + 2\delta\dot{\varphi} + \frac{g}{l} \varphi = 0. \quad (10.70)$$

K vyřešení pohybové rovnice (10.69), příp. (10.70), potřebuje znát dvě počáteční podmínky, které mohou mít např. tvar:

$$\varphi(t_0) = \varphi_0 = \frac{\pi}{8}, \quad \dot{\varphi}(t_0) = \omega_0 = 0.$$

Kdybychom neuvažovali disipativní sílu, tj. útlum, pak bychom do rovnic (10.69), příp. (10.70) dosadili za $\delta = 0$.

Do posud jsme si zavedli tři zobecněné veličiny: zobecněnou souřadnici q_j , zobecněnou rychlost \dot{q}_j a zobecněnou sílu. Tyto zobecněné veličiny doplníme ještě o tzv. **zobecněnou hybnost**.

Uvažujme soustavu N hmotných bodů s lagranžiánem $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_1, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s, t)$. Pak skalární veličina p_j definována jako

$$p_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \quad (10.71)$$

se nazývá **zobecněná hybnost** odpovídající zobecněné souřadnici q_j .

Pomocí zobecněné hybnosti lze napsat Lagrangeovy rovnice 2. druhu pro konzervativní síly (10.37) jako

$$\dot{p}_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j}, \quad j = 1, 2, \dots, s. \quad (10.72)$$

10.4 Integrály pohybu a cyklické souřadnice

Lagrangeův formalismus nám umožňuje nejen efektivně sestavit pohybové rovnice vyšetřované mechanické soustavy, ale poskytuje nám i „triky“ pro jejich řešení, jak si ukážeme níže.

Při pohybu mechanické soustavy se $2s$ veličin q_j a \dot{q}_j , které určují fyzikální stav této soustavy, mění s časem. Existují však takové funkce veličin q_j a \dot{q}_j , které si při pohybu soustavy zachovávají konstantní hodnoty závislé jen na počátečních podmínkách. Tyto funkce se nazývají **integrály (konstanty) pohybu** a vyjadřují zákony zachování. Z matematického pohledu představuje integrál pohybu tzv. **první integrál pohybových rovnic** vycházejících z Lagrangeových rovnic 2. druhu

(10.37). Označme funkci (veličinu) představující integrál pohybu jako $G(q_j, \dot{q}_j, t)$, která po dosažení libovolného řešení Lagrangeových rovnic 2. druhu (10.37) $q_j = q_j(t)$ je konstantní (na čase nezávislá), tj.

$$G(t) \equiv G(q_j(t), \dot{q}_j(t), t) = konst. \quad \text{neboli} \quad \frac{dG(t)}{dt} = 0. \quad (10.73)$$

Je třeba zdůraznit, že pro různé trajektorie $q_j(t)$ je hodnota $G = konst.$ obecně různá.

Tedy nutnou a postačující podmínkou, aby funkce $G(q_1, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s, t)$ byla prvním integrálem pohybových rovnic (10.37) je

$$\frac{dG}{dt} = \sum_{j=1}^s \left(\frac{\partial G}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial G}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j \right) + \frac{\partial G}{\partial t} = 0. \quad (10.74)$$

Levá strana rovnice (10.74) vyjadřuje rychlost změny G v prostoru fyzikálních stavů podél libovolné trajektorie $q_j(t)$, která je řešením Lagrangeových rovnic 2. druhu (10.37), jež popisují pohyb uvažované soustavy.

Věta o cyklické souřadnici

Nezávisí-li Lagrangeova funkce \mathcal{L} na některé zobecněné souřadnici q_n (v takovém případě nazýváme zobecněnou souřadnici q_n **cyklickou souřadnicí**), pak výraz

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_n} \quad (10.75)$$

je integrálem pohybu.

Potvrzení platnosti této věty snadno získáme, když z Lagrangeových rovnic 2. druhu (10.37), kde $j = 1, \dots, n-1, n, n+1, \dots, s$ vybereme n -tou rovnici, tj.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_n} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_n} = 0.$$

Díky předpokladu, že zobecněná souřadnice q_n je cyklickou souřadnicí (lagranžian na q_n nezávisí), tj.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_n} = 0,$$

zůstane jen první člen n -té Lagrangeovy rovnice, takže

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_n} \right) = 0.$$

Na základě porovnání s (10.74), pak dostáváme, že

$$G \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_n} = konst.$$

Q.E.D.

Pozn.: Cyklických souřadnic může být i více. Dále na základě zavedené zobecněné hybnosti (10.71) můžeme konstatovat, že zobecněná hybnost odpovídající cyklické souřadnici je v čase konstantní.

Příklad 10.4.1

Uvažujme volný hmotný bod, tj. hmotný bod, na který nepůsobí žádné síly, o hmotnosti m . Nalezněte integrály pohybu.

Řešení:

Pro volný hmotný bod platí, že $U = 0$ a tedy $\mathcal{L} = T$. V kartézských souřadnicích můžeme Lagrangeovu funkci vyjádřit jako

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2),$$

tedy $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$, takže x, y, z jsou zřejmě cyklické souřadnice, a tak na základě výše uvedené věty dostáváme následující tři integrály pohybu

$$G_1 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} = C_1,$$

$$G_2 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} = C_2,$$

$$G_3 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} = C_3,$$

kde C_1, C_2, C_3 jsou konstanty. Uvedené integrály pohybu vyjadřují zákon zachování hybnosti, tedy

$$\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z) = (m\dot{x}, m\dot{y}, m\dot{z}) = (C_1, C_2, C_3) = \text{konst.}$$

V případě, že se uvažovaný hmotný bod nachází v homogenním tíhovém poli, pak Lagrangeova funkce bude mít následující tvar:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz,$$

tedy $\mathcal{L} = \mathcal{L}(z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$, takže v tomto případě máme pouze dvě cyklické souřadnice x, y .

Věta o zobecněné energii

Nezávisí-li Lagrangeova funkce \mathcal{L} explicitně na čase t , pak výraz

$$\mathcal{E}(q_1, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s) = \sum_{j=1}^s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - \mathcal{L}(q_1, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s), \quad (10.76)$$

který nazýváme **zobecněná energie**, je integrálem pohybu.

Platnost této věty si snadno ověříme tak, že zderivujeme rovnost (10.76), čímž dostaneme

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \sum_{j=1}^s \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) \dot{q}_j + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \dot{q}_j - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j \right],$$

kde v souladu s předpokladem věty již člen $-\partial L/\partial t$ není obsažen. Jelikož druhý a čtvrtý člen se navzájem vyruší, je možné po úpravě pro časovou derivaci zobecněné energie psát, že

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \sum_{j=1}^s \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \right] \dot{q}_j .$$

Výraz v hranaté závorce představuje levou stranu Lagrangeovy rovnice (10.37), která se pro reálný pohyb rovná nule, a tudíž $d\mathcal{E}/dt = 0$, takže $\mathcal{E} = konst.$ je integrálem pohybu.

Q.E.D.

Protože Lagrangeova funkce může být obecně funkcí času t , pak i zobecněná energie může obecně záviset na čase, tj.

$$\mathcal{E}(q_1, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s, t) = \sum_{j=1}^s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - \mathcal{L}(q_1, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s, t) , \quad (10.77)$$

avšak v tomto případě zobecněná energie již **není** integrálem pohybu, tak jak je uvedeno ve výše prezentované větě.

Příklad 10.4.2

Uvažujte hmotný bod, který se nachází v konzervativním silovém poli. Určete zobecněnou energii pro tento hmotný bod.

Řešení:

Pro kartézské souřadnice můžeme psát

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - U(x, y, z) ,$$

takže na základě rovnosti pro zobecněnou energii (10.76) dostaneme, že

$$\mathcal{E} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \dot{x} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} \dot{y} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} \dot{z} - \mathcal{L} = m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + U = T + U .$$

Z výsledku tohoto příkladu je vidět, že v tomto případě je zobecněná energie \mathcal{E} rovna celkové mechanické energii, která se zachovává.

Na tomto místě je třeba upozornit na skutečnost, že zobecněná energie \mathcal{E} jako integrál pohybu není vždy rovna součtu kinetické energie T a potenciální energie U . Například rheonomní vazby dané soustavě energii buď dodávají nebo ji odebírají. Jinými slovy je možné říct, že obsahují-li transformační rovnice mezi kartézskými a zobecněnými souřadnicemi explicitně čas⁹, pak zobecněná energie

⁹Samozřejmě současně platí předpoklad, že potenciální energie je funkcí pouze zobecněných souřadnic, tj. uvažuje se konzervativní silové pole.

se nerovná celkové mechanické energii soustavy. Toto tvrzení ale neznamena, že výběrem vhodných zobecněných souřadnic se může změnit fyzikální skutečnost, že se zobecněná energie zachovává.

Pokud jsou síly konzervativní a pokud jsou vazby holonomní a současně skleronomní, pak

$$\mathcal{E} = T + U = konst. , \quad (10.78)$$

tedy celková mechanická energie se zachovává.

Při dokazování platnosti této věty vyjdeme ze vztahu (10.16), přičemž využijeme skutečnosti, že v případě skleronomních vazeb platí rovnost $\partial x_{\alpha,i}/\partial t = 0$, tedy

$$\begin{aligned} T(q_1, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s) &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N \sum_{i=1}^3 m_{\alpha} \left(\sum_{n=1}^s \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial q_n} \dot{q}_n \right)^2 = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N \sum_{i=1}^3 m_{\alpha} \left(\sum_{m=1}^s \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial q_m} \dot{q}_m \right) \left(\sum_{n=1}^s \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial q_n} \dot{q}_n \right) . \end{aligned} \quad (10.79)$$

Zavedeme-li si následující matici

$$a_{mn}(q_1, \dots, q_s) = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N \sum_{i=1}^3 m_{\alpha} \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial q_m} \dot{q}_m \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial q_n} \dot{q}_n , \quad (10.80)$$

pak je možné vyjádřit kinetickou energii soustavy (10.79) následujícím způsobem

$$T = \sum_{m=1}^s \sum_{n=1}^s a_{mn} \dot{q}_m \dot{q}_n . \quad (10.81)$$

Derivací vztahu (10.81) podle \dot{q}_j a následným vynásobením touto zobecněnou rychlostí dostáváme, že

$$\sum_{j=1}^s \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j = \sum_{j=1}^s \sum_{m=1}^s \sum_{n=1}^s (a_{mn} \delta_{jm} \dot{q}_n + a_{mn} \delta_{jn} \dot{q}_m) \dot{q}_j = 2 \sum_{m=1}^s \sum_{n=1}^s a_{mn} \dot{q}_m \dot{q}_n = 2T . \quad (10.82)$$

Dosazením ze vztahu (10.82) do vztahu pro zobecněnou energii (10.76) dostaneme

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \sum_{j=1}^s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - \mathcal{L} = \sum_{j=1}^s \frac{\partial (T - U)}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - (T - U) = \\ &= \sum_{j=1}^s \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - (T - U) = 2T - T + U = T + U . \end{aligned} \quad (10.83)$$

Q.E.D.

10.5 Hamiltonovy kanonické rovnice pohybu

V této části kapitoly věnované analytické mechanice si ukážeme, jak je možné přeformulovat Lagrangeovy rovnice 2. druhu pro konzervativní síly na Hamiltonovy kanonické rovnice. Protože k tomuto přeformulování použijeme Legenderovy transformace, tak první část textu bude věnována právě jim.

10.5.1 Legenderovy transformace

Na úvod si uvedeme Legenderovy transformace a následně je doplníme vysvětlujícím textem.

Legenderovy transformace

Předpokládejme, že proměnné $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ jsou definovány jako funkce aktivních proměnných $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ a pasivních proměnných $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_m)$ následujícím vztahem:

$$\mathbf{v} = \nabla_{\mathbf{u}} \mathcal{F}(\mathbf{u}, \mathbf{w}), \quad (10.84)$$

kde \mathcal{F} je daná funkce \mathbf{u} a \mathbf{w} . Pak inverzní vztah může být vždy napsán ve tvaru:

$$\mathbf{u} = \nabla_{\mathbf{v}} \mathcal{G}(\mathbf{v}, \mathbf{w}), \quad (10.85)$$

kde funkce $\mathcal{G}(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ se vztahuje k funkci $\mathcal{F}(\mathbf{u}, \mathbf{w})$ následujícím vztahem:

$$\mathcal{G}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} - \mathcal{F}(\mathbf{u}, \mathbf{w}), \quad (10.86)$$

kde $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n$.

Dále pro derivace funkcí \mathcal{F} a \mathcal{G} podle pasivních proměnných $\{w_j\}$ platí:

$$\nabla_{\mathbf{w}} \mathcal{F}(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = -\nabla_{\mathbf{w}} \mathcal{G}(\mathbf{v}, \mathbf{w}). \quad (10.87)$$

Vztah mezi funkcemi \mathcal{F} a \mathcal{G} je symetrický a říkáme, že jsou Legenderovou transformací té druhé z nich.

V rámečku jsou proměnné uspořádány tak, že představují složky vektoru daných proměnných. Rovnice (10.86) představuje Legenderovu transformaci dané funkce \mathcal{F} . Vztahy (10.84) a (10.85) znamenají:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} = \nabla_{\mathbf{u}} \mathcal{F}(\mathbf{u}, \mathbf{w}) &= \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u_1}, \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u_2}, \dots, \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u_n} \right), \\ \mathbf{u} = \nabla_{\mathbf{v}} \mathcal{G}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) &= \left(\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial v_1}, \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial v_2}, \dots, \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial v_n} \right). \end{aligned} \quad (10.88)$$

Proměnné $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ a $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ jsou tzv. **aktivní proměnné**, protože jsou transformovány. Funkce \mathcal{F} a \mathcal{G} mohou také obecně záviset na proměnných $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_m)$, které nejsou součástí transformace, a takovéto proměnné nazýváme **pasivní proměnné**. Pasivní proměnné hrají roli parametrů.

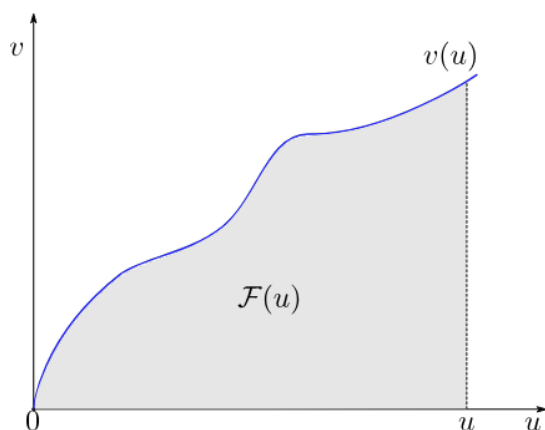
Pro pochopení smyslu Legendrovy transformace použijeme jednoduchý případ, kdy funkce je dána \mathcal{F} jako $\mathcal{F} = \mathcal{F}(u)$. Potom na základě vztahu (10.84) si můžeme vyjádřit, že

$$v(u) = \frac{\partial \mathcal{F}(u)}{\partial u} . \quad (10.89)$$

Odtud dostáváme, že

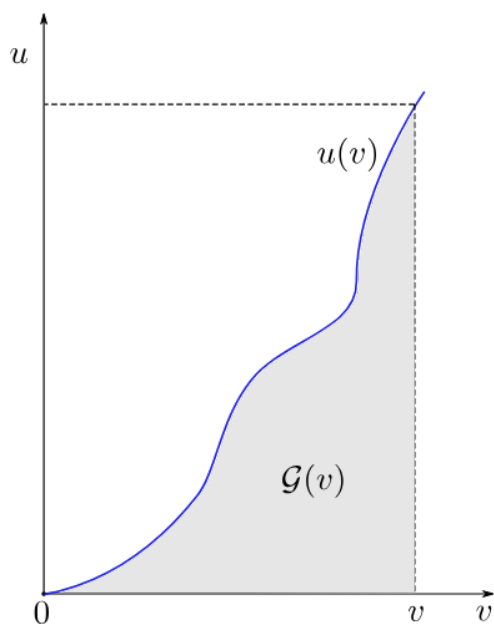
$$\mathcal{F}(u) = \int_0^u v(u') du' . \quad (10.90)$$

Geometricky je význam vztahu (10.90) je zachycen na obr. 10.5. Z obrázku lze



Obrázek 10.5: Geometrický význam vztahu (10.90).

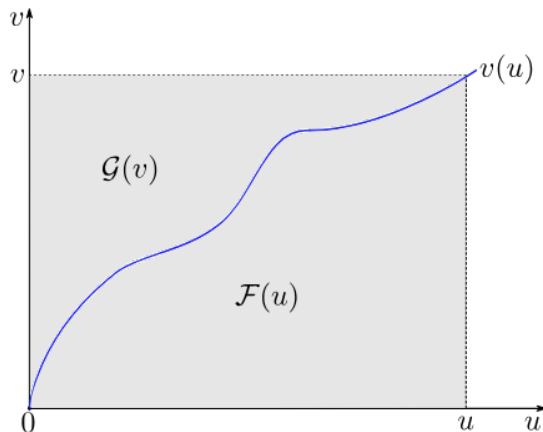
vidět, že funkce $\mathcal{F}(u)$ představuje plochu pod křivkou $v(u)$. Nyní provedeme rotaci grafu tak, aby se osy prohodily, viz obr. 10.6. Na tomto obrázku je zachycena plocha pod křivkou $u(v)$, které odpovídá nějaká funkce $\mathcal{G}(v)$, pro kterou musí platit, že



Obrázek 10.6: Rotace obr. 10.5.

$$\mathcal{G}(v) = \int_0^v u(v') dv' . \quad (10.91)$$

Nyní si ukážeme, jak lze si vyjádřit funkci $\mathcal{G}(v)$ pomocí funkce $\mathcal{F}(u)$. To provedeme tak, že do obr. 10.5 si zaneseme plochu odpovídající $\mathcal{G}(v)$, viz obr.10.7. Z tohoto



Obrázek 10.7: Sloučení ploch o velikostech $\mathcal{F}(u)$ a $\mathcal{G}(v)$.

obrázku vidíme, že sloučení ploch $\mathcal{F}(u)$ a $\mathcal{G}(v)$ odpovídá velikosti plochy obdélníku os stranách v a u , takže

$$uv = \mathcal{F}(u) + \mathcal{G}(v) . \quad (10.92)$$

Odtud dostáváme vztah pro funkci $\mathcal{G}(v)$:

$$\mathcal{G}(v) = uv - \mathcal{F}(u) , \quad (10.93)$$

což právě odpovídá Legendrově transformaci (10.86).

Příklad 10.5.1

Nalezněte Legendrovu transformaci funkce $\mathcal{F}(\mathbf{u}) = \mathcal{F}(u_1, u_2) = 2u_1^2 + 3u_1u_2 + u_2^2$.

Řešení:

Nejdříve si pomocí vztahu (10.84) vyjádříme vektor \mathbf{v} :

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2) = \nabla_{\mathbf{u}} \mathcal{F}(\mathbf{u}) = \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u_1}, \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u_2} \right) = (4u_1 + 3u_2, 3u_1 + 2u_2) . \quad (10.94)$$

Odtud dostáváme inverzní vztahy:

$$u_1(v_1, v_2) = -2v_1 + 3v_2 , \quad u_2(v_1, v_2) = 3v_1 - 4v_2 . \quad (10.95)$$

Potom na základě vztahu (10.86) při použití vztahů (10.95) můžeme nalézt Legendrovu transformaci:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(\mathbf{v}) = \mathcal{G}(v_1, v_2) &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} - \mathcal{F}(\mathbf{u}) = u_1v_1 + u_2v_2 - \mathcal{F}(u_1(v_1, v_2), u_2(v_1, v_2)) = \\ &= (-2v_1 + 3v_2)v_1 + (3v_1 - 4v_2)v_2 - 2u_1^2(v_1, v_2) - 3u_1(v_1, v_2)u_2(v_1, v_2) - u_2^2(v_1, v_2) = \\ &= -v_1^2 + 3v_1v_2 - 2v_2^2 . \end{aligned} \quad (10.96)$$

10.5.2 Odvození Hamiltonových kanonických rovnic pomocí Legendrovy transformace

Uvažujme soustavu N hmotných bodů s lagranžiánem $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_1, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s, t)$, který zapíšeme úspornějším způsobem: $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$, kde $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_s)$ a $\dot{\mathbf{q}} = (\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s)$. Dále si zavedeme vektor $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_s)$, kde $\{p_j\}$ jsou zobecněné hybnosti uvažované soustavy určené vztahem:

$$p_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}, \quad j = 1, 2, \dots, s. \quad (10.97)$$

Odtud můžeme psát (porovnej se vztahem (10.84)):

$$\mathbf{p} = \nabla_{\dot{\mathbf{q}}} \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t). \quad (10.98)$$

Vyjádříme si $\dot{\mathbf{q}}$ pomocí \mathbf{q} , \mathbf{p} a t , tedy

$$\dot{\mathbf{q}} = \nabla_{\mathbf{p}} \mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t), \quad (10.99)$$

kde funkce $\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ se nazývá **Hamiltonova funkce** (hamiltonián), která je Legendrovou transformací lagranžiánu (Lagrangeovy funkce) $\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$:

$$\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \dot{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{p} - \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t). \quad (10.100)$$

Zde $\dot{\mathbf{q}}$ a \mathbf{p} jsou aktivní proměnné a \mathbf{q} a t jsou pasivní proměnné.

Rovnost (10.100) je možné vyjádřit ve složkovém tvaru jako

$$\mathcal{H}(q_1, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s, t) = \sum_{j=1}^s p_j \dot{q}_j - \mathcal{L}(q_1, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s, t). \quad (10.101)$$

Pomocí zobecněných hybností $\{p_j\}$ lze zapsat Lagrangeovy rovnice 2. druhu pro konzervativní síly (10.37) jako

$$\dot{p}_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j}, \quad j = 1, 2, \dots, s, \quad (10.102)$$

což lze ekvivalentně vyjádřit ve vektorovém tvaru:

$$\dot{\mathbf{p}} = \nabla_{\mathbf{q}} \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t). \quad (10.103)$$

Na základě vztahu (10.87) můžeme psát:

$$\nabla_{\mathbf{q}} \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = -\nabla_{\mathbf{q}} \mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t). \quad (10.104)$$

Odtud s uvážením vztahu (10.103) dostáváme:

$$\dot{\mathbf{p}} = -\nabla_{\mathbf{q}} \mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t). \quad (10.105)$$

Tato rovnice reprezentuje transformované Lagrangeovy rovnice 2. druhu pro konzervativní síly.

Ze vztahu (10.87) rovněž vyplývá, že

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}. \quad (10.106)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &\equiv \mathbf{v}, \quad \dot{\mathbf{q}} \equiv \mathbf{u}, \\ (\mathbf{q}, t) &\equiv \mathbf{w}, \quad \mathcal{L} \equiv \mathcal{F}, \\ \mathcal{H} &\equiv \mathcal{G} \end{aligned}$$

Výše uvedené vztahy lze shrnout a dostat tak Hamiltonovy kanonické rovnice.

Hamiltonovy kanonické rovnice ve vektorovém tvaru

$$\dot{\mathbf{q}} = \nabla_{\mathbf{p}} \mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t), \quad (10.107)$$

$$\dot{\mathbf{p}} = -\nabla_{\mathbf{q}} \mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t), \quad (10.108)$$

kde $\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ je Hamiltonova funkce (hamiltonián) daná Legendrovou transformací Lagrangeovy funkce (lagranžiánu) $\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$:

$$\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \dot{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{p} - \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t). \quad (10.109)$$

Platí, že

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}. \quad (10.110)$$

Hamiltonovy kanonické rovnice ve složkovém tvaru

$$\dot{q}_j = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j}, \quad j = 1, 2, \dots, s \quad (10.111)$$

$$\dot{p}_j = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j}, \quad j = 1, 2, \dots, s, \quad (10.112)$$

kde $\mathcal{H}(q_1, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s, t)$ je Hamiltonova funkce (hamiltonián) daná Legendrovou transformací Lagrangeovy funkce (lagranžiánu) $\mathcal{L}(q_1, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s, t)$:

$$\mathcal{H}(q_1, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s, t) = \sum_{j=1}^s p_j \dot{q}_j - \mathcal{L}(q_1, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s, t). \quad (10.113)$$

Platí, že

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}. \quad (10.114)$$

Vidíme odtud, že Hamiltonovy kanonické rovnice jsou diferenciální rovnice 1. řádu a je jich $2s$, kdežto Lagrangeovy rovnice 2. druhu jsou diferenciální rovnice 2. řádu a je jich s .

Pro popis dynamiky soustavy hmotných bodů (mechanického systému) jsou Hamiltonovy kanonické rovnice ekvivalentní s Lagrangeovými rovnicemi 2. druhu.

Pro řešení Hamiltonových kanonických rovnic je nutné znát počáteční podmínky:

$$\mathbf{q}(t_0) = \mathbf{q}_0, \quad \mathbf{p}(t_0) = \mathbf{p}_0, \quad \text{resp.} \quad q_j(t_0) = q_{j0}, \quad p_j(t_0) = p_{j0}. \quad (10.115)$$

Tedy řešením Hamiltonových kanonických rovnic získáme časové závislosti zobecněných souřadnic $q_j(t)$ a zobecněných hybností $p_j(t)$.

Při hledání kanonických rovnic zpravidla nejdříve vytvoříme Lagrangeovu funkci, s jejíž pomocí vypočítáme zobecněné hybnosti ze vztahu (10.102). Avšak existují i případy, kdy je možné kanonické rovnice sestavit přímo.

Derivací Hamiltonovy funkce (10.113) podle času t a následným využitím Hamil-

tonových kanonických rovnic dostaneme:

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \sum_{j=1}^s \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} \dot{p}_j \right) + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = \sum_{j=1}^s \underbrace{(-\dot{p}_j \dot{q}_j + \dot{q}_j \dot{p}_j)}_{=0} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}. \quad (10.116)$$

Pokud Hamiltonova funkce není explicitně závislá na čase, potom

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{H} = konst. \quad (10.117)$$

Z rovnice (10.114) vyplývá, že nezávisí-li Hamiltonova funkce explicitně na čase, pak ani Lagrangeova funkce explicitně na čase nezávisí. Soustava hmotných bodů, pro kterou $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$, se nazývá **autonomní**.

Jelikož Hamiltonova funkce je číselně rovna zobecněné energii (10.77), potom můžeme říct, viz kapitola 10.4, že je-li uvažované silové pole konzervativní a uvažované vazby holonomní a zároveň skleronomní pak

$$\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = T(\mathbf{q}, \mathbf{p}) + U(\mathbf{q}) = konst. \quad (10.118)$$

Zobecněné souřadnice q_j a zobecněná hybnost p_j jsou tzv. **kanonicky sdružené veličiny**. Z kanonických rovnic (10.112) a (10.113) vyplývá, že jestliže hamiltonián neobsahuje zobecněnou souřadnici q_n , potom $\dot{p}_n = 0$, tedy sdružená zobecněná hybnost představuje integrál pohybu. Nezávisí-li Hamiltonova funkce na nějaké zobecněné souřadnici q_n , pak se tato souřadnice rovněž nazývá **cyklickou souřadnicí**. A platí, že je-li zobecněná souřadnice cyklická v případě Hamiltonovy funkce, pak je cyklická i v případě funkce Lagrangeovy. Avšak, je-li zobecněná souřadnice q_n cyklickou souřadnicí pro \mathcal{L} , neznamená to, že jí odpovídající zobecněná rychlost \dot{q}_n není součástí v Lagrangeovy funkce, tedy

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_1, \dots, q_{n-1}, q_{n+1}, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s, t). \quad (10.119)$$

Z Lagrangeovy funkce (10.119) vyplývá, že se tímto nesnižuje stupeň volnosti soustavy, tj. musí být řešeno s rovnic. Avšak v případě kanonické formulace platí, že je-li q_n cyklickou souřadnicí, pak $p_n = C_n$, kde C_n je konstanta a Hamiltonovu funkci je možné zapsat jako

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(q_1, \dots, q_{n-1}, q_{n+1}, \dots, q_s, p_1, \dots, p_{n-1}, C_n, p_{n+1}, \dots, p_s, t), \quad (10.120)$$

takže je nutné v tomto případě řešit jen $2s - 2$ diferenciálních rovnic prvního řádu, a tímto se počet stupňů volnosti efektivně sníží o 1. Konstantu C_n určíme z počátečních podmínek.

Hamiltonova formulace mechaniky je vhodná zejména v případech, kdy se setkáme s cyklickými souřadnicemi. Kdybychom mohli formulovat uvažovaný problém takovým způsobem, že by všechny souřadnice byly cyklické, potom bychom dosáhli jeho nejjednoduššího možného řešení. Je dokonce možné najít takové transformace souřadnic, které zajistí, že všechny souřadnice jsou cyklické. Tato problematika však přesahuje rámec tohoto skriptu.

Příklad 10.5.2

Napište Hamiltonovy kanonické rovnice pro vrh šikmý vzhůru, když víte, že těleso (hmotný bod) bylo vrženo pod elevačním úhlem α s počáteční rychlostí v_0 .

Řešení:

V tomto případě budeme uvažovat pouze kartézské souřadnice. Jelikož se jedná o rovinný pohyb, budeme předpokládat pohyb v rovině (x, y) . Na základě zadání můžeme napsat počáteční podmínky:

$$x(0) = 0, \quad y(0) = 0, \quad (10.121)$$

$$p_x(0) = mv_0 \cos \alpha, \quad p_y(0) = mv_0 \sin \alpha. \quad (10.122)$$

Protože pohyb uvažovaného hmotného bodu je vázán na rovinu (x, y) , máme jednu holonomní a zároveň skleronomní vazbu $z = 0$, takže musí platit, že $\mathcal{H} = T + U$. Stupeň volnosti je v tomto případě $s = 3 - 1 = 2$. Pro kartézské složky hybnosti můžeme psát, že

$$p_x = m\dot{x}, \quad p_y = m\dot{y}. \quad (10.123)$$

Pro celkovou mechanickou energii můžeme psát, že

$$E = T + U = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mgy. \quad (10.124)$$

Vzhledem k tomu, že Hamiltonova funkce je číselně rovna celkové mechanické energii, použijeme k vyjádření této funkce vztahu (10.124) s tím, že upravíme členy pro kinetickou energii pomocí vztahů (10.123)

$$\mathcal{H}(y, p_x, p_y) = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + mgy. \quad (10.125)$$

Z vyjádření Hamiltonovy funkce (10.125) je vidět, že tato funkce není závislá na proměnné x , takže tato souřadnice je cyklickou souřadnicí. Díky této skutečnosti k ní kanonicky sdružená hybnost p_x musí představovat integrál (konstantu) pohybu, tj. $p_x = C_x$, kde konstantu C_x určíme z počátečních podmínek (10.122), tedy $C_x = mv_0 \cos \alpha$. Tímto se efektivně snižuje stupeň volnosti od hodnoty 1, neboli je potřeba řešit pouze dvě Hamiltonovy kanonické rovnice. S ohledem na tuto skutečnost můžeme napsat Hamiltonovy kanonické rovnice (10.111) a (10.112)

$$\dot{y} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_y} = \frac{p_y}{m}, \quad (10.126)$$

$$\dot{p}_y = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y} = -mg. \quad (10.127)$$

Dosazením za složku hybnosti p_y v rovnosti (10.127) ze vztahu (10.126) dostaneme:

$$m\ddot{y} = -mg. \quad (10.128)$$

Integrací rovnice (10.128) podle času dostaneme, že

$$m\dot{y} = p_y = -mgt + C, \quad (10.129)$$

kde integrační konstantu C určíme z počáteční podmínky (10.122), tj. $C = mv_0 \sin \alpha$, takže výsledek (10.129) bude mít tvar

$$m\dot{y} = p_y = -mgt + mv_0 \sin \alpha, \quad (10.130)$$

který upravíme podělením hmotností a následnou integrací podle času dostaneme, že

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t \sin \alpha + C, \quad (10.131)$$

kde integrační konstantu C určíme z integrační podmínky (10.121), tj. $C = 0$, takže výsledek (10.131) bude mít výsledný tvar

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t \sin \alpha. \quad (10.132)$$

Získané výsledky představují známé vztahy pro popis vrhu šikmého vzhůru.

10.5.3 Fázový prostor

Uvažujme mechanickou soustavu, které přísluší zobecněné souřadnice q_j a kanonicky sdružené zobecněné hybnosti p_j , pro něž máme příslušnou Hamiltonovu funkci (10.113). Jestliže známe počáteční hodnoty (10.115), pak pohyb této soustavy je popsán funkcemi $q_j(t)$ a $p_j(t)$ ($j = 1, \dots, s$), které jsou jednoznačně určeny Hamiltonovými kanonickými rovnicemi. Uvažovaný pohyb může být reprezentován geometricky jako pohyb **fázového bodu** ve **fázovém prostoru**. Trajektorii fázového bodu fázovým prostorem nazýváme **fázovou trajektorií**. Fázový prostor je reálný prostor dimenze $2s$, ve kterém má fázový bod souřadnice $[q_1, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s]$. Bod ve fázovém prostoru reprezentuje nejen konfiguraci uvažované mechanické soustavy, ale, díky zobecněným hybnostem, celý jeho fyzikální stav. To je rozdíl oproti Lagrangeovu konfiguračnímu prostoru dimenze s . Potom každý pohyb mechanické soustavy odpovídá pohybu fázového bodu fázovým prostorem.

Příklad 10.5.3

Uvažujme mechanický systém s jedním stupněm volnosti, kterému odpovídá Lagrangeova funkce:

$$\mathcal{L} = \frac{\dot{q}^2}{4} - \frac{q^2}{9}. \quad (10.133)$$

Nalezněte fázové trajektorie, které odpovídají pohybu tohoto systému.

Řešení:

Zobecněnou hybnost (kanonicky sdruženou) p k zobecněné souřadnici q určíme pomocí vztahu (10.97):

$$p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = \frac{\dot{q}}{2}. \quad (10.134)$$

Odtud $\dot{q} = 2p$. Pomocí vztahu (10.113) určíme Hamiltonovu funkci (hamiltonián):

$$\mathcal{H} = \dot{q}p - \mathcal{L} = \dot{q}p - \frac{\dot{q}^2}{4} + \frac{q^2}{9} = (2p)p - \frac{(2p)^2}{4} + \frac{q^2}{9} = p^2 + \frac{q^2}{9}. \quad (10.135)$$

Pomocí Hamiltonových kanonických rovnic (10.111) a (10.112) dostaneme:

$$\dot{q} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = 2p, \quad \dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} = -\frac{2}{9}q. \quad (10.136)$$

Zderivujeme první z rovnic podle času a za zderivovanou zobecněnou hybnost dosadíme z druhé rovnice, čímž dostaneme:

$$\ddot{q} + \frac{4}{9}q = 0 . \quad (10.137)$$

Obecné řešení této pohybové rovnice můžeme napsat jako:

$$q = 3A \cos \left(\frac{2}{3}t + \alpha \right) , \quad (10.138)$$

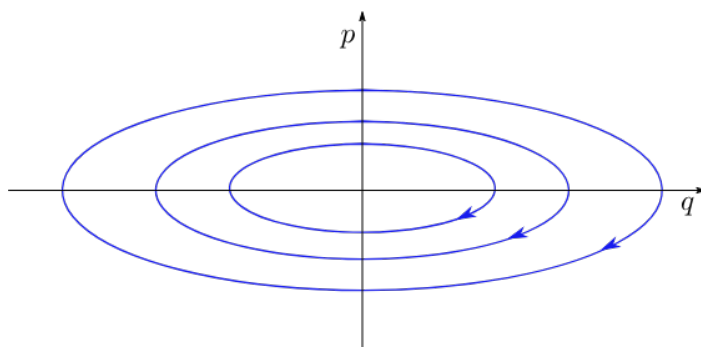
kde A a α jsou konstanty, které se určují z počátečních podmínek.

Řešení dosadíme do vztahu (10.134), čímž dostaneme:

$$p = \frac{\dot{q}}{2} = -A \sin \left(\frac{2}{3}t + \alpha \right) . \quad (10.139)$$

Vztahy (10.138) a (10.139) představují parametrické rovnice fázové trajektorie (elipsa) ve fázovém prostoru, kde čas t je parametrem. Fázových trajektorií je nekonečně mnoho, vždy konkrétní fázová trajektorie odpovídá příslušným počátečním podmínkám, tj. $q(t_0) = q_0$ a $p(t_0) = p_0$. Na obr. 10.8 jsou zachyceny tři fázové trajektorie. Jejich orientace je dána ve smyslu rostoucího času.

Pozn.: Zachytit jednoduše lze jen trajektorie pro mechanický systém s jedním



Obrázek 10.8: Tři vybrané fázové trajektorie.

stupněm volnosti.

Kapitola 11

Mechanické kmity

Obecně kmitavým pohybem tělesa (hmotného bodu) rozumíme jakýkoliv prostorově omezený pohyb tělesa (hmotného bodu) kolem stabilního rovnovážného bodu. O kmitání (vibracích) tělesa hovoříme jen tehdy, když všechny jeho části kmitají ve fázi, v opačném případě mluvíme o vlnění.

Mechanickou soustavu (např. těleso) schopnou konat mechanické kmity nazýváme **mechanický oscilátor**¹, přičemž pak jeho kmity můžeme nazývat **oscilacemi**.

11.1 Obecné vlastnosti přímočarého pohybu HB vystaveného působení konzervativní síly

Dříve než se budeme věnovat vlastní problematice mechanických kmitů, tak se budeme zabývat obecným vlastnostem pohybu HB, na který působí konzervativní síla. Jelikož uvažujeme pouze konzervativní síly, tak pro HB musí platit Zákon zachování mechanické energie:

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + U(x) = E = \text{konst.} , \quad (11.1)$$

kde m je hmotnost hmotného bodu, $v \equiv \dot{x}$ je jeho okamžitá rychlost a $U(x)$ je jeho potenciální (polohová) energie. Protože uvažujeme potenciální energii závislou jen na souřadnici x , tak se jedná o jednorozměrný pohyb HB po ose x .

Protože kinetická energie $T = mv^2/2 \geq 0$ (nulová je jen v případě, že $v = 0$), tak ze vztahu (11.1) vyplývá, že

$$U(x) \leq E . \quad (11.2)$$

Pomocí uvažované potenciální energie si můžeme vyjádřit konzervativní sílu jako

$$\mathbf{F}(x) = F(x)\mathbf{i} = -\frac{dU(x)}{dx}\mathbf{i} , \quad (11.3)$$

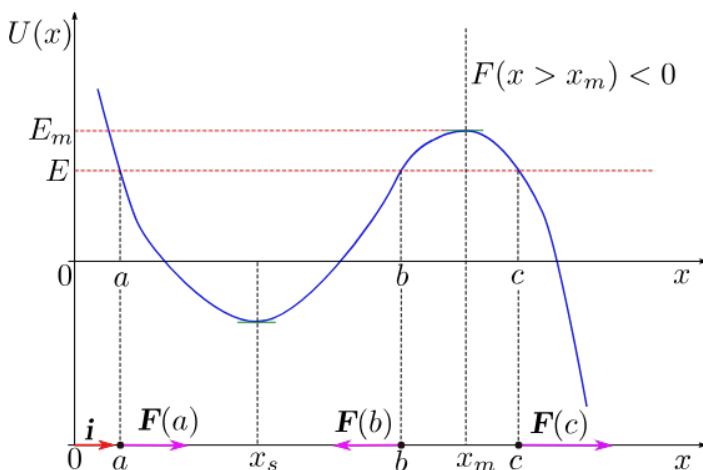
odtud

$$F(x) = -\frac{dU(x)}{dx} . \quad (11.4)$$

Uvažujme, že potenciální energie, jakožto funkce polohy x , má tvar, který je zachycen na obr. 11.1. Z obrázku je patrné, že $U(x = a) = U(x = b) = U(x = c) = E$.

¹Oscilátorem se obecně označuje soustava (např. elektrický obvod), ve které se uskutečňuje kmitání jiné fyzikální povahy než mechanické.

Nechť se právě HB nachází v bodě $x = a$. Protože v tomto bodě je potenciální energie rovna právě celkové mechanické energii, tak musí platit, že kinetická energie HB je nulová a tedy i rychlost HB se rovná nule. Derivace v bodě $x = a$, jak lze vidět z obrázku, je záporná, tak musí platit na základě vztahu (11.4), že $F(x = a) > 0$, takže konzervativní síla působící na HB:



Obrázek 11.1: Závislost potenciální energie na poloze x HB a konzervativní síla působící na HB.

$$\mathbf{F}(a) = - \left(\frac{dU(x)}{dx} \right)_{x=a} \mathbf{i} \quad (11.5)$$

má orientaci shodnou se souřadnicovým vektorem \mathbf{i} , viz obr. 11.1. Tedy HB se vlivem působení této síly bude pohybovat od bodu $x = a$ k bodu $x = b$. Během jeho pohybu bude kinetická energie již nenulová. Jakmile HB dosáhne bodu $x = b$, tak opět bude platit, že potenciální energie se v tomto místě bude rovnat celkové mechanické energii HB a tudíž kinetická energie bude opět nulová. To znamená, že se HB zastaví. V tomto místě, viz obr. 11.1, je derivace potenciální energie kladná, takže na základě vztahu (11.4) musí platit, že $F(x = b) < 0$. V tomto bodě bude na HB působit síla

$$\mathbf{F}(b) = - \left(\frac{dU(x)}{dx} \right)_{x=b} \mathbf{i}, \quad (11.6)$$

která bude působit proti orientaci osy x , takže ho bude vracet zpět. Místa $x = a$ a $x = b$, ve kterých má HB nulovou rychlost, jsou místa, kde dojde k obrácení směru pohybu HB, a proto se tato místa nazývají **bodem obratu**. V místě $x = x_s$ je derivace potenciální energie nulová (lokální minimum potenciální energie), takže síla působící na HB se bude rovnat nule, tj. $\mathbf{F}(x = x_s) = \mathbf{0}$. Umístíme-li HB do místa $x = x_s$, pak v tomto místě **setrvá**, protože síla, která je příčinou změny pohybového stavu, jak vyplývá ze Zákona setrvačnosti, je v tomto místě nulová. Vždy průchodem HB tímto bodem dochází ke **změně orientace** síly působící na HB a tato síla bude působit proti pohybu HB až dojde k jeho zastavení v bodě obratu. Můžeme říci, že síla působící na HB, ho vždy **vrací** do místa $x = x_s$. Pohyb HB se bude mezi body $x = a$ a $x = b$ neustále periodicky opakovat a

říkáme, že je HB uvězněn v potenciálové jámě vymezené body $x = a$ a $x = b$. Periodu pohybu T_p , tj. čas potřebný, aby HB proběhl z bodu $x = a$ k bodu $x = b$ a zpět, spočítáme z rovnice (11.1):

$$\dot{x}^2 = \frac{2}{m}(E - U(x)) \Rightarrow \dot{x} \equiv \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}. \quad (11.7)$$

Odtud

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}}. \quad (11.8)$$

Integrací obdržíme hledanou periodu pohybu:

$$T_p = 2 \int_{x=a}^{x=b} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}}. \quad (11.9)$$

Bude-li celková mechanická energie E_m a umístíme-li HB bod do místa $x = x_m$, viz 11.1, kde derivace potenciální energie je nulová, tak opět na HB bude působit nulová síla a HB v tomto místě **setrvá**. Takže v našem případě máme dva body $x = x_s$ a $x = x_m$, ve kterých síla působící na HB je nulová.

Rovnovážný bod

Vložíme-li hmotný bod do bodu P a zůstane-li v něm v klidu, potom bod P nazýváme rovnovážným bodem hmotného bodu.

Na základě této definice jsou body $x = x_s$ a $x = x_m$ rovnovážnými body, avšak existuje mezi nimi rozdíl spočívající v tom, že když HB udělíme velmi malý impuls síly orientovaný proti směru osy x , tak se bude kolem rovnovážného bodu $x = x_s$ periodicky pohybovat, kdežto kolem rovnovážného bodu $x = x_m$ nikoliv. Důvodem je, že tímto impulzem bude celková mechanická energie HB o něco vyšší než E_m , takže v bodě $x = x_m$ nebude mít HB již nulovou rychlost, když se HB do tohoto místa vrátí. HB proběhne kolem tohoto bodu. Protože v našem případě platí, že $F(x > x_m) < 0$, tedy v oblasti $x > x_m$ bude mít síla působící na HB orientaci v kladném směru osy x , což způsobí, že se již HB **nevrátí** a bude se jen pohybovat ve směru osy x . Kdyby impuls síly měl opačnou orientaci, tak se opět bude HB pohybovat kolem bodu $x = x_s$, avšak z bodu $x = x_m$ se bude pohybovat pryč se zrychlením v kladném směru osy x a již se **nevrátí**.

Stabilní a metastabilní rovnovážný bod

Uvažujme hmotný bod, který se nachází v rovnovážném bodě P , když přijme impuls síly o velikosti I . Nechť δ je amplituda jeho následného pohybu. Jestliže platí, že $\delta \rightarrow 0$, když $I \rightarrow 0$, pak bod P nazýváme stabilním rovnovážným bodem hmotného bodu. Není-li tomu tak, potom bod P nazýváme metastabilním rovnovážným bodem hmotného bodu.

Tedy našim případem je bod $x = x_s$ stabilním rovnovážným bodem HB, kdežto bod $x = x_m$ je metastabilním rovnovážným bodem HB.

Bere me v úvahu jen kladný případ, protože i čas určující dobu pohybu musí být kladný.

Rovnovážné polohy hmotného bodu

Stacionární body potenciální energie $U(x)$ představují rovnovážné body hmotného bodu a body, kde nabývá potenciální energie $U(x)$ minima jsou stabilními rovnovážnými body.

11.1.1 Netlumený mechanický harmonický oscilátor

Omezíme se na pohyb jednoho HB, který se děje v jedné přímce (nechť je jí osa x), tj. bude se jednat o jednorozměrný kmitavý pohyb. Budem předpokládat, že na HB působí jen konzervativní síla, takže pro HB bude platit Zákon zachování mechanické energie (11.1), tj.

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + U(x) = E = \text{konst.} \Rightarrow U(x) \leq E, \quad (11.10)$$

kde m značí hmotnost uvažovaného HB a $U(x)$ je jeho potenciální energie, jejíž závislost na souřadnici x je zachycena na obr. 11.1. Z tohoto obrázku je patrné, že $U(x=a) = U(x=b) = E$.

Protože má potenciální energie minimum v bodě $x = x_s$, tak tento bod odpovídá stabilnímu rovnovážnému bodu, kolem kterého bude uvažovaný HB konat periodický kmitavý pohyb mezi body $x = a$ a $x = b$ (HB koná omezený pohyb v potenciálové jámě). Protože již víme, že konzervativní síla bude vždy působit směrem navracející HB do jeho stabilního rovnovážného bodu, tak tuto sílu budeme nazývat **vratná síla** a budeme ji značit $\mathbf{F}_V(x)$ a již z předchozího textu víme, že pro ní platí:

$$\mathbf{F}_V(x) = F_V(x)\mathbf{i} = -\frac{dU(x)}{dx}\mathbf{i}, \quad (11.11)$$

kde

$$F_V(x) = -\frac{dU(x)}{dx}. \quad (11.12)$$

Protože pohyb HB je periodický, tak pro něj bude platit, že $x(t) = x(t + T_p)$, kde T_p představuje periodu pohybu, kterou spočítáme podle vztahu (11.9). **Kyvem** budeme rozumět pohyb z jedné maximální výchylky uvažovaného hmotného bodu do jeho opačné maximální výchylky, přičemž pro periodický pohyb je doba kyvu τ_k rovna polovině periody. **Kmit** je pohyb z jedné maximální výchylky uvažovaného hmotného bodu přes jeho opačnou maximální výchylku zpět do jeho maximální výchylky, tedy se jedná o pohyb oscilátoru odpovídající úplnému cyklu. V případě periodického pohybu trvá právě jednu periodu.

Dále je možné pohyb dělit na **harmonický** a **anharmonický** (**neharmonický**). Harmonický pohyb je takový pohyb, u kterého závislost polohy (výchylky) hmotného bodu na čase je vyjádřena harmonickou funkcí, např. $A \sin(\omega t + \varphi)$. Nelze-li vyjádřit závislost polohy hmotného bodu na čase pomocí harmonické funkce, jedná se o pohyb anharmonický. Anharmonický pohyb však může být pohybem periodickým.

Provedeme Taylorův rozvoj vratné síly kolem stabilního rovnovážného bodu x_s :

$$F_V(x) = F_{V_s} + \left(\frac{dF_V}{dx} \right)_{x=x_s} (x - x_s) + \frac{1}{2!} \left(\frac{d^2 F_V}{dx^2} \right)_{x=x_s} (x - x_s)^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{d^3 F_V}{dx^3} \right)_{x=x_s} (x - x_s)^3 + \dots, \quad (11.13)$$

kde F_{V_s} je hodnota funkce F_V v bodě $x = x_s$, tj. $F_{V_s} = F_V(x_s)$. Pro F_{V_s} však musí platit, že $F_{V_s} = 0$, jinak by bod o souřadnici $x = x_s$ nebyl rovnovážným bodem, protože by na HB nacházející se v tomto bodě působila síla, která by ho z tohoto bodu vždy vychýlila. Dále budeme předpokládat, že výchylky kmitajícího bodu z rovnovážné polohy jsou malé ($|x - x_s| \ll 1$), takže můžeme zanedbat členy obsahující $(x - x_s)^n$, kde $n \geq 2$ (provedeme linearizaci). Takže pro tuto vratnou sílu dostáváme, že

$$F_V(x) = \left(\frac{dF_V}{dx} \right)_{x=x_s} (x - x_s). \quad (11.14)$$

Jelikož vratná síla vždy směřuje k rovnovážnému stabilnímu bodu, tj. její smysl je vždy opačný, než je smysl výchylky, takže musí platit, že

$$\left(\frac{dF_V}{dx} \right)_{x=x_s} < 0. \quad (11.15)$$

S ohledem na vztah (11.12) lze relaci (11.15) vyjádřit jako

$$-\left(\frac{d^2 U}{dx^2} \right)_{x=x_s} < 0 \Rightarrow \left(\frac{d^2 U}{dx^2} \right)_{x=x_s} > 0. \quad (11.16)$$

Označme

$$\left| \left(\frac{dF_V}{dx} \right)_{x=x_s} \right| = k,$$

potom můžeme výraz (11.14) přepsat do tvaru

$$F_V(x) = -k(x - x_s), \quad (11.17)$$

kde k je kladná konstanta.

V našem případě je tedy vratná síla lineární funkcí x (lineární vratná síla), takže v tomto případě pak mluvíme o **lineárním mechanickém oscilátoru**.

Vyjádříme-li vratnou sílu ve vektorovém tvaru, tj. $\mathbf{F}_V = (-k(x - x_s), 0, 0)$, potom se snadno přesvědčíme, že $\nabla \times \mathbf{F}_V = \mathbf{0}$, tedy že se opravdu jedná o sílu konzervativní.

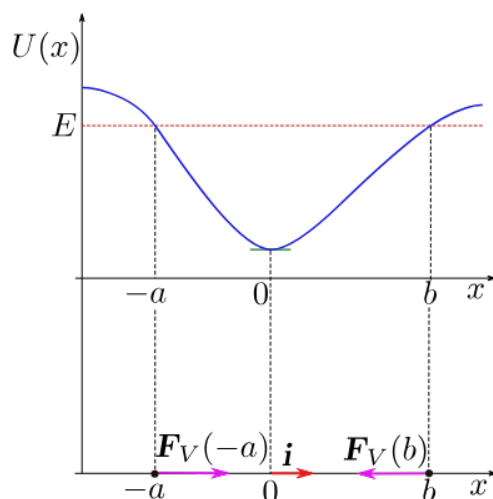
Nebude-li uvedeno jinak, budeme v dalším textu předpokládat lineární vratnou sílu. Bez újmy na obecnosti položíme $x_s = 0$, takže vratná síla je dána vztahem:

$$F_V(x) = -kx \quad (11.18)$$

a odpovídající potenciální energie $U(x)$ může mít např. průběh, jak je zachycen na obr. 11.2.

Vzhledem k tomu, že vratná síla (11.18) je silou konzervativní, pak je i silou

Vždy můžeme zvolit počátek na ose x tak, aby se rovnovážný bod nacházel právě v počátku.



Obrázek 11.2: Závislost potenciální energie na poloze x HB a vratná síla působící na HB.

potenciálovou a můžeme ji vyjádřit jako

$$F_V = -kx = -\frac{dU}{dx}, \quad (11.19)$$

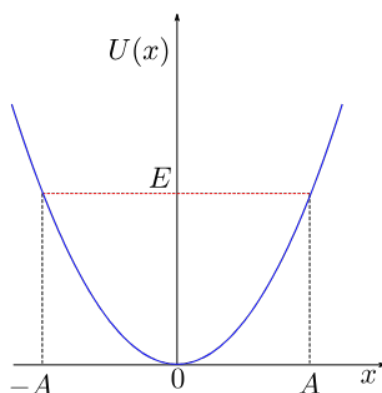
kde $U(x)$ je příslušná potenciální energie vratné síly kmitavého pohybu, kterou můžeme vyjádřit přímo ze vztahu (11.19) jako

$$U(x) = -\int_0^x F_V(x') dx' = \int_0^x kx' dx' = \frac{1}{2}kx^2. \quad (11.20)$$

Potenciální energie v rovnovážném bodě $x = 0$ nabývá nulové hodnoty. Takže potenciální energii kmitavého pohybu je dána následujícím vztahem:

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2. \quad (11.21)$$

Na obrázku 11.3 je zachycen **parabolický** průběh potenciální energie $U(x)$.



Obrázek 11.3: Závislost potenciální energie kmitavého pohybu na jeho výchylce (parabolická potenciálová jáma).

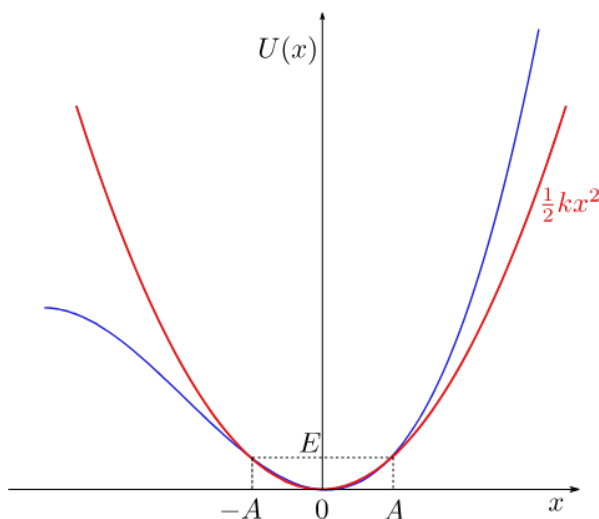
Pro celkovou mechanickou energii námi uvažovaného netlumeného oscilátoru dostáváme:

$$E = T + U = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = konst. . \quad (11.22)$$

Protože HB periodicky kmitá mezi body $x = -A$ a $x = A$, které představují body obrátu (potenciální energie se rovná celkové mechanické energii, protože v těchto bodech je kinetická energie nulová), pak na základě vztahu (11.21) můžeme psát, že

$$E = \frac{1}{2}kA^2 = konst. . \quad (11.23)$$

Z výše uvedeného vyplývá, že libovolnou potenciálovou jámu můžeme vždy pro malé výchylky HB aproximovat kolem jejího minima (stabilního rovnovážného bodu) parabolickou potenciálovou jámou, viz obr. 11.4.



Obrázek 11.4: Aproximace potenciálové jámy (modře) kolem rovnovážného bodu parabolickou potenciálovou jámou (červeně) pro malé výchylky.

Nyní si vyjádříme pohybovou rovnici pro HB konající jednorozměrný periodický kmitavý pohyb kolem rovnovážného bodu, na který působí lineární vratná síla:

$$m\ddot{x} = F_V . \quad (11.24)$$

Dosazením za F_V ze vztahu (11.18) dostáváme, že

$$m\ddot{x} = -kx . \quad (11.25)$$

Upravíme pohybovou rovnici netlumeného harmonického oscilátoru, resp. netlumených harmonických kmitů, (11.25) do následujícího tvaru

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 , \quad (11.26)$$

kde

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = konst. \quad (11.27)$$

Rovnice (11.26) představuje obyčejnou lineární homogenní diferenciální rovnici s konstantními koeficienty. Řešením jí odpovídající charakteristické rovnice ($\lambda^2 + \omega_0^2 = 0$) zjistíme charakteristická čísla $\lambda_{1,2} = \pm j\omega_0$. Pak obecné řešení této diferenciální rovnice je možné napsat ve tvaru

$$\begin{aligned} x(t) &= Q_1 e^{\lambda_1 t} + Q_2 e^{\lambda_2 t} = Q_1 e^{j\omega_0 t} + Q_2 e^{-j\omega_0 t} = \\ &= Q_1 (\cos \omega_0 t + j \sin \omega_0 t) + Q_2 (\cos \omega_0 t - j \sin \omega_0 t) = \\ &= (Q_1 + Q_2) \cos \omega_0 t + j(Q_1 - Q_2) \sin \omega_0 t, \quad (11.28) \end{aligned}$$

kde Q_1 a Q_2 jsou obecně komplexní konstanty, tj. $Q_1 = a_1 + jb_1$, $Q_2 = a_2 + jb_2$. Vzhledem k tomu, že každá z těchto konstant má obecně jak reálnou, tak imaginární složku, jedná se tedy o čtyři konstanty (a_1, b_1, a_2, b_2), které nemohou být nezávislé, protože k jejich určení vycházíme pouze ze dvou reálných počátečních podmínek. Počet nezávislých konstant může být redukován požadavkem, že konstanty Q_1 a Q_2 jsou komplexně sdružené, tj. $Q_1 = (C + jD)/2$, $Q_2 = (C - jD)/2$, a tímto se současně zajistí, že samotné řešení bude reálné. Dosazením těchto komplexně sdružených konstant do obecného řešení (11.28) dostaneme

$$x(t) = C \cos \omega_0 t + D \sin \omega_0 t, \quad (11.29)$$

kde C a D jsou reálné integrační konstanty. Jejich hodnoty se určí z počáteční podmínky výchylky $x(t_0) = x_0$ a počáteční rychlosti $v(t_0) = v_0$.

Zavedeme-li nové konstanty C a D následujícím způsobem

$$C = A \sin \varphi_0 \quad \text{a} \quad D = A \cos \varphi_0, \quad (11.30)$$

potom je možné řešení (11.29) upravit do následujícího tvaru

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (11.31)$$

kde amplitudu A a počáteční fázi φ_0 určíme ze vztahů (11.30) následujících způsobem

$$A = \sqrt{C^2 + D^2}, \quad \tan \varphi_0 = \frac{C}{D}. \quad (11.32)$$

Ze vztahu pro okamžitou výchylku HB (11.31) vyplývá, že se jedná o **harmonický** mechanický oscilátor.

Z řešení (11.31) plyne, že netlumený mechanický oscilátor koná periodické harmonické kmity s periodou

$$T_p = \frac{2\pi}{\omega_0},$$

kde ω_0 nazýváme **vlastní (charakteristický) kruhový kmitočet** lineárního mechanického oscilátoru.

Ke stejnému výsledku pro periodu kmitů bychom dospěli při použití vztahu (11.9), kde za celkovou mechanickou energii dosadíme ze vztahu (11.23), za potenciální energii dosadíme ze vztahu (11.21) a použijeme vztahu (11.27):

$$\begin{aligned} T_p &= 2 \int_{x=-A}^{x=A} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}} = 2 \int_{x=-A}^{x=A} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(\frac{1}{2}kA^2 - \frac{1}{2}kx^2)}} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{2\pi}{\omega_0}. \end{aligned} \quad (11.33)$$

Argument funkce sinus v řešení (11.31) $\omega_0 t + \varphi_0$ nazýváme **fáze kmitavého pohybu**. Časovou derivací výchylky (11.31) dostaneme rychlost kmitavého pohybu

$$v(t) \equiv \dot{x} = \omega_0 A \cos(\omega_0 t + \varphi_0) . \quad (11.34)$$

Upravíme vztah pro rychlost (11.34) tak, abychom ho mohli snadněji porovnat se vztahem pro výchylku (11.31), tedy

$$v(t) = \omega_0 A \sin\left(\omega_0 t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right) . \quad (11.35)$$

Ze vztahu (11.35) je vidět, že počáteční fáze rychlosti je $\varphi_0 + \pi/2$, tedy že rychlost fázově předbíhá výchylku o 90° .

Derivací okamžité rychlosti (11.34) dostaneme okamžité zrychlení harmonického pohybu

$$a(t) \equiv \ddot{x} = -\omega_0^2 A \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = \omega^2 A \sin(\omega_0 t + \varphi_0 + \pi) . \quad (11.36)$$

V případě zrychleného kmitavého pohybu je počáteční fáze rovna $\varphi_0 + \pi$, neboli zrychlení kmitavého pohybu je fázově posunuto o 180° oproti výchylce.

Dosazením za rychlost ze vztahu (11.34), za výchylku ze vztahu (11.31) a konstantu $k = m\omega_0^2$ ze vztahu (11.27) do rovnice pro celkovou mechanickou energii (11.22) dospějeme k následující rovnosti

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} m \omega_0^2 A^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0) + \frac{1}{2} m \omega_0^2 A^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0) = \\ &= \frac{1}{2} m \omega_0^2 A^2 [\sin^2(\omega_0 t + \varphi_0) + \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0)] = \frac{1}{2} m \omega_0^2 A^2 = \frac{1}{2} k A^2 = \text{konst.} , \end{aligned} \quad (11.37)$$

což odpovídá vztahu (11.23).

Z pravé strany rovnosti (11.37) je vidět, že celková mechanická energie netlumeného harmonického oscilátoru nezávisí na čase a je tedy konstantní, což je očekávaný závěr vzhledem ke skutečnosti, že vratná síla je silou konzervativní. Při kmitavém pohybu se periodicky mění potenciální energie na kinetickou a zpět. Při maximální výchylce je kinetická energie nulová a potenciální energie dosahuje svého maxima a rovná se celkové mechanické energii harmonického oscilátoru. Tedy platí relace, že $E \geq U(x)$.

Vyjádríme si celkovou mechanickou energii HB pomocí hybnosti $p = m\dot{x}$:

$$E = T + U = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} k x^2 = \mathcal{H}(x, p) , \quad (11.38)$$

kde \mathcal{H} je Hamiltonova funkce pro netlumený mechanický oscilátor ($q \equiv x$), který představuje mechanický systém o jednom stupni volnosti.

Z Hamiltonových kanonických rovnic (10.111) a (10.112) vyplývá, že

$$\dot{x} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = \frac{p}{m} \quad \text{neboli} \quad \frac{dx}{dt} = \frac{p}{m} , \quad (11.39)$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} = -kx \quad \text{neboli} \quad \frac{dp}{dt} = -kx . \quad (11.40)$$

Pomocí těchto Hamiltonových kanonických rovnic si můžeme snadno nalézt rovnice trajektorie kmitajícího HB ve fázové rovině (x, p) . Z těchto rovnic dostáváme:

$$\frac{\frac{dp}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = -\frac{kx}{\frac{p}{m}} \Rightarrow \frac{p}{m} dp = -kx dx . \quad (11.41)$$

Řešením této rovnice metodou separace proměnných získáme:

$$\frac{p^2}{2m} = -\frac{1}{2}kx^2 + C , \quad (11.42)$$

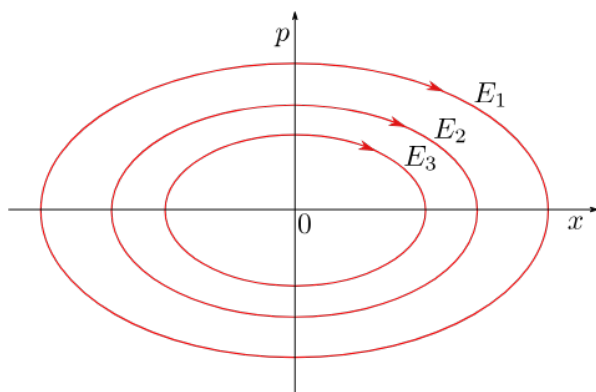
kde C je integrační konstanta, pro kterou odtud, při požití rovnosti (11.38), platí:

$$C = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2 = E . \quad (11.43)$$

Odtud za integrační konstantu $C = E$ dosadíme do rovnice (11.42), čímž získáme hledanou rovnici trajektorie HB:

$$\frac{x^2}{2E/k} + \frac{p^2}{2mE} = 1 . \quad (11.44)$$

Vidíme, že trajektorií HB ve fázové rovině (x, p) je elipsa, viz obr. 11.5. Na tomto obrázku jsou zachyceny trajektorie HB pro tři různé hodnoty celkové mechanické energie E_1 , E_2 a E_3 . Vzhledem k tomu, že HB koná periodický pohyb, tak jsou jeho



Obrázek 11.5: Fázové trajektorie HB pro tři různé celkové mechanické energie.

trajektorie uzavřené. Průsečíky trajektorie s osou x odpovídají polohám vratných bodů, kdy potenciální energie se rovná celkové mechanické energii. Trajektorie protínají osu p , když se HB nachází v rovnovážném bodě a dosahuje nejvyšší rychlosti, tedy i maximální hybnosti (potenciální energie je nulová v rovnovážném bodě).

Dosadíme-li do rovnice elipsy (11.44) za celkovou mechanickou energii ze vztahu (11.23), tak dostáváme:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{p^2}{mkA^2} = 1 . \quad (11.45)$$

Odtud vidíme, jak velikosti poloos elipsy souvisí s amplitudou výchylky harmonického oscilátoru.

11.1.2 Tlumený mechanický harmonický oscilátor

Netlumený mechanický oscilátor je fyzikální idealizací, jelikož koná časově neomezený kmitavý pohyb. Naši každodenní (makroskopické) zkušenosti odpovídá mechanický oscilátor, jehož amplituda výchylky se s časem zmenšuje, neboli se tlumí, tj. dochází k postupné disipaci mechanické energie, kterou mají na svědomí disipativní síly (9.32). Jelikož uvažujeme jednorozměrný pohyb, budeme uvažovat pouze disipativní sílu $F_{Dis} = -\lambda(x, \dot{x}) \dot{x}$, kde λ je kladná skalární funkce. Obvykle uvažujeme disipativní sílu přímo úměrnou rychlosti:

$$F_{Dis} = -h\dot{x} , \quad (11.46)$$

kde h (kgs^{-1}) je kladná konstanta $h > 0$.

Pohybová rovnice tlumeného mechanického oscilátoru má následující tvar

$$m\ddot{x} = F_V + F_{Dis} . \quad (11.47)$$

Dosažením za vratnou sílu F_V ze vztahu (11.18) a za disipativní sílu ze vztahu (11.46) do pohybové rovnice (11.47) dostaneme:

$$m\ddot{x} = -kx - h\dot{x} . \quad (11.48)$$

Úpravou pohybové rovnice dospějeme k jejímu následujícímu tvaru:

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 , \quad (11.49)$$

kde $\delta = h/(2m)$ je tzv. **dekrement útlumu** (jednotkou je s^{-1}) (**parametr útlumu**) a $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.

Vzhledem k tomu, že uvažujeme působení disipativních sil, ukážeme si jakým způsobem se bude s časem měnit mechanická energie tlumeného mechanického oscilátoru na teplo. Pro tento účel si přepíšeme pohybovou rovnici (11.49) do následujícího tvaru:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = -2\delta\dot{x} . \quad (11.50)$$

Vynásobíme rovnici (11.50) rychlostí \dot{x}

$$\ddot{x}\dot{x} + \omega_0^2 x\dot{x} = -2\delta\dot{x}^2 . \quad (11.51)$$

Levá strana rovnice (11.51) představuje úplný diferenciál, takže můžeme psát

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{\omega_0^2}{2}x^2 \right) = -2\delta\dot{x}^2 . \quad (11.52)$$

Vynásobíme rovnici (11.52) hmotností m , přičemž využijeme rovností $\delta = h/(2m)$ a $\omega_0 = \sqrt{k/m}$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{k}{2}x^2 \right) = \frac{d}{dt}(T + U) = \frac{dE}{dt} = -h\dot{x}^2 \leq 0 . \quad (11.53)$$

Relace uvedená ve vztahu (11.53) je dána výše uvedeným předpokladem, že $h > 0$. Dosažený výsledek můžeme interpretovat způsobem, že celková mechanická

energie tlumeného mechanického oscilátoru s časem ubývá, a to rychlostí $-h\dot{x}^2$. Výsledek můžeme s ohledem na vztah (11.46) napsat jako

$$\frac{dE}{dt} = F_{Dis}\dot{x}, \quad (11.54)$$

z čehož vyplývá, že celková mechanická energie tlumeného mechanického oscilátoru s časem ubývá (tj. na rozdíl od netlumeného oscilátoru je celková mechanická energie závislá na čase), přičemž s ohledem na definiční vztah (9.26) můžeme říci, že tento úbytek je roven okamžitému výkonu disipativních sil.

Charakteristická rovnice odpovídající pohybové rovnici (11.49) má tvar:

$$\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega_0^2 = 0. \quad (11.55)$$

Kořeny charakteristické rovnice jsou

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}. \quad (11.56)$$

Řešením diferenciální rovnice (11.49) jsou lineárně nezávislé funkce $\exp(\lambda_1 t)$ a $\exp(\lambda_2 t)$, jejichž lineární kombinace představuje obecné řešení této rovnice, tedy

$$x(t) = C_1 \exp(\lambda_1 t) + C_2 \exp(\lambda_2 t). \quad (11.57)$$

Dosazením za $\lambda_{1,2}$ ze vztahu (11.56) můžeme po úpravě obecné řešení pohybové rovnice tlumeného mechanického oscilátoru napsat jako

$$x(t) = e^{-\delta t} \left[C_1 \exp\left(\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} t\right) + C_2 \exp\left(-\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} t\right) \right]. \quad (11.58)$$

Za předpokladu, že $\delta \neq 0$, mohou nastat následující tři případy:

1. **slabý útlum** (podtlumené kmitání): $\omega_0^2 > \delta^2$,
2. **silný útlum** (přetlumené kmitání): $\omega_0^2 < \delta^2$,
3. **kritický útlum** : $\omega_0^2 = \delta^2$,

které budou níže rozebrány.

Slabý útlum (podtlumené kmitání)

Pro případ slabého útlumu si zavedeme kruhový kmitočet:

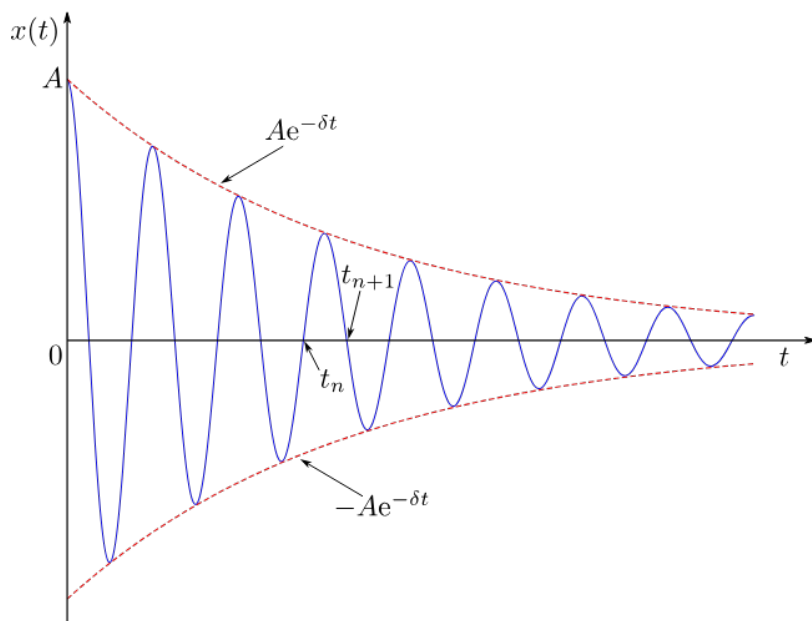
$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \Rightarrow \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} = j\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = j\omega. \quad (11.59)$$

Potom je možné řešení (11.58) vyjádřit jako

$$x(t) = e^{-\delta t} [C_1 \exp(j\omega t) + C_2 \exp(-j\omega t)]. \quad (11.60)$$

Řešení (11.60) můžeme přepsat do následujícího tvaru

$$x(t) = Ae^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi). \quad (11.61)$$



Obrázek 11.6: Časový průběh výchylky mechanického slabě tlumeného oscilátoru pro případ slabého útlumu pro počáteční podmínky $x(t_0 = 0) = A$ a $v(t_0 = 0) = 0$ (modře) spolu s obálkou (červeně).

Časovou derivací okamžité výchylky dostaneme vztah pro okamžitou rychlost

$$v(t) \equiv \dot{x}(t) = Ae^{-\delta t} [\omega \cos(\omega t + \varphi) - \delta \sin(\omega t + \varphi)] . \quad (11.62)$$

Z obrázku 11.6, kde je zachycen časový průběh výchylky mechanického oscilátoru pro případ slabého útlumu, je patrné, že v tomto případě již nemůžeme mluvit o čistě periodickém pohybu, jelikož $x(t) \neq x(t + T)$. V případě slabě tlumeného oscilátoru mluvíme o tzv. **kvaziperiodickém** pohybu.

Z obrázku je patrné, že kmitající hmotný bod prochází opakovaně nulovou polohou (rovnovážnou polohou). Jednotlivé průchody nulovou polohou určíme z rovnice, která vznikne dosazením nulové hodnoty za výchylku ve vztahu (11.61), tedy $0 = Ae^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi)$, neboli $0 = \sin(\omega t + \varphi)$. Z této rovnice plyne, že $\omega t + \varphi = n\pi$, kde n je celé číslo. Časový interval $t_{n+1} - t_n$ mezi dvěma po sobě následujícími průchody nulou (viz obr. 11.6) zjistíme odečtením rovnic $\omega t_{n+1} + \varphi = (n + 1)\pi$ a $\omega t_n + \varphi = n\pi$, tj.

$$\omega t_{n+1} + \varphi - (\omega t_n + \varphi) = (n + 1)\pi - n\pi . \quad (11.63)$$

Odtud

$$t_{n+1} - t_n = \frac{\pi}{\omega} . \quad (11.64)$$

Jako dobu kmitu T_k označíme dvojnásobnou hodnotu intervalu (11.64), protože teprve při každém druhém průchodu nulovou polohou se hmotný bod pohybuje ve stejném smyslu, tedy

$$T_k = \frac{2\pi}{\omega} . \quad (11.65)$$

S ohledem na (11.59) je možné říct, že doba mezi průchody nulovou polohou je oproti netlumenému mechanickému oscilátoru poněkud delší.

Uvažujme poměr dvou výchylek, které jsou od sebe časově vzdáleny o $T_k = 2\pi/\omega$

$$\frac{x(t + T_k)}{x(t)} = \frac{Ae^{-\delta(t+T_k)} \sin(\omega(t + T_k) + \varphi)}{Ae^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi)} = e^{-\delta T_k} = e^{-\Delta}, \quad (11.66)$$

kde veličinu $\Delta = \delta T_k$ nazýváme **logaritmický dekrement**.

Zderivujeme časovou závislost výchylky (11.61) podle času:

$$\dot{x}(t) = -\delta Ae^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi) + Ae^{-\delta t} \omega \cos(\omega t + \varphi). \quad (11.67)$$

Zavedeme si následující proměnné:

$$\theta(t) = \omega t + \varphi, \quad q(t) = Ae^{-\delta t}, \quad (11.68)$$

čímž můžeme okamžitou výchylku (11.61) a hybnost pomocí vztahu (11.67) zapsat jako

$$x(t) = q \sin \theta, \quad (11.69)$$

$$p(t) = m\dot{x}(t) = -\delta m q \sin \theta + q m \omega \cos \theta = -\delta m x(t) + q m \omega \cos \theta. \quad (11.70)$$

Použijeme lineární transformaci $y = p + \delta m x$ na rovnici (11.70), takže dostaneme:

$$y = \omega m q \cos \theta. \quad (11.71)$$

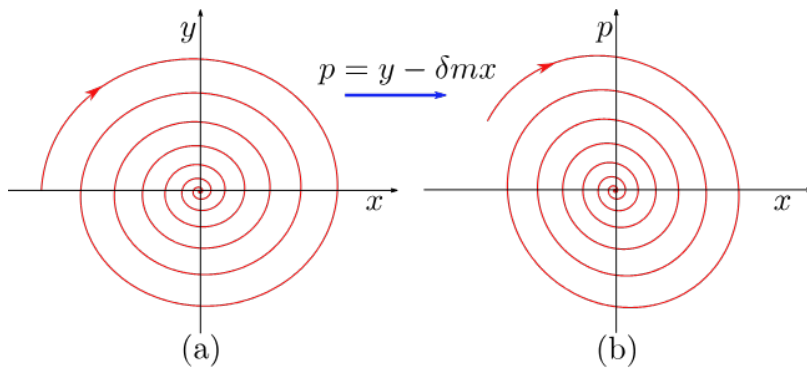
Umocníme vztah (11.71) na druhou a použijeme pro úpravu vztahu (11.69):

$$y^2 = \omega^2 m^2 q^2 \cos^2 \theta = \omega^2 m^2 q^2 (1 - \sin^2 \theta) = \omega^2 m^2 q^2 - \omega^2 m^2 x^2. \quad (11.72)$$

Odtud můžeme psát, že

$$\frac{x^2}{q^2} + \frac{y^2}{\omega^2 m^2 q^2} = 1. \quad (11.73)$$

Rovnice (11.73) představuje rovnici elipsy v modifikovaném fázovém prostoru (x, y) , u které se s časem exponenciálně zmenšují její poloosy, viz obr. 11.7 (a). Provedeme-li zpětnou transformaci $p = y - \delta m x$, pak dostaneme fázovou trajektorii HB ve fázovém prostoru (x, p) , viz obr. 11.7 (b). Z obr. 11.7 (b) je vidět, že



Obrázek 11.7: (a) Fázová trajektorie HB v modifikovaném fázovém prostoru (x, y) .
(b) Fázová trajektorie HB ve fázovém prostoru (x, p) .

s postupujícím časem se postupně zmenšuje výchylka a hybnost (rychlost) HB. V limitním případě, tj. $t \rightarrow \infty$, dojde k ukončení kmitavého pohybu HB, který zůstane v rovnovážném bodě $x = 0$.

Silný útlum (přetlumené kmitání)

V tomto případě jsou kořeny charakteristické rovnice (11.55) reálné. Vzhledem k tomu, že $\delta > 0$ a pro silný útlum platí, že $\delta^2 > \omega_0^2$, budou kořeny charakteristické rovnice (11.56) vždy záporné. Takže v tomto případě bude pro řešení (11.57) pohybové rovnice tlumeného mechanického oscilátoru platit následující limita

$$x(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} [C_1 \exp(\lambda_1 t) + C_2 \exp(\lambda_2 t)] = 0. \quad (11.74)$$

Tedy výchylka u silného útlumu, tak jako v případě slabého útlumu, konverguje k nule pro rostoucí hodnoty času t .

Položíme-li v rovnici (11.58) $x = 0$, dostaneme rovnici

$$e^{-\delta t} \left[C_1 \exp \left(\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} t \right) + C_2 \exp \left(-\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} t \right) \right] = 0, \quad (11.75)$$

jejímž řešením nalezneme průchody kmitajícího hmotného bodu rovnovážnou polohou. Protože $e^{-\delta t} \neq 0$ pro konečné hodnoty t , položíme

$$C_1 e^{\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} t} + C_2 e^{-\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} t} = 0, \quad (11.76)$$

odtud

$$e^{2\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} t} = -\frac{C_2}{C_1}. \quad (11.77)$$

Tato rovnice má jedno řešení je-li $C_2/C_1 < 0$ (pro $C_2/C_1 > 0$ řešení nemá). Tedy je-li jedna z integračních konstant kladná a druhá záporná, potom řešením rovnice (11.77) dostáváme:

$$t = \frac{1}{2\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}} \ln \left(-\frac{C_2}{C_1} \right). \quad (11.78)$$

Omezíme-li se na případ, že $t > 0$, potom hodnoty integračních konstant musí splňovat podmínku:

$$-\frac{C_2}{C_1} > 1. \quad (11.79)$$

Jsou-li splněny výše uvedené podmínky, pak hmotný bod při silném útlumu projde jen jednou rovnovážnou polohou pro konečné $t > 0$, jinak rovnovážnou polohu zaujme až pro $t \rightarrow \infty$ (neuvažujeme triviální případ $C_1 = C_2 = 0$, kdy je hmotný bod celou dobu v rovnovážné poloze).

Odtud můžeme konstatovat, že *typickou vlastností silného útlumu je, že průchod hmotného bodu rovnovážnou polohou nastává pro konečné hodnoty času t nejvýše jednou.*

Z výše uvedeného plyne, že se průběh neopakuje, a proto se jedná o pohyb **aperiodický**.

Pro názornost si uvedeme příklad, kdy uvažujeme např. počáteční podmínky $x(0) = 0$ a $v(0) = v_0$. Potom dle obecného řešení (11.58) můžeme psát, že

$$x(0) = 0 = C_1 + C_2 \implies C_1 = -C_2 = \frac{A}{2}. \quad (11.80)$$

Dosadíme-li integrační konstanty do podmínky (11.79), tak dostaneme hodnotu jedna, tudíž není splněna podmínka pro průchod HB jeho rovnovážnou polohou,

kam postupně dospěje až pro $t \rightarrow \infty$.

Dosazením vztahu (11.80) za integrační konstanty do řešení (11.58) dostaneme

$$x(t) = \frac{A}{2} e^{-\delta t} \left[\exp \left(\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} t \right) - \exp \left(-\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} t \right) \right] = A e^{-\delta t} \sinh \left(\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} t \right). \quad (11.81)$$

Derivací řešení (11.81) podle času dostaneme

$$v(t) \equiv \dot{x}(t) = -\delta A e^{-\delta t} \sinh \left(\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} t \right) + A \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} e^{-\delta t} \cosh \left(\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} t \right). \quad (11.82)$$

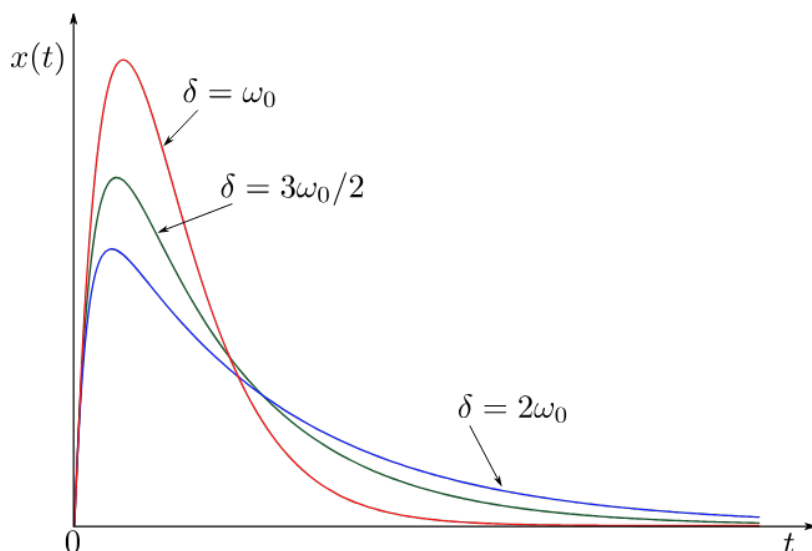
Pak pro druhou počáteční podmínku můžeme na základě vztahu pro rychlost (11.82) psát, že

$$v(0) = v_0 = A \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} \quad \text{odtud} \quad A = \frac{v_0}{\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}}. \quad (11.83)$$

Dosadíme-li do řešení (11.81) za konstantu A ze vztahu (11.83), pak dostáváme

$$x(t) = A e^{-\delta t} \sinh \left(\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} t \right) = \frac{v_0 e^{-\delta t}}{\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}} \sinh \left(\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} t \right). \quad (11.84)$$

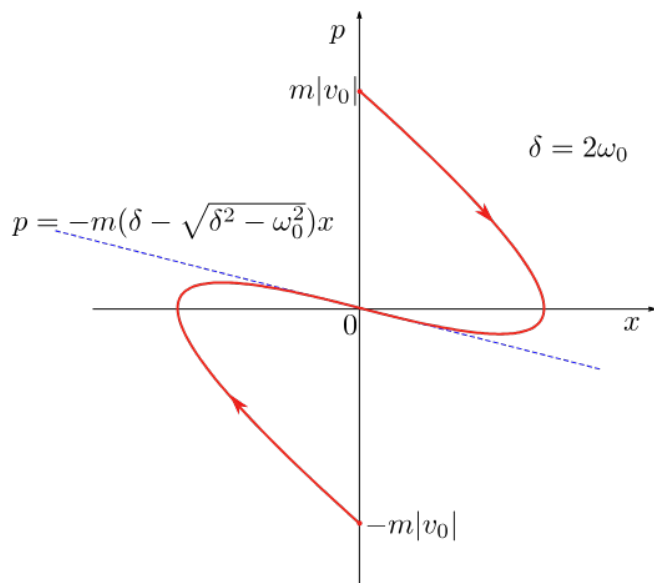
Nalezené řešení je pro tři různé hodnoty dekrementu útlumu δ uvedeno na obrázku 11.8. Z obrázku je patrné, že pro nižší hodnoty dekrementu útlumu je výchylka HB z jeho rovnovážné polohy vyšší, avšak dochází k jejímu rychlejšímu zatlumení. Pro získání fázové trajektorie (fázového portréту) HB pro výše uvedené počáteční



Obrázek 11.8: Tři aperiodické časové průběhy výchylky mechanického oscilátoru pro tři různé hodnoty dekrementu útlumu.

podmínky nejdříve pomocí vztahu (11.84) a identity $\cosh \alpha = \sinh \alpha + e^{-\alpha}$ upravíme vztah pro rychlost HB (11.82):

$$\dot{x} = - \left(\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} \right) x + v_0 e^{-(\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}) t}. \quad (11.85)$$



Obrázek 11.9: Dvě trajektorie HB pro počáteční rychlosti $v_0 > 0$ a druhá pro $v_0 < 0$, $\delta = 2\omega_0$.

Vynásobíme tuto rovnici hmotností m uvažovaného HB, čímž dostaneme:

$$p = -m \left(\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} \right) x + m v_0 e^{-(\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2})t}. \quad (11.86)$$

Tato rovnice představuje parametrické vyjádření fázové trajektorie, kde parametrem je čas t , ve fázové rovině (x, p) , viz obr. 11.9. Na tomto obrázku jsou zachyceny dvě fázové trajektorie, jedna pro počáteční rychlost $v_0 > 0$ a druhá pro $v_0 < 0$ pro případ $\delta = 2\omega_0$. Z rovnice (11.86) vidíme, že s rostoucím časem exponenciálně klesá druhý člen na pravé straně této rovnice, což má za následek, že se výchozí (počáteční) bod trajektorie $[0, v_0]$ s postupem času asymptoticky blíží k přímce $p = -m \left(\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} \right) x$ mající zápornou směrnici.

Kritický útlum

V tomto případě má charakteristická rovnice (11.55) dvojnásobný kořen $\lambda_{1,2} = -\delta$, takže řešení pohybové rovnice (11.49) má tvar:

$$x(t) = (C_1 + C_2 t) e^{-\delta t}. \quad (11.87)$$

Rychlost je pak dána následujícím vztahem:

$$v(t) \equiv \dot{x} = C_2 e^{-\delta t} - \delta(C_1 + C_2 t) e^{-\delta t}. \quad (11.88)$$

Anulováním rovnice (11.87) zjistíme, že pro konečné kladné hodnoty času ($t > 0$) projde hmotný bod rovnovážnou polohou pouze v případě, kdy

$$t = -\frac{C_1}{C_2} > 0. \quad (11.89)$$

Odtud plyne, že má-li být tato podmínka splněna, pak $C_{1,2} \neq 0$ a integrační konstanty C_1 a C_2 musí mít opačná znaménka.

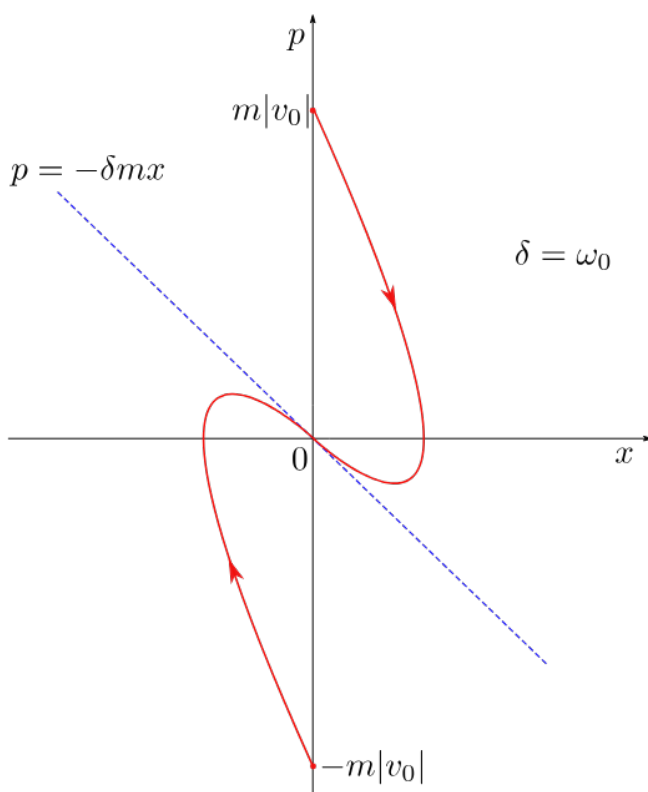
Jako v předcházejícím případě se bude jednat o pohyb aperiodický.

Budeme-li uvažovat počáteční podmínky jako v případě silného útlumu, tj. $x(0) = 0$ a $v(0) = v_0$, potom pro integrační konstanty dostáváme: $C_1 = 0$ a $C_2 = v_0$. Na základě těchto konstant můžeme říci, že podmínka (11.89) není splněna, takže nedojde k překmitnutí HB přes rovnovážnou polohu. Dosazením integračních konstant do vztahu (11.87) dostaneme řešení pohybové rovnice (11.49) pro zadané počáteční podmínky:

$$x(t) = v_0 t e^{-\delta t} . \quad (11.90)$$

Na obrázku 11.8 je zachycen průběh kriticky tlumeného mechanického oscilátoru $\delta = \omega_0$. V případě kritického útlumu dojde, jak lze vidět z obrázku, k zatlumení **nejrychleji**.

Pro získání fázové trajektorie HB pro dané počáteční podmínky ve fázovém rovině



Obrázek 11.10: Dvě trajektorie HB pro počáteční rychlosti $v_0 > 0$ a druhá pro $v_0 < 0$, $\delta = \omega_0$, tj. kritický útlum.

(x, p) nejdříve zderivujeme řešení (11.90) podle času:

$$\dot{x} = v_0 e^{-\delta t} - \delta v_0 t e^{-\delta t} . \quad (11.91)$$

Upravíme tento výsledek s ohledem na řešení (11.90) a vynásobíme hmotností m uvažovaného HB, čímž získáme:

$$p = -m\delta x + m v_0 e^{-\delta t} . \quad (11.92)$$

Tímto jsme získali parametrickou rovnici hledané fázové trajektorie HB, viz obr. 11.10. Opět vidíme, že se druhý člen rovnice (11.92) s rostoucím časem exponenciálně zmenšuje. Počáteční bod trajektorie $[0, v_0]$ se tímto s rostoucím časem

asymptoticky blíží k přímce $p = -m\delta x$, která má rovněž zápornou směrnici jako u řešení předchozího případu se silným útlumem. Na obrázku jsou zachyceny dvě trajektorie pro počáteční rychlosti $v_0 > 0$ a $v_0 < 0$.

11.2 Vynucené (nucené) kmitání tlumeného mechanického oscilátoru

Chceme-li udržet tlumený oscilátor v kmitavém pohybu, musíme ho neustále budit vnější silou F_B , která nutí předmětný oscilátor ke kmitům. V takovémto případě můžeme napsat pohybovou rovnici uvažovaného oscilátoru jako

$$m\ddot{x} = F_V + F_{Dis} + F_B . \quad (11.93)$$

Budeme-li uvažovat harmonickou budicí sílu $F_B = F_0 \cos(\Omega t)$, potom po dosazení za síly na pravé straně pohybové rovnice (11.93) a následné úpravě, viz kapitola 11.1.2, dostaneme pohybovou rovnici v následujícím tvaru

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = B \cos(\Omega t) , \quad (11.94)$$

kde $B = F_0/m$.

Řešení nehomogenní diferenciální rovnice (11.93) je dáno součtem obecného řešení x_H odpovídající homogenní rovnice a partikulárního řešení x_P rovnice (11.94), tedy $x(t) = x_H(t) + x_P(t)$. Homogenní řešení, v případě uvažování slabého útlumu, bylo nalezeno v předchozí kapitole a je dáno vztahem (11.61), tedy

$$x_H(t) = A_H e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi_H) . \quad (11.95)$$

Pro nalezení partikulárního řešení rovnice (11.94) použijeme s výhodou komplexní reprezentaci. Budeme předpokládat, že partikulárnímu řešení bude odpovídat reálná složka² komplexní funkce $\hat{x}_P(t)$, tj. $x_P(t) = \text{Re}\{\hat{x}_P\}$. Hledanému komplexnímu partikulárnímu řešení \hat{x}_P odpovídá následující komplexní diferenciální rovnice

$$\ddot{\hat{x}}_P + 2\delta\dot{\hat{x}}_P + \omega_0^2 \hat{x}_P = B \exp(j\Omega t) . \quad (11.96)$$

Reálná složka řešení komplexní diferenciální rovnice (11.96) představuje řešení diferenciální rovnice (11.93). Pravá strana rovnice (11.96) reprezentuje komplexní funkci vyjádřenou pomocí známého Eulerova vzorce a její reálná složka odpovídá uvažované funkci F_B/m , tj.

$$\text{Re}\{B \exp(j\Omega t)\} = \text{Re}\{B \cos(\Omega t) + jB \sin(\Omega t)\} = B \cos(\Omega t) = F_B/m . \quad (11.97)$$

Komplexní partikulární řešení si vyjádříme rovněž pomocí Eulerova vzorce

$$\hat{x}_P = \mathcal{A}_P \exp(j\Omega t) = A_P \exp(j\varphi_P) \exp(j\Omega t) = A_P \exp[j(\Omega t + \varphi_P)] , \quad (11.98)$$

kde \mathcal{A}_P se nazývá **komplexní amplituda** a A_P je reálná amplituda partikulárního řešení rovnice (11.93) a φ_P je jeho počáteční fáze.

²Hledané partikulární funkce nemůže být funkcí komplexní, jelikož hledané řešení musí odpovídat fyzikálnímu řešení, tedy řešení, které je měřitelné.

Dosazením partikulárního řešení (11.98) do komplexní diferenciální rovnice (11.96) obdržíme³ následující komplexní algebraickou rovnici

$$-\Omega^2 A_P \exp(j\varphi_P) \exp(j\Omega t) + j2\delta\Omega A_P \exp(j\varphi_P) \exp(j\Omega t) + \omega_0^2 A_P \exp(j\varphi_P) \exp(j\Omega t) = B \exp(j\Omega t) . \quad (11.99)$$

Vynásobíme-li rovnici (11.99) funkcí $\exp(-j\varphi_P) \exp(-j\Omega t)$, pak po následné úpravě dostaneme

$$A_P(\omega_0^2 - \Omega^2 + j2\delta\Omega) = B \exp(-j\varphi_P) . \quad (11.100)$$

Komplexní číslo, které se nachází v závorce na levé straně rovnice (11.100), můžeme vyjádřit pomocí Eulerova vzorce, čímž dospějeme k následujícímu tvaru algebraické rovnice

$$A_P |\hat{K}| \exp(j\phi) = B \exp(-j\varphi_P) , \quad (11.101)$$

kde

$$|\hat{K}| = \sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2} \quad (11.102)$$

a

$$\phi = \arctan\left(\frac{2\delta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}\right) . \quad (11.103)$$

Z rovnice (11.101) můžeme za pomoci vztahu (11.102) nalézt amplitudu partikulárního řešení jako

$$A_P(\Omega) = \frac{B}{|\hat{K}|} = \frac{B}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2}} . \quad (11.104)$$

Ve vztahu (11.104) je naznačeno, že amplituda partikulárního řešení závisí na kmitočtu budící síly.

Pro počáteční fázi partikulárního řešení dostaneme z rovnice (11.101) vyjádření

$$\tan(\varphi_P(\Omega)) = -\frac{2\delta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2} , \quad (11.105)$$

neboli

$$\varphi_P(\Omega) = \arctan\left(-\frac{2\delta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}\right) = \arctan\left(\frac{2\delta\Omega}{\Omega^2 - \omega_0^2}\right) . \quad (11.106)$$

Jelikož partikulární řešení rovnice (11.93) je rovno reálné složce komplexního partikulárního řešení (11.98), tedy

$$x_P(t) = \operatorname{Re}\{\hat{x}_P\} = \operatorname{Re}\{A_P \exp[j(\Omega t + \varphi_P)]\} = A_P \cos(\Omega t + \varphi_P) , \quad (11.107)$$

kde A_P je dáno vztahem (11.104) a φ_P vztahem (11.106).

Obecné řešení diferenciální rovnice (11.94) si pomoci funkcí (11.95) a (11.107) můžeme vyjádřit způsobem:

$$x(t) = x_H(t) + x_P(t) = A_H e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi_H) + A_P(\Omega) \cos(\Omega t + \varphi_P) . \quad (11.108)$$

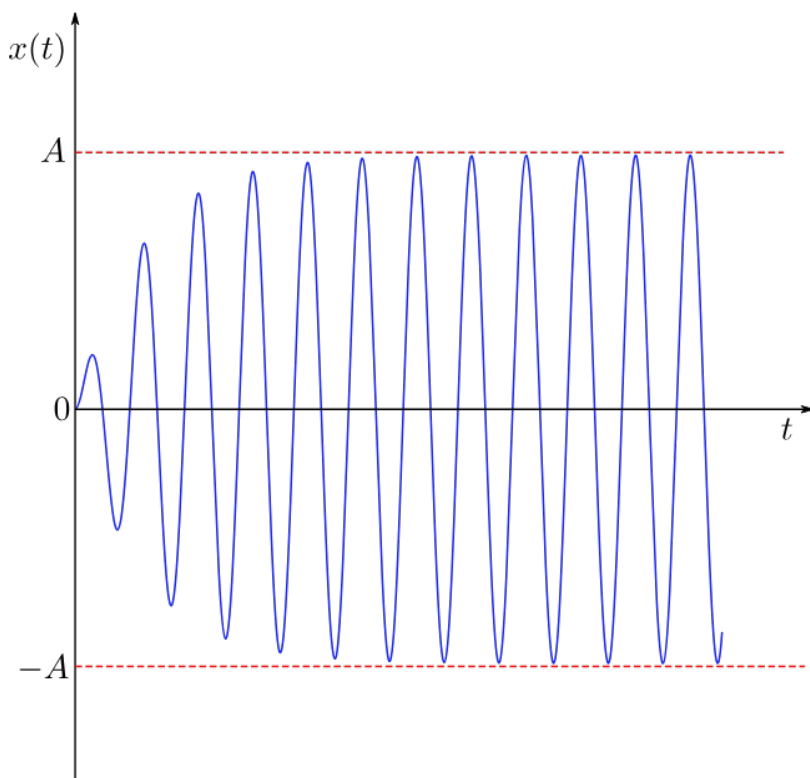
³Na tomto místě je nutno připomenout, že pro časové derivace představuje komplexní jednotka v předpokládaném komplexním tvaru partikulárního řešení konstantu.

Vzhledem k uvažovanému útlumu, je zřejmé, že část řešení (11.108), která odpovídá homogennímu řešení, se s časem výrazně zatlumí, takže partikulární řešení bude dominovat. Pro $t \rightarrow \infty$ (ustálený neboli stacionární stav) bude řešení diferenciální rovnice (11.93) dáno pouze funkcí, která odpovídá jejímu partikulárnímu řešení. Vzhledem k tomu, že amplituda funkce (11.95) se s časem exponenciálně tlumí, je možné tuto funkci považovat s dostatečnou přesností za nulovou po tzv. **relaxační době**, která je dána dohodnutým (příp. vhodně zvoleným) násobkem časové konstanty $\tau = 1/\delta$. Jinými slovy můžeme konstatovat, že uvažovaný buzený tlumený mechanický oscilátor se snaží kmitat na kmitočtu, který odpovídá jeho volným tlumeným kmitům, avšak postupem času se „poddá“ budící síle, která kmitá na kruhové frekvenci Ω . Z výše uvedeného důvodu se zpravidla za řešení nehomogenní diferenciální rovnice (11.94) považuje pouze její partikulární řešení. V takovém případě již není nutné používat index P pro označení partikulárního řešení, takže řešení uvažované diferenciální rovnice můžeme zapsat jako⁴

$$x(t) = A(\Omega) \cos(\Omega t + \varphi) , \quad (11.109)$$

kde $A = A_P$ a $\varphi = \varphi_P$.

Na obr. 11.11 je zachycen časový vývoj výchylky HB pro případ, kdy $\Omega = \omega_0$.



Obrázek 11.11: Závislost výchylky HB na čase.

Jak je ukázáno níže v textu, tak pro tento případ je $\varphi_P(\Omega = \omega_0) = -\pi/2$. Dále počáteční fáze u řešení homogenní pohybové rovnice je zvolena tak, aby $x(0) = 0$

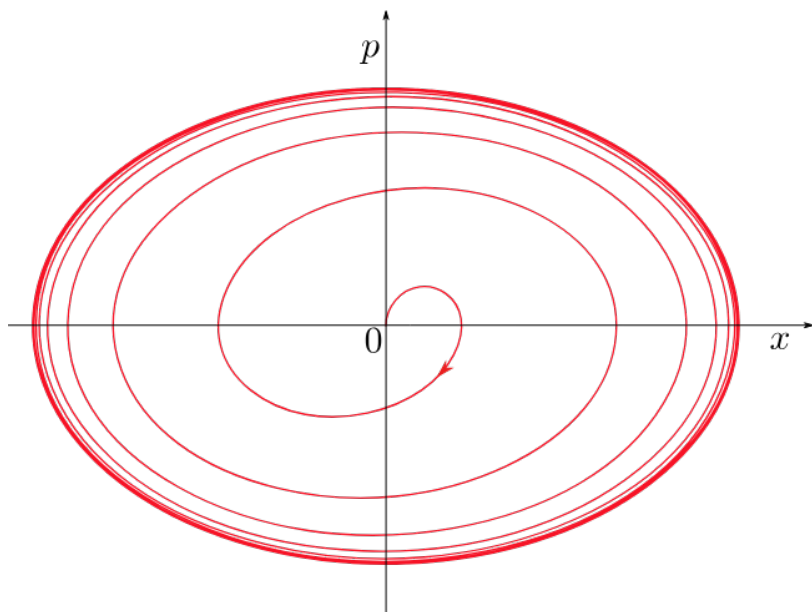
⁴Partikulární řešení uvažované diferenciální rovnice je možné považovat za její řešení i pro případ kritického nebo silného útlumu.

a $\dot{x}(0) = 0$, tedy $\varphi_H = -\pi$. Dále platí, že $A_H = A_p(\Omega = \omega_0) = A$ a $\delta \ll \omega_0$. V takovém případě lze řešení (11.108) zapsat jako

$$x(t) = A(1 - e^{-\delta t}) \sin \Omega t. \quad (11.110)$$

Z tohoto obrázku lze vidět, jak s postupem času dochází k ustálení amplitudy výchylky a časový vývoj je pak dán pouze partikulárním řešením.

Názorně je možné ustálení výchylky HB ukázat pomocí fázového portréту ve fázové rovině (x, p) . Za tímto účelem provedeme derivaci výchylky (11.110) podle času a vynásobíme výsledek hmotností m uvažovaného HB, čímž obdržíme vztah pro jeho hybnost, kde k jeho vyjádření použijeme vztah (11.110):



Obrázek 11.12: Fázová trajektorie harmonicky buzeného mechanického oscilátoru.

$$p = m\dot{x}(t) = -m\delta x + m\delta A \sin(\Omega t) + m\Omega A(1 - e^{-\delta t}) \cos \Omega t. \quad (11.111)$$

Takto vyjádřený vztah pro hybnost HB představuje parametrické vyjádření trajektorie HB, kde parametrem je čas, viz obr. 11.12. Z obrázku je vidět, že fázová trajektorie HB vychází z místa odpovídající jeho rovnovážnému bodu. Jedná se o spirálu, která se s rostoucí časem přibližuje k elipse, která představuje fázovou trajektorii HB pro ustálené řešení, tj. řešení vyjádřené pouze partikulárním řešením. Tato elipsa představuje tzv. **limitní cyklus**.

Derivací okamžité výchylky buzeného mechanického oscilátoru (11.109) podle času dostaneme vztah reprezentující jeho okamžitou rychlost

$$v(t) \equiv \dot{x}(t) = -A_V(\Omega) \sin(\Omega t + \varphi) = A_V(\Omega) \cos\left(\Omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right), \quad (11.112)$$

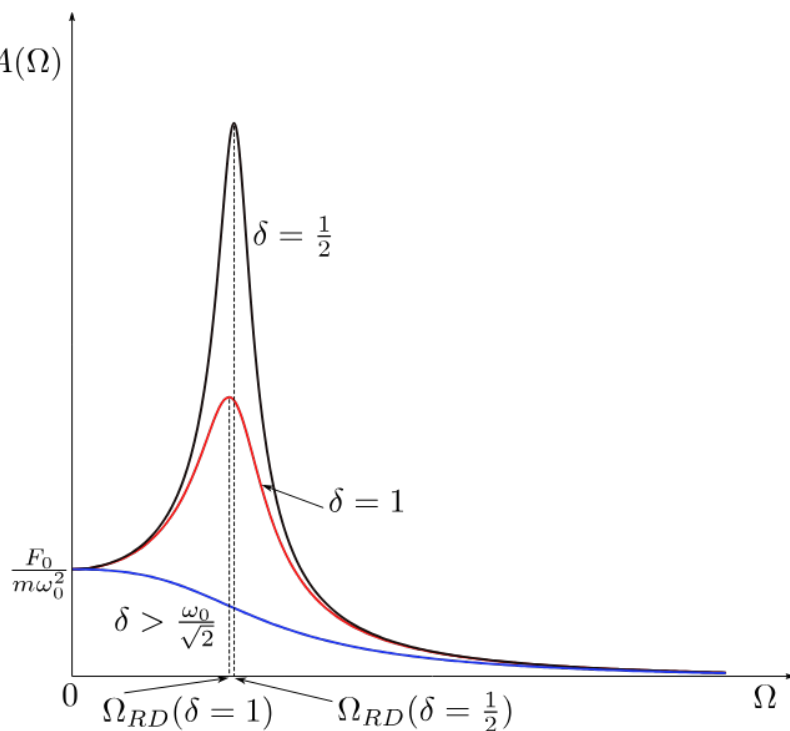
kde $A_V(\Omega) = A(\Omega)\Omega$ je amplituda rychlosti.

Dosazením ze vztahu (11.104) můžeme amplitudu rychlosti vyjádřit jako

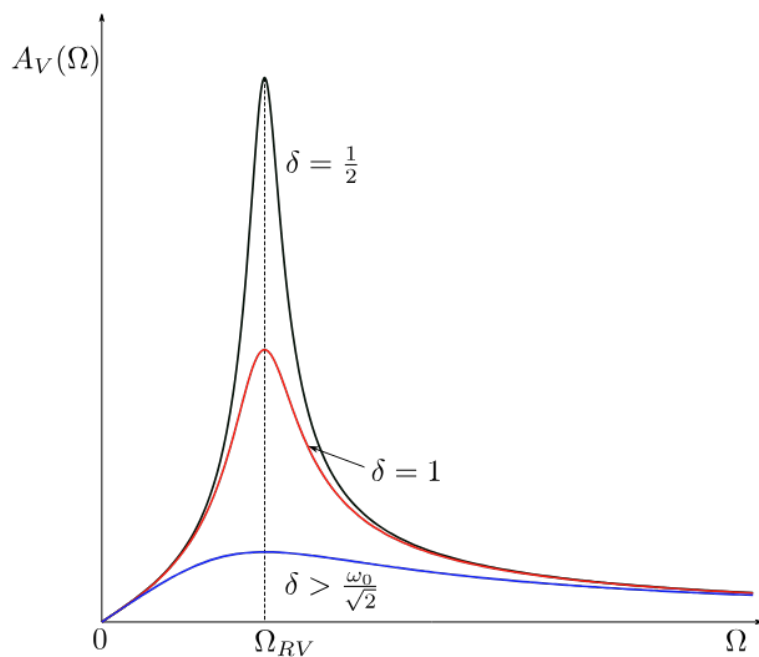
$$A_V(\Omega) = \frac{B\Omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2}}. \quad (11.113)$$

Ze vztahu (11.112) je patrné, že mezi okamžitou výchylkou a okamžitou rychlostí nucených kmitů je fázový posuv $\pi/2$.

Na obrázcích 11.13 a 11.14 jsou vyneseny grafy závislosti amplitudy výchylky



Obrázek 11.13: Závislost amplitudy výchylky A na kmitočtu budící síly Ω .



Obrázek 11.14: Závislost amplitudy rychlosti A_V na kmitočtu budící síly Ω .

$A(\Omega)$ a amplitudy rychlosti $A_V(\Omega)$ na kruhovém kmitočtu budící harmonické síly

Ω . Tyto grafy nazýváme **rezonanční křivky**. Z těchto grafů je patrné, že jak amplituda výchylky, tak amplituda rychlosti mají jedno absolutní maximum, jehož hodnota závisí na velikosti dekrementu útlumu δ , čím je hodnota dekrementu útlumu nižší, tím je maximální hodnota zmiňovaných amplitud vyšší a rezonanční křivka užší. Kmitočty, pro které nabývají grafy průběhů amplitud svého maxima, se nazývají **rezonanční kmitočty**.

Za účelem nalezení rezonančního kmitočtu amplitudy výchylky Ω_{RD} a rezonančního kmitočtu amplitudy rychlosti Ω_{RV} , nejdříve zderivujeme funkční vztahy (11.104) a (11.113) podle kruhového kmitočtu Ω , čímž dostáváme

$$\frac{dA(\Omega)}{d\Omega} = \frac{d}{d\Omega} \left(\frac{B}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2}} \right) = 2B \frac{\Omega(\omega_0^2 - 2\delta^2 - \Omega^2)}{[(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2]^{3/2}}, \quad (11.114)$$

$$\frac{dA_V(\Omega)}{d\Omega} = \frac{d}{d\Omega} \left(\frac{B\Omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2}} \right) = B \frac{\omega_0^4 - \Omega^4}{[(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2]^{3/2}}. \quad (11.115)$$

Položíme výrazy (11.114) a (11.115) rovny nule, čímž dostaneme rovnice, jejichž řešením nalezneme body, které odpovídají hledaným rezonančním kmitočtům. Pro amplitudu výchylky (uvažujeme pouze kmitočty $\Omega \geq 0$) je podmínka $dA(\Omega)/d\Omega = 0$ splněna pro $\Omega_1 = 0$, $\Omega_2 \rightarrow \infty$ a pro kmitočet

$$\Omega_{RD} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}. \quad (11.116)$$

Kmitočtům Ω_1 a Ω_2 odpovídá extrémní hodnota amplitudy výchylky vždy. Extrém funkce $A(\Omega)$ pro hodnotu $\Omega = \Omega_{RD}$ nastane jen v případě, je-li kmitočet Ω_{RD} reálný, tedy s ohledem na vztah (11.116) musí být splněna podmínka:

$$\omega_0 > \delta\sqrt{2}. \quad (11.117)$$

Pro $\omega_0 \leq \delta\sqrt{2}$ u mechanického systému nedochází k rezonanci a maximální hodnota amplitudy výchylky je $B/\omega_0^2 = F_0/(m\omega_0^2)$, viz obr. 11.13. Je-li splněna podmínka (11.117), potom

$$\left. \frac{d^2 A(\Omega)}{d\Omega^2} \right|_{\Omega=\Omega_{RD}} < 0,$$

tedy pro $\Omega = \Omega_{RD}$ nastává maximum funkce $A(\Omega)$.

Při splnění podmínky $\omega_0 > \delta\sqrt{2}$ je extrém funkce $A(\Omega)$ při hodnotě $\Omega = \Omega_{RD}$ maximem a říkáme, že pro $\Omega = \Omega_{RD}$ nastává **rezonance výchylky** a kmitočtu Ω_{RD} říkáme **rezonanční kmitočet výchylky**.

Provedeme-li podobný rozbor pro amplitudu rychlosti, tak poměrně snadno dospějeme k hodnotě **rezonančního kmitočtu rychlosti**:

$$\Omega_{RV} = \omega_0. \quad (11.118)$$

Z obr. 11.14 je vidět, že k rezonanci rychlosti dochází i pro případ, kdy $\omega_0 \leq \delta\sqrt{2}$ a rezonanční kmitočet (11.118) nezávisí na dekrementu útlumu δ , takže je pro jeho různé hodnoty stejný.

Znovu si napíšeme pohybovou rovnici (km40) pro HB vykonávající vynucené kmity periodickou harmonickou silou $F(t) = F_0 \cos \Omega t$:

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \Omega t . \quad (11.119)$$

Do této rovnice dosadíme její ustálené řešení (11.109), čímž dostáváme:

$$-A\Omega^2 \cos(\Omega t + \varphi(\Omega)) - 2A\delta\Omega \sin(\Omega t + \varphi(\Omega)) + A\omega_0^2 \cos(\Omega t + \varphi(\Omega)) = \frac{F_0}{m} \cos(\Omega t) . \quad (11.120)$$

Budeme uvažovat tři různé případy pro kmitočet budící síly Ω .

1. $\Omega \rightarrow 0$

V tomto případě můžeme zanedbat první dva členy na levé straně rovnice (11.120), takže dostaneme:

$$A\omega_0^2 \cos(\Omega t + \varphi) \approx \frac{F_0}{m} \cos \Omega t . \quad (11.121)$$

Aby tato rovnice mohla být splněna, tak musí platit, že $\varphi(\Omega \rightarrow 0) \rightarrow 0$. V tomto případě bude HB kmitat přibližně ve fázi s budící silou a bude platit, že

$$x(t) \approx \frac{F_0}{m\omega_0^2} \cos \Omega t . \quad (11.122)$$

Pro $\Omega = 0$ je $\varphi = 0$ a

$$A = \frac{F_0}{m\omega_0^2} , \quad (11.123)$$

viz obr. 11.13 .

2. $\Omega = \omega_0$

Pro tento případ se první a třetí člen na levé straně rovnice (11.120) vynulují, takže můžeme psát:

$$-2A\delta\Omega \sin(\Omega t + \varphi(\Omega)) = \frac{F_0}{m} \cos \Omega t . \quad (11.124)$$

Aby tato rovnost mohla platit, tak $\varphi(\Omega = \omega_0) = -\pi/2$. Pro tuto fázi lze tedy rovnici (11.124) zapsat jako

$$2A\delta\Omega \cos(\Omega t) = \frac{F_0}{m} \cos \Omega t \quad \Rightarrow \quad A = \frac{F_0}{2\delta m\Omega} . \quad (11.125)$$

Odtud také dostáváme, že

$$\dot{x}(t) = \frac{F_0}{2\delta m} \cos \Omega t . \quad (11.126)$$

Integrací získáme:

$$x(t) = \frac{F_0}{2\delta m\Omega} \sin \Omega t = \frac{F_0}{2\delta m\Omega} \cos \left(\Omega t - \frac{\pi}{2} \right) . \quad (11.127)$$

Odtud vidíme, že výchylka je v tomto případě fázově opožděna o $\pi/2$ za budící silou.

3. $\Omega \gg 1$

Pro velmi vysoký kmitočet harmonické budicí síly dominuje první člen na levé straně rovnice (11.120), takže můžeme psát, že

$$-A\Omega^2 \cos(\Omega t + \varphi(\Omega)) \approx \frac{F_0}{m} \cos(\Omega t) . \quad (11.128)$$

Aby mohla být přibližně rovnost splněna, tak pro fázi dostáváme, že $\varphi(\Omega \gg 1) \approx -\pi$. V limitním případě $\varphi(\Omega \rightarrow \infty) = -\pi$.

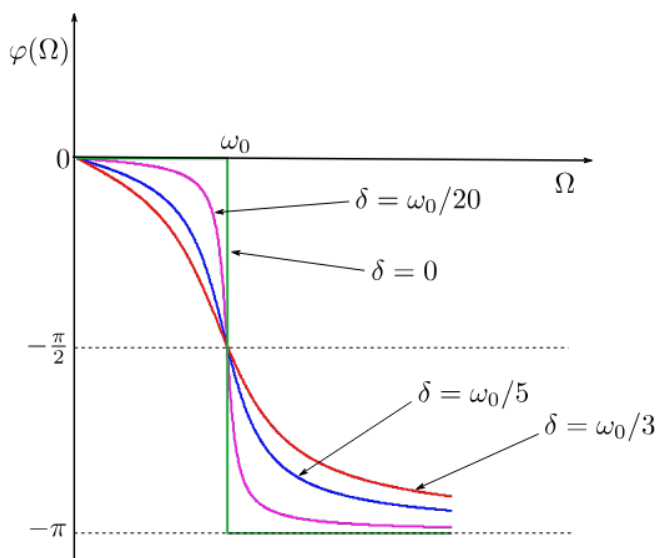
Pro tento případ dostáváme:

$$\ddot{x}(t) \approx \frac{F_0}{m} \cos(\Omega t) . \quad (11.129)$$

Dvojnásobnou integrací dospějeme ke vztahu:

$$x(t) \approx -\frac{F_0}{m\Omega^2} \cos(\Omega t) = \frac{F_0}{m\Omega^2} \cos(\Omega t - \pi) . \quad (11.130)$$

Tedy výchylka je fázově zpožděna oproti budicí síle přibližně o π .



Obrázek 11.15: Fázové zpoždění (počáteční fáze) nucených kmitů $\varphi(\Omega)$ pro různé hodnoty tlumení.

Z výše uvedených třech případů je zřejmé, že se fáze v závislosti na kmitočtu budicí síly ($\varphi(\Omega)$) mění od 0 do $-\pi$, přičemž pro $\Omega = \omega_0$ je fáze rovna $-\pi/2$. Závislost fáze na kmitočtu budicí síly je vyjádřena vztahem (11.106) a její průběh pro čtyři různé hodnoty dekrementu útlumu δ je zachycen na obr. 11.15. Z tohoto obrázku je vidět, že pro nulovou hodnotu dekrementu útlumu se fáze mění pro $\Omega = \omega_0$ skokově. Dále z tohoto obrázku vidíme, že pohyb nuceného mechanického oscilátoru je vždy opožděn za budicí silou. Pro velmi rychlá buzení $\Omega \gg \omega_0$ je pohyb oscilátoru opožděn oproti budicí síle téměř o π a tedy oscilátor kmitá téměř v protifázi k budicí síle.

Pro celkovou mechanickou energii harmonicky buzeného oscilátoru s využitím vztahů (11.109), (11.112) a (11.27) můžeme po úpravě psát, že

$$E = T + U = \left(\frac{m}{2} \dot{x}^2 + \frac{k}{2} x^2 \right) = \frac{1}{2} m A^2 \left[\Omega^2 \sin^2(\Omega t + \varphi) + \omega_0^2 \cos^2(\Omega t + \varphi) \right] . \quad (11.131)$$

Bude-li $\Omega = \Omega_{RV}$, tj. $\Omega = \omega_0$, potom

$$E = \frac{1}{2} m A^2 \omega_0^2 = konst. \quad (11.132)$$

Ze vztahu (11.132) je vidět, že je-li frekvence budicí síly rovna rezonančnímu kmitočtu rychlosti, potom celková mechanická energie nezávisí na čase, tj. $dE/dt = 0$. Pro časovou změnu celkové mechanické energie můžeme obecně psát, že

$$\frac{dE}{dt} = F_{Dis} \dot{x} + F_B \dot{x} . \quad (11.133)$$

Rovnost (11.133) nám říká, že časová změna celkové mechanické energie se rovná součtu okamžitého výkonu disipativních sil a okamžitého výkonu síly budicí. V případě, že frekvence budicí síly je rovna rezonančnímu kmitočtu rychlosti, potom s ohledem na vztah (11.132) bude platit, že

$$\frac{dE}{dt} = 0 = F_{Dis} \dot{x} + F_B \dot{x} . \quad (11.134)$$

Z rovnosti (11.134) vyplývá, že v případě rezonance rychlosti se v každém čase okamžitý výkon disipativních sil rovná, až na znaménko, okamžitému výkonu budicí síly.

V obecném případě, tj. pro libovolný kmitočet budicí síly, musí platit, že časová střední hodnota⁵ celkové mechanické energie $\langle E \rangle$ v ustáleném stavu je rovna konstantě, což je dáno skutečností, že po odeznění relaxačního děje se celková mechanická energie oscilátoru již nemění. Z tohoto důvodu bude muset platit, že

$$\langle F_{Dis} \dot{x} \rangle + \langle F_B \dot{x} \rangle = 0 . \quad (11.135)$$

Z rovnice (11.135) plyne, že střední časová hodnota okamžitého výkonu disipativních sil musí být až na znaménko rovna střední časové hodnotě okamžitého výkonu budicí síly neboli jinými slovy, budicí síla v ustáleném stavu kompenzuje ztráty, ke kterým dochází vlivem disipativních sil.

Pro hodnocení oscilátorů se používá tzv. **činitel jakosti** Q , který je definován jako

$$Q = \frac{\Omega_{RD}}{2\delta} . \quad (11.136)$$

Za kvalitní oscilátory jsou považovány **vysokojakostní** oscilátory, tj. oscilátory, které mají vysoký činitel jakosti Q . Rezananční křivka vysokojakostních oscilátorů se vyznačuje velmi ostrým maximem kolem rezonančního kmitočtu. Pro tyto oscilátory je možné kolem rezonančního kmitočtu použít následující aproximace

$$\Omega \approx \omega_0 , \quad (11.137)$$

⁵Pro označení časové střední hodnoty budeme používat označení $\langle \cdot \rangle$, které představuje operátor

$$\langle \cdot \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \cdot dt .$$

$$\omega_0^2 - \Omega^2 = (\omega_0 + \Omega)(\omega_0 - \Omega) \approx 2\omega_0(\omega_0 - \Omega) . \quad (11.138)$$

S ohledem na aproximace (11.137) a (11.138) můžeme upravit vztah pro amplitudu výchylky (11.104) následujícím způsobem

$$A(\Omega) = \frac{B}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2}} \approx \frac{B}{\sqrt{(2\omega_0(\omega_0 - \Omega))^2 + 4\delta^2\omega_0^2}} = \frac{B}{\sqrt{4\omega_0^2(\omega_0 - \Omega)^2 + 4\delta^2\omega_0^2}} = \frac{B}{2\omega_0\sqrt{(\omega_0 - \Omega)^2 + \delta^2}} . \quad (11.139)$$

Pro amplitudu výchylky, která je dána přibližným vztahem (11.139) platí, že své maximální hodnoty nabývá pro kmitočet $\Omega = \omega_0$. Jestliže umocníme na kvadrát přibližnou hodnotu amplitudy výchylky (11.139), potom tento kvadrát bude pro budící kmitočet $\Omega = \omega_0$ nabývat své maximální hodnoty $B^2/(4\omega_0^2\delta^2)$. Pro budící kmitočty $\Omega = \Omega_- = \omega_0 - \delta$ a $\Omega = \Omega_+ = \omega_0 + \delta$ bude hodnota tohoto kvadrátu rovna přesně polovině jeho maximální hodnoty. Pomocí těchto hodnot budících kmitočtů můžeme zavést tzv. **šířku rezonanční křivky**, která je dána následujícím vztahem

$$\Delta\Omega = \Omega_+ - \Omega_- = 2\delta . \quad (11.140)$$

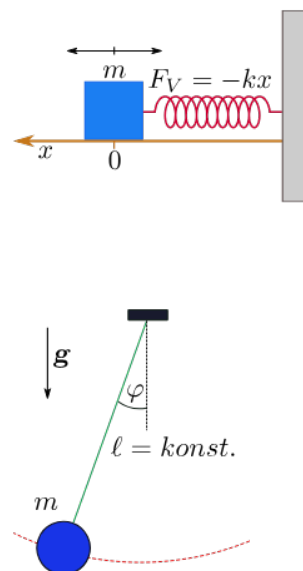
Na základě rovnosti (11.140) je možné u vysokojakostních oscilátorů určit přibližně jejich činitel jakosti (11.136) jako

$$Q \approx \frac{\omega_0}{\Delta\Omega} . \quad (11.141)$$

11.3 Fyzikální oscilátory

V předchozích kapitolách jsme se zaměřili na mechanický oscilátor, který je reprezentován hmotným bodem, jenž kmitá kolem své rovnovážné polohy po přímce. Takovýto mechanický rezonátor může být realizován např. závažím, které je připevněno na jeden konec pružiny, jejíž druhý konec se nepohybuje. Natáhneme-li pružinu, která je nositelem vratné síly, spolu s uvažovaným závažím, počne toto závaží (hmotný bod) konat kmitavý pohyb. Avšak kmitající hmotný bod nemusí nutně konat kmitavý pohyb po přímce. Příkladem může být např. rovinné matematické kyvadlo. V případě vychýlení závaží (hmotného bodu) u tohoto rovinného matematického kyvadla, bude závaží také kmitat kolem své rovnovážné polohy, avšak v tomto případě po kružnici. V případě matematického kyvadla je vratná síla dána projevem tíhové síly. Matematický tvar linearizované pohybové rovnice rovinného matematického kyvadla je shodný s tvarem odpovídající pohybové rovnice popisující kmitavý pohyb hmotného bodu pohybujícího se po přímce, srovnej (10.70) a (11.26). Jsou-li rovnice popisující oscilace u fyzikálních nemechanických oscilátorů shodné, co do tvaru, s pohybovými rovnicemi mechanických oscilátorů, je možné v tomto případě rozšířit teorii mechanického oscilátoru i na tyto fyzikální oscilátory.

Teorie mechanických oscilátorů prezentovaná v předchozích kapitolách samozřejmě nevyčerpává teorii mechanických oscilátorů. Zvláštní pozornost zasluhují např. oscilátory nelineární, samobuzené, parametricky buzené, vázané apod. Teorie věnující se problematice takovýchto oscilátorů přesahuje rámec tohoto skriptu.



Kapitola 12

Gravitační pole

12.1 Newtonův gravitační zákon, gravitační síla

Newtonův gravitační zákon můžeme formulovat následujícím způsobem:

Newtonův gravitační zákon

Dva hmotné body se přitahují silou, jejíž velikost je přímo úměrná součinu jejich hmotností a nepřímo úměrná kvadrátu jejich vzdálenosti.

Matematické vyjádření gravitačního zákona představuje následující vztah (viz obrázek 12.1) pro gravitační sílu, která působí na hmotný bod m

$$\mathbf{F}_g = -\kappa \frac{m m'}{r^2} \mathbf{r}^0 = -\kappa \frac{m m'}{r^3} \mathbf{r}, \quad (12.1)$$

kde m je hmotnost testovacího hmotného bodu, m' je hmotnost zdrojového hmotného bodu umístěného v počátku souřadnic, $\mathbf{r}^0 = \mathbf{r}/r$ je jednotkový polohový vektor, $\kappa = (6,67430 \pm 0,00015) \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$ je tzv. gravitační konstanta¹. Znaménko minus „-“ ve vztahu (12.1) ukazuje na skutečnost, že gravitační síla \mathbf{F}_g má opačný směr než polohový vektor \mathbf{r} , viz obr. 12.1.

Ze vztahu (12.1) je patrné, že gravitační síla je s uvažováním izotropie prostoru **izotropní centrální** silou². Z této skutečnosti vyplývá, že gravitační silové pole je současně **konzervativním** silovým polem.

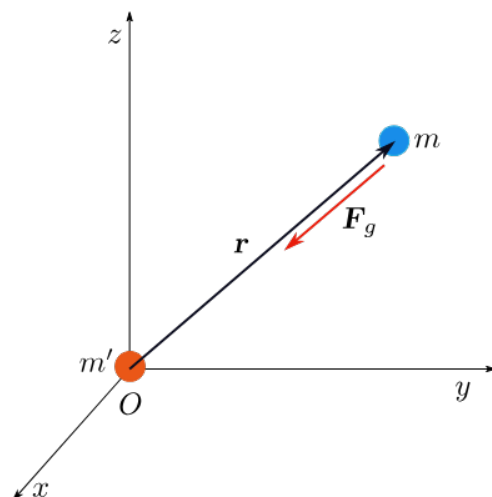
Vztah pro gravitační sílu (12.1) předpokládá, že se zdrojový hmotný bod nachází v počátku vztažné souřadnicové soustavy. Není-li tomu tak, potom je nutné přepsat vztah (12.1) do následujícího tvaru (viz obrázek 12.2)

$$\mathbf{F}_g = -\kappa \frac{m m'(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = -\kappa \frac{m m'}{R^3} \mathbf{R} = -\kappa \frac{m m'}{R^2} \mathbf{R}^0, \quad (12.2)$$

kde \mathbf{r} je polohový vektor testovacího hmotného bodu m , \mathbf{r}' je polohový vektor zdrojového hmotného bodu m' , $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}' = (x - x', y - y', z - z')$, $R = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$ a $\mathbf{R}^0 = \mathbf{R}/R$.

¹Gravitační konstanta je snad nejstarší základní fyzikální konstantou, avšak její hodnotu umíme určit s menší přesností, než je tomu u většiny „moderních“ základních konstant.

²Obecně je možné centrální sílu vyjádřit jako $\mathbf{F} = f(r)\mathbf{r}/r$.

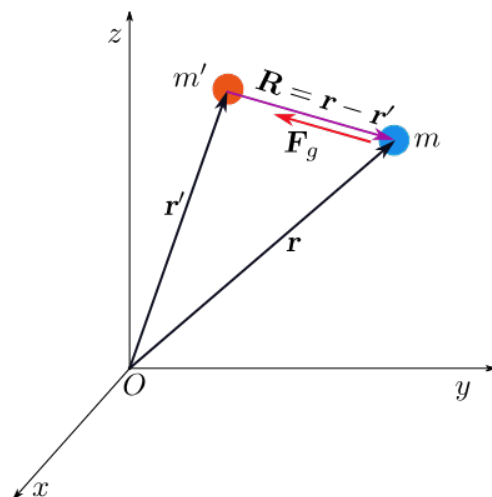


Obrázek 12.1: Geometrické uspořádání ke vztahu(12.1).

V případě, že $R \rightarrow 0$, je pole popisované vztahem (12.2) singulární, tj. roste nade všechny meze. Tato skutečnost je jen důsledkem idealizace související s hmotným bodem, který má nekonečně malý geometrický rozměr. Avšak je nutné si uvědomit, že nic takového, jako je hmotný bod, v reálném světě neexistuje a tudíž každé těleso má **konečné** rozměry.

V další části textu se budeme držet úmluvy, že zdrojovým hmotným bodům odpovídají **čárkované** souřadnice ($\mathbf{r}' = (x', y', z')$), kdežto testovacímu hmotnému bodu budou odpovídat souřadnice **nečárkované** ($\mathbf{r} = (x, y, z)$).

Pro Newtonův gravitační zákon platí **princip superpozice**³, tj. výslednou gra-



Obrázek 12.2: Geometrické uspořádání ke vztahu(12.2).

vitační sílu působící na hmotný bod m , která je výsledkem gravitačního působení více hmotných bodů (označme jejich počet N), můžeme jednoduše určit jako vektorový součet jednotlivých gravitačních sil, a tedy můžeme říct, že síla působící

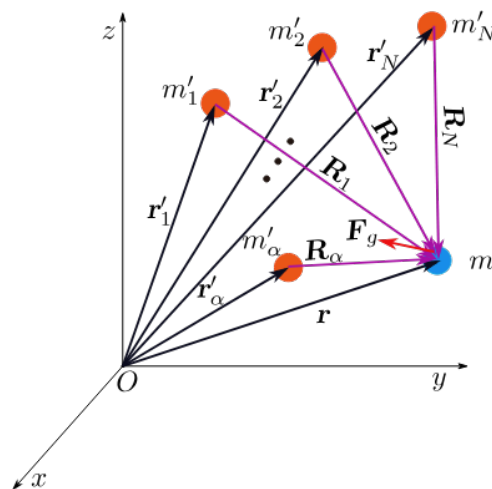
³Princip superpozice vyplývá ze skutečnosti, že velikost gravitační síly, kterou zdrojový hmotný bod m v místě \mathbf{r} působí na určitý testovací hmotný bod v místě \mathbf{r}' , závisí na hmotnosti m lineárně, tj. $F_g = km$, kde k je určitá konstanta.

mezi dvěma hmotnými body není ovlivněna přítomností dalších hmotných bodů. Necht' na testovací hmotný bod m působí gravitační silou soustava zdrojových hmotných bodů m'_1, m'_2, \dots, m'_N , potom výslednou gravitační sílu můžeme vyjádřit jako (viz obrázek 12.3)

$$\mathbf{F}_g = \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{F}_{g\alpha} = -\kappa m \sum_{\alpha=1}^N \frac{m'_\alpha (\mathbf{r} - \mathbf{r}'_\alpha)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_\alpha|^3} = -\kappa m \sum_{\alpha=1}^N \frac{m'_\alpha}{R_\alpha^3} \mathbf{R}_\alpha, \quad (12.3)$$

kde \mathbf{r}'_α je polohový vektor α -tého zdrojového hmotného bodu a \mathbf{r} je polohový vektor testovacího hmotného bodu m .

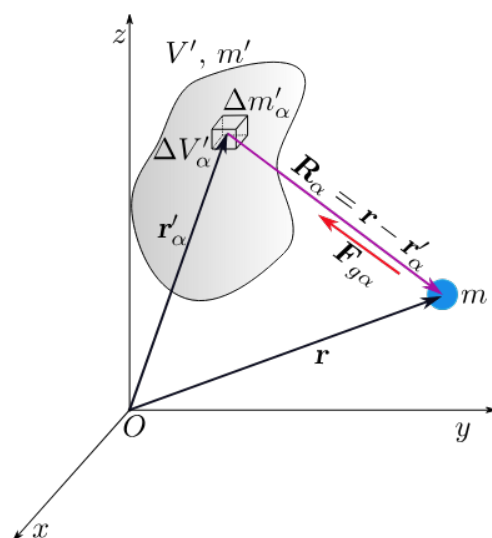
Uvažujme zdrojové těleso se spojitě rozloženou hmotou. Toto těleso má objem



Obrázek 12.3: Geometrické uspořádání ke vztahu(12.3).

V' a celkovou hmotnost m' . Objem tělesa rozdělíme na dostatečně malé objemy $\Delta V'_\alpha$, jejichž hmotnost je $\Delta m'_\alpha$, viz obrázek 12.4.

V infinitezimálním případě (objem se stahuje v bod), tj.



Obrázek 12.4: Geometrické uspořádání ke vztahu(12.5).

$$dV' = dx'dy'dz' = \Delta V'_\alpha \rightarrow 0, \quad (12.4)$$

můžeme pohlížet na vybraný element objemu jako na hmotný bod, takže na základě analogie s případem pro soustavu hmotných bodů (12.3) můžeme psát, že

$$\mathbf{F}_g = -\kappa m \lim_{\substack{\Delta V'_\alpha \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}} \sum_{\alpha=1}^N \frac{\Delta m'_\alpha (\mathbf{r} - \mathbf{r}'_\alpha)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_\alpha|^3}. \quad (12.5)$$

Jelikož pro objemovou hustotu platí, že

$$\rho(\mathbf{r}') = \lim_{\Delta V'_\alpha \rightarrow 0} \frac{\Delta m'_\alpha}{\Delta V'_\alpha}, \quad (12.6)$$

potom je možné upravit výraz (12.5) s uvažováním vztahů (12.4) a (12.6) do následujícího tvaru

$$\mathbf{F}_g = -\kappa m \lim_{\substack{\Delta V'_\alpha \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}} \sum_{\alpha=1}^N \frac{\Delta m'_\alpha}{\Delta V'_\alpha} \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}'_\alpha)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_\alpha|^3} \Delta V'_\alpha = -\kappa m \iiint_{V'} \frac{\rho(\mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV', \quad (12.7)$$

kde $\rho(\mathbf{r}')$ představuje funkci objemové hustoty, pomocí které můžeme určit celkovou hmotnost obsaženou v objemu V' , tj.

$$m' = \iiint_{V'} \rho(\mathbf{r}') dV'. \quad (12.8)$$

Vzhledem k tomu, že výsledný vztah (12.7) je velmi důležitý, napíšeme ho ještě jednou, ale bez mezičlenů

$$\mathbf{F}_g = -\kappa m \iiint_{V'} \frac{\rho(\mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV'. \quad (12.9)$$

Výraz (12.9) nám vyjadřuje výslednou gravitační sílu působící na testovací hmotný bod, jež je dána součtem všech gravitačních sil od zdrojových hmotnostních elementů $dm' = \rho(\mathbf{r}')dV'$.

Je nutné si uvědomit, že integrace (objemový integrál) ve výrazu (12.9) probíhá **jen přes čárkované souřadnice** x', y', z' .

Jelikož platí, že $dm' = \rho(\mathbf{r}')dV'$, je možné integrál (12.9) přepsat do následujícího tvaru

$$\mathbf{F}_g = -\kappa m \int_{m'} \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dm'. \quad (12.10)$$

Vztahy (12.9) a (12.10) vyjadřují gravitační zákon pro spojitě rozloženou hmotu (zdrojové těleso), která je zdrojem gravitačního pole. Vztah (12.10) platí obecně, tj. můžeme ho použít i pro dvojrozměrná a jednorozměrná zdrojová tělesa. Vztah (12.10) se dobře hodí pro nejrůznější fyzikální úvahy, avšak pro výpočty se zpravidla nehodí, na rozdíl od vztahu (12.9).

V případě dvojrozměrného zdrojového tělesa platí, že $dm' = \sigma(\mathbf{r}')dS'$, čímž můžeme upravit vztah (12.10) do následujícího tvaru

$$\mathbf{F}_g = -\kappa m \iint_{S'} \frac{\sigma(\mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dS', \quad (12.11)$$

$\rho(\mathbf{r}')$ je objemová hustota zdrojového tělesa v místě o pohybovém vektoru \mathbf{r}'

kde $\sigma(\mathbf{r}')$ je plošná hustota.

Analogicky pro jednorozměrné zdrojové těleso, $dm' = \tau(\mathbf{r}')dl'$, úpravou vztahu (12.10) dostáváme, že

$$\mathbf{F}_g = -\kappa m \int_{V'} \frac{\tau(\mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dl' , \quad (12.12)$$

kde $\tau(\mathbf{r}')$ je lineární hustota.

Jelikož gravitační síla je silou konzervativní, tak pro ni platí, že

$$\mathbf{F}_g(\mathbf{r}) = -\nabla U(\mathbf{r}) , \quad (12.13)$$

kde $U(\mathbf{r})$ je **potenciální energie gravitačního pole** v místě určeném polohovým vektorem \mathbf{r} .

12.2 Intenzita a potenciál gravitačního pole

Z gravitačního zákona vyplývá, že na sebe budou silově působit hmotné body, i když budou od sebe velmi vzdálené. Ve fyzice silové působení na objekt vlivem přítomnosti jiného objektu nazýváme **silové působení na dálku**. Pro popis silového působení na dálku si zavedeme fyzikální pole, které nazveme **gravitační pole**. V okolí každého hmotného bodu (tělesa) existuje tedy pole, o němž se můžeme jednoduše přesvědčit tím, že do uvažovaného místa umístíme jiný, tj. testovací hmotný bod. Na testovací hmotný bod bude působit gravitační síla a tedy v místě testovacího hmotného bodu existuje gravitační pole. Pomocí gravitačního pole vytvořeného hmotnými body (příp. hmotným tělesem) zajistíme, že hmotný bod „pocítí“ silové působení díky lokálnímu vlivu, čímž zbavíme silové působení na dálku nálepky něčeho zvláštního či tajemného. Gravitační pole lze popsat buď silově nebo energeticky. Silový popis vede k veličině intenzita gravitačního pole a energetický popis vede k veličině potenciál gravitačního pole.

Předpokládejme soustavu hmotných bodů, které vytváří gravitační pole. Do bodu o polohovém vektoru \mathbf{r} , pak umístíme testovací hmotný bod m a změříme sílu, která na něj bude působit. **Gravitační intenzitu pole (intenzitu gravitačního pole)** pak definujeme jako sílu vztaženou na jednotku hmotnosti testovacího hmotného bodu. Protože testovací hmotný bod sám vytváří gravitační pole, a tedy narušuje původní gravitační pole, musí mít hmotný bod co nejmenší hmotnost, abychom minimalizovali toto narušení. Z tohoto důvodu popíšeme tento proces limitním případem, čímž pro intenzitu gravitačního pole dostáváme:

$$\mathbf{K}(\mathbf{r}) = \lim_{m \rightarrow 0} \frac{\text{síla působící na test. hmotný bod } m \text{ v bodě } \mathbf{r}}{m} . \quad (12.14)$$

Tímto jsme zavedli veličinu intenzita gravitačního pole $\mathbf{K}(\mathbf{r})$. Pomocí této veličiny zavádíme vektorové pole $\mathbf{K} = \mathbf{K}(\mathbf{r})$, které nazýváme pole gravitační. Vložíme-li testovací hmotný bod m do gravitačního pole v místě o polohovém vektoru \mathbf{r} , tak na něj bude působit následující gravitační síla:

$$\mathbf{F}_g(\mathbf{r}) = \mathbf{K}(\mathbf{r}) m . \quad (12.15)$$

Odtud můžeme psát

$$\mathbf{K}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{F}_g(\mathbf{r})}{m} . \quad (12.16)$$

Již z kap. 3 víme, že ke grafickému zachycení vektorového pole slouží vektorové čáry (křivky). Pro zachycení gravitačního pole používáme rovněž vektorové čáry, které budeme nazývat **gravitační siločáry**, které se vyznačují tím, že je k nim v každém jejich bodě intenzita gravitačního pole tečná.

Podělením vztahu (12.13) hmotností testovacího hmotného bodu dostaneme s pomocí vztahu (12.16) následující výraz pro intenzitu gravitačního pole:

$$\mathbf{K}(\mathbf{r}) = -\nabla\varphi(\mathbf{r}) , \quad (12.17)$$

kde $\varphi(\mathbf{r}) = U(\mathbf{r})/m$ je skalární veličina zvaná **potenciál gravitačního pole**.

Pomocí vztahu (12.17) můžeme vyjádřit totální diferenciál (přírůstek) gravitačního potenciálu jako

$$d\varphi = (\nabla\varphi) \cdot d\mathbf{r} = -\mathbf{K} \cdot d\mathbf{r} . \quad (12.18)$$

Plochu, jejíž všechny body mají stejný gravitační potenciál:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \textit{konst.} , \quad (12.19)$$

nazýváme **ekvipotenciální plochu**.

Odtud je zřejmé, že přírůstek potenciálu musí být na ekvipotenciální ploše nulový, tj.

$$d\varphi = 0 = (\nabla\varphi) \cdot d\mathbf{r} = -\mathbf{K} \cdot d\mathbf{r} = 0 , \quad (12.20)$$

kde $d\mathbf{r}$ v tomto případě představuje infinitezimální posunutí polohového vektoru, jehož koncový bod bude ležet na ekvipotenciální ploše, tedy vektor $d\mathbf{r}$ leží na této ploše. Z rovnosti (12.20) vyplývá (skalární součin je roven nule), že vektor intenzity gravitačního pole musí být ve všech bodech ekvipotenciální plochy k této ploše **kolmý**. Protože je intenzita gravitačního pole současně tečná ke gravitačním siločárám, tak gravitační siločáry musí být také kolmé k ekvipotenciální ploše v místech, kterými gravitační siločáry touto plochou procházejí.

Pro intenzitu gravitačního pole pak na základě vztahu (12.10) dostáváme

$$\mathbf{K}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{F}_g}{m} = -\varkappa \int_{m'} \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dm' = -\varkappa \int_{m'} \frac{\mathbf{R}}{R^3} dm' . \quad (12.21)$$

Intenzita $\mathbf{K}(\mathbf{r})$ nám popisuje gravitační vektorové pole. Definujeme ji jako sílu gravitačního pole vztaženou na jednotku hmotnosti testovacího hmotného bodu. Nyní využijeme následující rovnosti

$$\nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + C' \right) = -\frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} , \quad (12.22)$$

kde $C' = C'(\mathbf{r}')$ je obecně libovolnou funkcí čárkovaných souřadnic, avšak pro gradient přes nečárkované souřadnice zůstává konstantou. Dosazením do vztahu (12.21) dostaneme

$$\mathbf{K}(\mathbf{r}) = -\varkappa \int_{m'} -\nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + C' \right) dm' . \quad (12.23)$$

Protože gradient funkce $(1/|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|+C')$ je realizován přes nečárkované souřadnice, můžeme operátor ∇ vytknout před integrál (12.23), který představuje integraci jen přes souřadnice čárkované, takže

$$\mathbf{K}(\mathbf{r}) = -\nabla \left(-\kappa \int_{m'} \frac{dm'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} + C \right), \quad (12.24)$$

kde C je konstanta určená vztahem

$$C = -\kappa \int_{m'} C'(\mathbf{r}') dm'. \quad (12.25)$$

Díky předpokladu, že funkce $C'(\mathbf{r}')$ je libovolnou funkcí, představuje konstanta C libovolnou konstantu.

Porovnáním vztahů (12.24) a (12.17) dospějeme ke vztahu pro potenciál gravitačního pole pro případ, kdy je jeho zdrojem těleso se spojitě rozloženou hmotou

$$\varphi(\mathbf{r}) = -\kappa \int_{m'} \frac{dm'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} + C = -\kappa \int_{m'} \frac{dm'}{R} + C. \quad (12.26)$$

Ze vztahu (12.26) je vidět, že potenciál gravitačního pole je určen až na aditivní konstantu C , kterou určíme z gravitačního potenciálu v referenčním bodě.

Předpokládejme, že objekt, který je zdrojem gravitačního pole, je **prostorově omezen**, tj. jedná se o lokálně distribuovanou hmotu. Chceme-li určit gravitační potenciál takového objektu ve velmi vzdáleném bodě, tj. $|\mathbf{r}| \gg |\mathbf{r}'|$ neboli $r \gg r'$, potom je možné zjednodušit vztah (12.26) následujícím způsobem:

$$\varphi(\mathbf{r}) = -\kappa \int_{m'} \frac{dm'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} + C \approx -\kappa \int_{m'} \frac{dm'}{|\mathbf{r}|} + C = -\frac{\kappa}{r} \int_{m'} dm' + C = -\frac{\kappa m'}{r} + C. \quad (12.27)$$

Poslední výraz v rovnostech (12.27) představuje potenciál od zdrojového hmotného bodu o hmotnosti m' , který je umístěn do počátku souřadnic. Použitá aproximace ve vztazích (12.27) demonstruje oprávněnost zavedení hmotného bodu nahrazujícího těleso konečných rozměrů. Budeme-li požadovat, aby platilo, že

$$\varphi(\infty) = \lim_{r \rightarrow \infty} \left[-\kappa \int_{m'} \frac{dm'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} + C \right] = 0, \quad (12.28)$$

potom na základě výsledku aproximace (12.27) budou platit pro určení konstanty C následující úpravy:

$$\begin{aligned} \varphi(\infty) = \lim_{r \rightarrow \infty} \left[-\kappa \int_{m'} \frac{dm'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} + C \right] &= \lim_{r \rightarrow \infty} -\kappa \int_{m'} \frac{dm'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} + \lim_{r \rightarrow \infty} C = \\ &= -\lim_{r \rightarrow \infty} \underbrace{\frac{\kappa m'}{r}}_{=0} + C = C = 0. \end{aligned} \quad (12.29)$$

Připomeňme, že k tomuto výsledku jsme dospěli za předpokladu, že hmota není neomezeně distribuována⁴. Kdyby tomu tak nebylo, byli bychom nuceni zvolit

⁴V případě prostorově neomezené distribuce hmoty by tento integrál divergoval.

nulový potenciál v nějakém konečně vzdáleném bodě.

Na základě výsledku (12.29) je tedy možné napsat gravitační potenciál jako

$$\varphi(\mathbf{r}) = -\kappa \int_{m'} \frac{dm'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -\kappa \int_{m'} \frac{dm'}{R}. \quad (12.30)$$

Pomocí vztahu (12.30) můžeme dostat obecný výraz pro potenciální energii testovacího hmotného bodu v gravitačním poli:

$$U(\mathbf{r}) = m\varphi(\mathbf{r}) = -\kappa m \int_{m'} \frac{dm'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -\kappa m \int_{m'} \frac{dm'}{R}. \quad (12.31)$$

Využitím vztahů $dm' = \rho(\mathbf{r}')dV'$, $dm' = \sigma(\mathbf{r}')dS'$ a $dm' = \tau(\mathbf{r}')dl'$ a výrazů (12.30) a (12.31), je možné přepsat vztahy pro gravitační potenciál a gravitační potenciální energii do tvarů pro objemově, plošně a lineárně (jednorozměrně) rozloženou hmotu, která je zdrojem gravitačního pole.

Tedy pro objemově rozloženou hmotu dostáváme

$$\varphi(\mathbf{r}) = -\kappa \iiint_{V'} \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' = -\kappa \iiint_{V'} \frac{\rho(\mathbf{r}')}{R} dV', \quad (12.32)$$

$$U(\mathbf{r}) = -\kappa m \iiint_{V'} \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' = -\kappa m \iiint_{V'} \frac{\rho(\mathbf{r}')}{R} dV', \quad (12.33)$$

pro plošně rozloženou hmotu analogicky dospějeme ke vztahům

$$\varphi(\mathbf{r}) = -\kappa \iint_{S'} \frac{\sigma(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS' = -\kappa \iint_{S'} \frac{\sigma(\mathbf{r}')}{R} dS', \quad (12.34)$$

$$U(\mathbf{r}) = -\kappa m \iint_{S'} \frac{\sigma(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS' = -\kappa m \iint_{S'} \frac{\sigma(\mathbf{r}')}{R} dS' \quad (12.35)$$

a pro jednorozměrně rozloženou hmotu můžeme psát, že

$$\varphi(\mathbf{r}) = -\kappa \int_{l'} \frac{\tau(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dl' = -\kappa \int_{l'} \frac{\tau(\mathbf{r}')}{R} dl', \quad (12.36)$$

$$U(\mathbf{r}) = -\kappa m \int_{l'} \frac{\tau(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dl' = -\kappa m \int_{l'} \frac{\tau(\mathbf{r}')}{R} dl'. \quad (12.37)$$

Podobným způsobem, jako v případě spojitě rozložené hmoty, která je zdrojem gravitačního pole, můžeme postupovat i pro nespojitě rozloženou hmotu. Zaměříme se pouze na případ, který je reprezentován vztahem (12.2). Takže pro intenzitu gravitačního pole, která odpovídá jednomu zdrojovému hmotnému bodu dostáváme

$$\mathbf{K} = \frac{\mathbf{F}_g}{m} = -\kappa \frac{m'(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \mathbf{r}^0 = -\kappa \frac{m'(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = -\kappa \frac{m'}{R^3} \mathbf{R}. \quad (12.38)$$

Použijeme-li vztahu (12.22) v rovnosti (12.38) dostaneme⁵

$$\mathbf{K}(\mathbf{r}) = -\nabla \left(-\kappa \frac{m'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right). \quad (12.39)$$

⁵Protože i v tomto případě předpokládáme nulový potenciál v nekonečně vzdáleném bodě, můžeme bez újmy na obecnosti považovat funkci $C'(\mathbf{r}')$ ve vztahu (12.22) za nulovou.

Porovnáním vztahu (12.39) se vztahem (12.17) dostaneme výraz pro gravitační potenciál hmotného bodu

$$\varphi(\mathbf{r}) = -\kappa \frac{m'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -\kappa \frac{m'}{R}. \quad (12.40)$$

Pro potenciální energii testovacího hmotného bodu m v gravitačním poli od jednoho zdrojového hmotného bodu dostáváme

$$U(\mathbf{r}) = m\varphi(\mathbf{r}) = -\kappa \frac{m m'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -\kappa \frac{m m'}{R}. \quad (12.41)$$

Bude-li umístěn zdrojový hmotný bod v počátku vztažné soustavy ($\mathbf{r}' = \mathbf{0}$), pak přejdou vztahy (12.38), (12.40) a (12.41) do následujícího tvaru

$$\mathbf{K}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{F}_g}{m} = -\kappa \frac{m'}{r^3} \mathbf{r}, \quad (12.42)$$

$$\varphi(r) = -\kappa \frac{m'}{r}, \quad (12.43)$$

$$U(r) = -\kappa \frac{m m'}{r}. \quad (12.44)$$

Pro ekvipotenciální plochu $\varphi(\mathbf{r}) = \text{konst.}$ v případě jednoho zdrojového HB o hmotnosti m' musí na základě vztahu (12.40), resp. (12.43) platit:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \text{konst.} = -\kappa \frac{m'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -\kappa \frac{m'}{R}, \quad \text{resp.} \quad \varphi(\mathbf{r}) = \text{konst.} = -\kappa \frac{m'}{r}. \quad (12.45)$$

Odtud vidíme, že ekvipotenciální plocha předtvaruje geometrické místo bodů, pro které platí, že jsou od zdrojového HB vzdáleny R , resp. r , což představuje **kulovou plochu** o poloměru R , resp. r , v jejímž středu se nachází zdrojový HB.

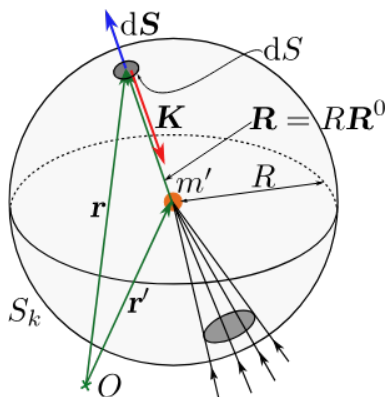
12.3 Gaussův zákon a Poissonova rovnice pro gravitační pole

Uvažujme jeden zdrojový HB o hmotnosti m' , který se nemusí nacházet v počátku souřadnicové soustavy. Již víme, že ekvipotenciální plochou je v tomto případě kulová plocha S_k o poloměru R , v jejímž středu se zdrojový HB nachází, viz obr. 12.5. Dále víme, že gravitační silové čáry jsou kolmé k této ploše, a tedy i intenzita gravitačního pole \mathbf{K} .

Orientovaný element plochy $d\mathbf{S}$ je vždy orientován **směrem ven** z uzavřené plochy a platí pro něj: $d\mathbf{S} = dS \mathbf{n}$, kde dS je velikost elementu plochy a \mathbf{n} je vnější jednotkový normálový vektor k uzavřené ploše (v našem případě kulová plocha). Gravitační intenzita v bodě na povrchu kulové plochy S_k na základě vztahů (12.2) a (12.16) je:

$$\mathbf{K}(\mathbf{r}) = -\kappa \frac{m'(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = -\kappa \frac{m'}{R^2} \mathbf{R}^0. \quad (12.46)$$

Vektor intenzity gravitačního pole $\mathbf{K} = K \mathbf{K}^0$ a vektor elementu plochy $d\mathbf{S}$ jsou opačně orientovány a platí, že $\mathbf{K}^0 \nparallel \mathbf{R}^0$, tak musí platit, že $\mathbf{R}^0 \uparrow \mathbf{n}$.



Obrázek 12.5: Tok intenzity gravitačního pole kulovou plochou S_k .

Tok gravitační intenzity $\mathbf{K}(\mathbf{r})$ kulovou plochou S_k o poloměru R (který považuje za daný, tj. konstantní) můžeme na základě vztahu pro tok vektorové veličiny (3.12) vyjádřit jako

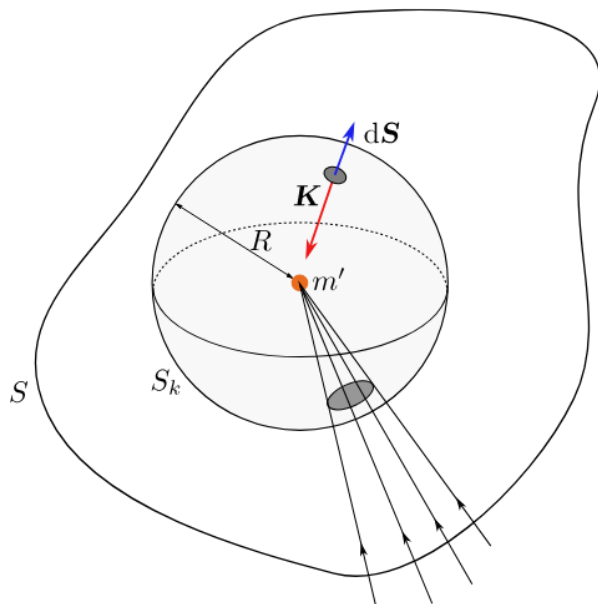
$$\begin{aligned}\Phi_g &= \oiint_{S_k} \mathbf{K}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = -\kappa \oiint_{S_k} \frac{m'}{R^2} \mathbf{R}^0 \cdot d\mathbf{S} = -\kappa \frac{m'}{R^2} \oiint_{S_k} \mathbf{R}^0 \cdot d\mathbf{S} = \\ &= -\kappa \frac{m'}{R^2} \oiint_{S_k} \mathbf{R}^0 \cdot \mathbf{n} dS = -\kappa \frac{m'}{R^2} \underbrace{\oiint_{S_k} dS}_{=4\pi R^2} = -4\pi \kappa m'. \quad (12.47)\end{aligned}$$

Zvolíme-li místo kulové plochy obecnou uzavřenou plochu S kolem zdrojového HB (viz obr. 12.6), musí do ní vstupovat stejný počet gravitačních siločár jako z kulové plochy S_k (každá gravitační siločára, která protne kulovou plochu S_k , protne i obklopující uzavřenou plochu S obecného tvaru). Tedy tok gravitační intenzity obecnou uzavřenou plochou je na základě výsledku (12.47) dán následujícím vztahem:

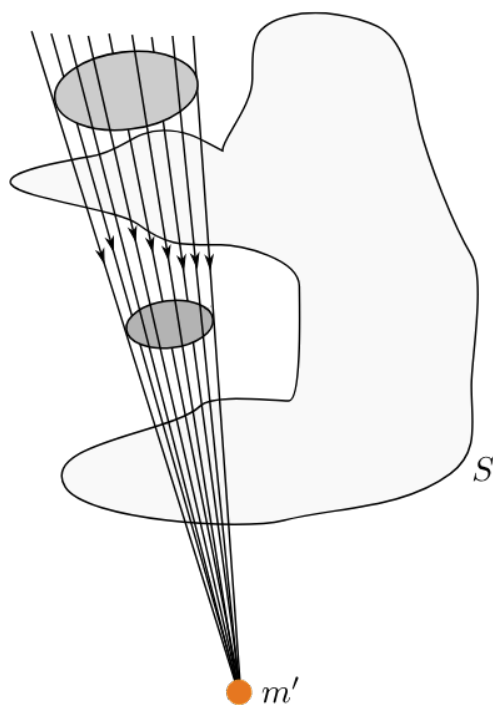
$$\Phi_g = \oiint_S \mathbf{K}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = -4\pi \kappa m'. \quad (12.48)$$

Tento závěr bude platit i v případě, kdy gravitační siločáry nebudou v prostoru rozloženy izotropně a dokonce i budou-li zakřiveny. Stejnou úvahu lze použít i pro případ, kdy nebude plocha konvexní (gravitační siločára protne plochu vícenásobně), a nebo když zdrojový HB bude ležet vně uzavřené plochy S . Nachází-li se zdrojový HB vně uzavřené plochy, pak některé gravitační siločáry protínají uzavřenou plochu vícekrát, přičemž počet průchodů uzavřenou plochou je vždy sudé číslo. V polovině případů gravitační siločáry vždy o stejném počtu (tedy stejně velký tok) vstupují do uzavřené plochy (protínají uzavřenou plochu směrem dovnitř) a v druhé polovině případů z uzavřené plochy vystupují (protínají uzavřenou plochu směrem ven), viz obr. 12.7. Vzhledem k tomu, že se toky vstupující a vystupující z uzavřené plochy liší znaménkem (ne velikostí), bude jejich výsledný součet nulový. Odtud plyne zřejmý závěr: *bude-li ležet zdrojový hmotný bod vně uzavřené plochy, pak tok intenzity gravitačního pole touto plochou bude nulový.*

Uvažujme soustavu N zdrojových HB. Potom na základě principu superpozice



Obrázek 12.6: Tok intenzity gravitačního pole obecnou uzavřenou plochou S .



Obrázek 12.7: Tok intenzity gravitačního pole obecnou uzavřenou plochou S , kdy zdrojový HB se nachází vně této plochy.

bude intenzita gravitačního pole této soustavy dána následujícím vztahem (viz vztah (12.3)):

$$\mathbf{K}(\mathbf{r}) = \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{K}_{\alpha}(\mathbf{r}) = -\kappa \sum_{\alpha=1}^N \frac{m'_{\alpha}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'_{\alpha})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_{\alpha}|^3} = -\kappa \sum_{\alpha=1}^N \frac{m'_{\alpha}}{R_{\alpha}^3} \mathbf{R}_{\alpha} . \quad (12.49)$$

Tok intenzity gravitačního pole obecnou uzavřenou plochou S , která uzavírá soustavu N zdrojových HB o celkové hmotnosti $m' = m'_1 + m'_2 + \dots + m'_N$, je dána následujícím vztahem:

$$\begin{aligned}\Phi_g &= \oint_S \mathbf{K}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \oint_S \left(\sum_{\alpha=1}^N \mathbf{K}_\alpha(\mathbf{r}) \right) \cdot d\mathbf{S} = \\ &= \underbrace{\oint_S \mathbf{K}_1(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}}_{-4\pi\kappa m'_1} + \underbrace{\oint_S \mathbf{K}_2(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}}_{-4\pi\kappa m'_2} + \dots + \underbrace{\oint_S \mathbf{K}_N(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}}_{-4\pi\kappa m'_N} = \\ &= -4\pi\kappa \underbrace{(m'_1 + m'_2 + \dots + m'_N)}_{m'} = -4\pi\kappa m'. \quad (12.50)\end{aligned}$$

Tento výsledek uvedeme ještě jednou:

$$\oint_S \mathbf{K}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = -4\pi\kappa m'. \quad (12.51)$$

Vztah (12.51) představuje Gaussův zákon pro gravitační pole v integrálním tvaru a vyjadřuje nám, čemu se rovná tok intenzity gravitačního pole obecnou uzavřenou plochou uzavírající celkovou hmotnost m' , která je zdrojem gravitačního pole.

Gaussův zákon v integrálním tvaru platí i pro případ, kdy hmotnost m' , jako zdroj gravitačního pole uvnitř uzavřené plochy S , je rozložena spojitě a platí pro ní:

$$m' = \int_{m'} dm'. \quad (12.52)$$

Nechť $dm' = \rho(\mathbf{r}')dV'$ (uvažujeme, že hmotnost je rozložena spojitě v objemu V'_z), potom

$$m' = \iiint_{V'_z} \rho(\mathbf{r}')dV'. \quad (12.53)$$

Označme objem, který uzavírá plocha S jako V , přičemž platí, že $V \geq V'_z$. Vzhledem k tomu, že objemová hustota $\rho(\mathbf{r}') = 0$ v místech, kde se zdrojová hmotnost v uzavřené ploše nenachází, tak lze vztah pro celkovou uzavřenou zdrojovou hmotnost (12.53) napsat jako

$$m' = \iiint_V \rho(\mathbf{r})dV. \quad (12.54)$$

Za zdrojovou hmotnost m' uzavřenou plochou S můžeme do vztahu (12.7) dosadit ze vztahu (12.54):

$$\oint_S \mathbf{K}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = -4\pi\kappa \iiint_V \rho(\mathbf{r})dV. \quad (12.55)$$

Abychom mohli tuto rovnici dále upravit, tak použijeme Gaussovu (Gaussovu-Ostrogradského) větu.

Gaussova (Gaussova-Ostrogradského) věta

Je-li $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ vektorové pole se spojitými parciálními derivacemi prvního řádu na omezené regulární oblasti V ohraničené uzavřenou jednoduše souvislou po částech hladkou kladně orientovanou plochou S , pak platí:

$$\oint_{S(V)} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) dV . \quad (12.56)$$

Zde $\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r})$ představuje operaci **divergence** a pro kartézské souřadnice pro ni platí:

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right) \cdot (A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}) = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} . \quad (12.57)$$

Pomocí Gaussovy věty si vyjádříme plošný integrál přes uzavřenou plochu S jako objemový integrál:

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{K}(\mathbf{r}) dV = -4\pi\kappa \iiint_V \rho(\mathbf{r}) dV . \quad (12.58)$$

Pravou stranu převedeme na levou stranu:

$$\iiint_V (\nabla \cdot \mathbf{K}(\mathbf{r}) + 4\pi\kappa\rho(\mathbf{r})) dV = 0 . \quad (12.59)$$

Protože objem V , přes který se integruje, je chápán jako obecný, pak aby platila tato rovnice je nutné, aby byl integrand tohoto integrálu roven nule, tj.

$$\nabla \cdot \mathbf{K}(\mathbf{r}) + 4\pi\kappa\rho(\mathbf{r}) = 0 . \quad (12.60)$$

Odtud

$$\nabla \cdot \mathbf{K}(\mathbf{r}) = -4\pi\kappa\rho(\mathbf{r}) . \quad (12.61)$$

Rovnice (parciální diferenciální rovnice) (12.61) představuje **Gaussův zákon pro gravitační pole v diferenciálním tvaru**.

Dosadíme-li do Gaussova zákona pro gravitační pole v diferenciálním tvaru za gravitační intenzitu ze vztahu (12.17), tak dostáváme:

$$\nabla \cdot (-\nabla\varphi) = -4\pi\kappa\rho(\mathbf{r}) . \quad (12.62)$$

Skalární součin mezi operátory ∇ je v kartézských souřadnicích roven:

$$\nabla^2 \equiv \nabla \cdot \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} . \quad (12.63)$$

Pomocí operátoru ∇^2 (někdy se používá označení $\Delta \equiv \nabla^2$ a nazývá se **Laplaceův operátor**) upravíme rovnici (12.62) do tvaru:

$$\nabla^2 \varphi = 4\pi\kappa\rho(\mathbf{r}) . \quad (12.64)$$

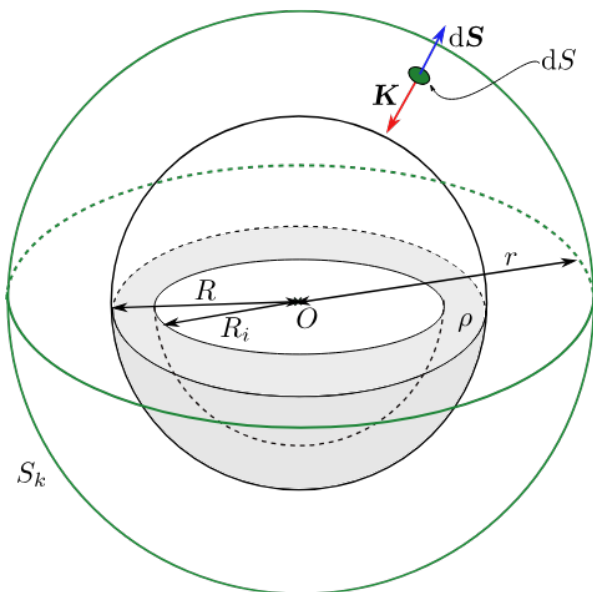
Tato rovnice se nazývá **Poissonova rovnice pro gravitační pole**.

Řešením Poissonovy rovnice pro gravitační pole (nehomogenní parciální diferenciální rovnice) při zadaných okrajových podmínkách a znalosti funkce objemové hustoty $\rho = \rho(\mathbf{r})$ dostáváme gravitační potenciál φ pro danou oblast. Zpravidla musíme Poissonovu rovnici pro gravitační pole řešit numericky, což bývá často jednodušší než řešit numericky integrál (12.32), který formálně představuje řešení této rovnice.

Pozn: V té části prostoru (oblasti), kde je objemová hustota $\rho(\mathbf{r})$ rovna nule, přechází Poissonova rovnice pro gravitační pole v tzv. **Laplaceovu rovnici pro gravitační pole** (homogenní parciální diferenciální rovnice): $\nabla^2\varphi = 0$, která je jejím speciálním případem.

12.4 Gravitační pole uvnitř a vně homogenní duté koule

Uvažujme homogenní dutou kouli, jejíž střed leží v počátku souřadnicového systému, o objemové hustotě $\rho = konst.$ s vnějším poloměrem R a vnitřním poloměrem $0 \leq R_i \leq R$. Kolem této duté koule uvažujme kulovou plochu S_k , která má střed shodný se středem duté koule a má poloměr r , viz obr. 12.8. Na kulové



Obrázek 12.8: Tok intenzity gravitačního pole kulovou plochou S_k , která obklopuje homogenní dutou kouli.

ploše bude mít intenzita gravitačního pole $\mathbf{K}(\mathbf{r})$ stejnou velikost ve všech směrech (izotropní gravitační pole) a bude nesouhlasně orientována s jednotkovým vektorem vnější normály \mathbf{n} ke kulové ploše S_k ($\mathbf{K} = K\mathbf{K}^0$, $\mathbf{K}^0 = -\mathbf{n}$). Hmotnost duté koule m' lze pomocí hustoty vyjádřit jako

$$m' = \frac{4}{3}\pi\rho(R^3 - R_i^3) . \quad (12.65)$$

Uvažujme případ, kdy $r \geq R$. Z Gaussova zákona pro gravitační pole v integrálním tvaru (12.51) dostáváme:

$$\oint_{S_k} \mathbf{K}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \oint_{S_k} K \mathbf{K}^0 \cdot \mathbf{n} dS = - \oint_{S_k} K dS = -K \underbrace{\oint_{S_k} dS}_{4\pi r^2} = -4\pi r^2 K = -4\pi \varkappa m' . \quad (12.66)$$

Velikost intenzity grav. pole je na povrchu kulové plochy konstantní.

Na základě tohoto výsledku si můžeme vyjádřit velikost intenzity gravitačního pole:

$$K(r) = \varkappa \frac{m'}{r^2} . \quad (12.67)$$

Protože platí, že $\mathbf{r}^0 \equiv \mathbf{n}$, pak můžeme vektor intenzity gravitačního pole zapsat jako

$$\mathbf{K}(\mathbf{r}) = K(r) \mathbf{K}^0 = -K(r) \mathbf{n} = -\varkappa \frac{m'}{r^2} \mathbf{n} \equiv -\varkappa \frac{m'}{r^2} \mathbf{r}^0 = -\varkappa \frac{m'}{r^3} \mathbf{r} . \quad (12.68)$$

Porovnáme-li tento výsledek se vztahem pro intenzitu gravitačního pole HB umístěného do počátku souřadnic (12.42), tak je zřejmé, že se jedná o **identické** vztahy. Odtud plyne důležitý závěr, že vně duté koule můžeme **nahradit** tuto kouli hmotným bodem umístěným v jejím středu, který má stejnou hmotnost jako dutá koule (12.65). Položíme-li vnitřní poloměr duté koule roven nule ($R_i = 0$), pak přejde dutá koule v plnou kouli a výše uvedený závěr platí i pro tento případ.

Dále uvažujme případ, kdy $r < R_i$. V tomto případě neuzavírá kulová plocha S_k žádnou zdrojovou hmotnost. Potom z Gaussova zákona pro gravitační pole v integrálním tvaru (12.51) dostáváme:

$$\oint_{S_k} \mathbf{K}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = 0 . \quad (12.69)$$

Odtud vyplývá, že v tomto případě $\mathbf{K}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$, tedy gravitační pole uvnitř duté koule je nulové. Uvážíme-li vztah mezi intenzitou gravitačního pole a jeho potenciálem (12.17), tj. $\mathbf{K}(\mathbf{r}) = -\nabla \varphi(\mathbf{r})$, tak v tomto případě je $\varphi = konst.$.

12.5 Gravitační pole uvnitř a vně homogenní plné koule

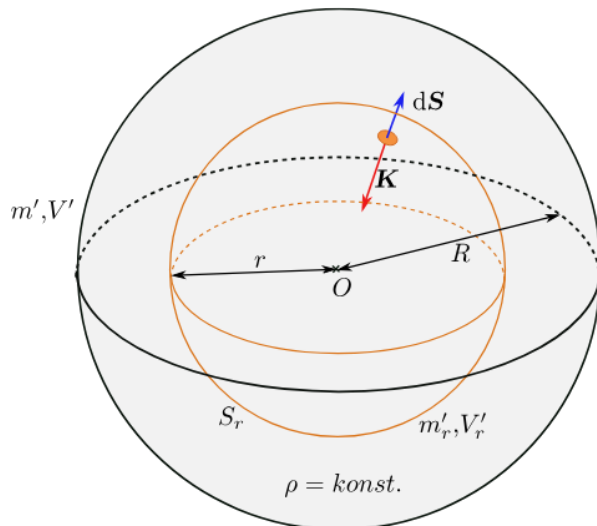
Uvažujme plnou homogenní ($\rho = konst.$) kouli o poloměru R , jejíž hmotnost je m' a její střed se nachází v počátku souřadnicové soustavy. Z předchozího textu již víme, že ve vzdálenosti od jejího středu $r \geq R$ je velikost intenzity gravitačního pole rovna:

$$K(r) = \varkappa \frac{m'}{r^2} \quad (12.70)$$

a odpovídá velikosti intenzity gravitačního pole HB, který se nachází ve středu této plné koule a má její hmotnost.

Dále uvažujme, kulovou plochu S_r o poloměru r nacházející se uvnitř uvažované plné koule ($r \leq R$), jejíž střed je totožný se středem uvažované plné koule, viz obr. 12.9.

Hustotu plné koule je možné si vyjádřit jako



Obrázek 12.9: Geometrická situace pro určení gravitačního pole uvnitř plné koule.

$$\rho = \frac{m'}{V'} = \frac{m'}{\frac{4}{3}\pi R^3} . \quad (12.71)$$

Hmotnost uzavřenou v kulové ploše S_r označíme jako m'_r a platí pro ní:

$$m'_r = \rho V'_r = \frac{4}{3}\pi \rho r^3 . \quad (12.72)$$

Zde za hustotu můžeme dosadit ze vztahu (12.71), čímž dostaneme:

$$m'_r = \frac{4}{3}\pi \frac{m'}{\frac{4}{3}\pi R^3} r^3 = \frac{m'}{R^3} r^3 . \quad (12.73)$$

Gravitační pole uvnitř plné koule musí být izotropní, tedy intenzita gravitačního pole musí být opačně orientovaná jako vnější jednotkový normálový vektor ke kulové ploše S_r a má ve všech bodech na této ploše stejnou velikost. Na základě Gaussova zákona pro gravitační pole v integrálním tvaru (12.51), kam dosadíme ze vztahu (12.73), dostáváme:

$$\begin{aligned} \oint_{S_r} \mathbf{K}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} &= \oint_{S_r} K(r) \mathbf{K}^0 \cdot d\mathbf{S} = \oint_{S_r} K(r) \mathbf{K}^0 \cdot \mathbf{n} dS = - \oint_{S_r} K(r) dS = \\ &= -K(r) \underbrace{\oint_{S_r} dS}_{4\pi r^2} = -4\pi r^2 K(r) = -4\pi \varkappa m'_r = -4\pi \varkappa \frac{m'}{R^3} r^3 . \end{aligned} \quad (12.74)$$

$$\mathbf{K}^0 = -\mathbf{n}$$

Odtud si lze vyjádřit vztah pro velikost intenzity gravitačního pole uvnitř homogenní plné koule:

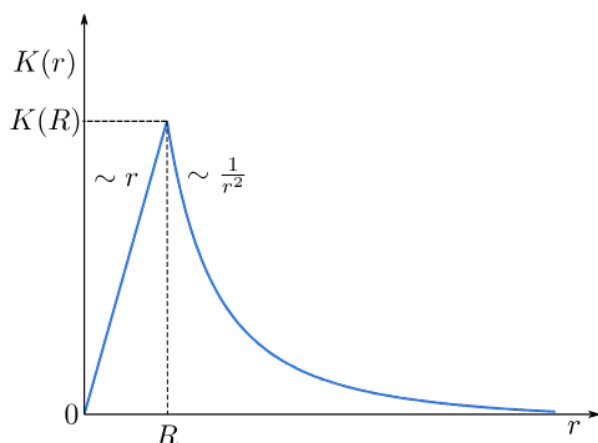
$$-4\pi r^2 K(r) = -4\pi \varkappa \frac{m'}{R^3} r^3 \quad \Rightarrow \quad K(r) = \varkappa \frac{m'}{R^3} r, \quad 0 \leq r \leq R. \quad (12.75)$$

Pro vektor intenzity gravitačního pole pak dostáváme:

$$\mathbf{K}(\mathbf{r}) = K(r) \mathbf{K}^0 = -K(r) \mathbf{n} \equiv -K(r) \mathbf{r}^0 = -\varkappa \frac{m'}{R^3} r \mathbf{r}^0 = -\varkappa \frac{m'}{R^3} \mathbf{r}. \quad (12.76)$$

Z výsledku vidíme, že velikost intenzity gravitačního pole uvnitř plné homogenní koule **lineárně roste** se vzdáleností od jejího středu, protože \varkappa , m' a R jsou konstantní. Pro $r > R$, jak je vidět ze vztahu (12.70), naopak klesá a to s kvadrátem vzdálenosti od jejího středu. Můžeme na základě této skutečnosti konstatovat, že ke gravitačnímu poli uvnitř plné homogenní koule přispívá jen ta část koule, která se nachází uvnitř kulové plochy S_r . Pro $r = R$ dávají vztahy (12.70) a (12.75) stejnou hodnotu.

Na obr. 12.10 je zachycen vývoj velikosti intenzity gravitačního pole uvnitř a vně plné homogenní koule.



Obrázek 12.10: Závislost velikosti intenzity gravitačního pole uvnitř a vně plné homogenní koule v závislosti na vzdálenosti od jejího středu.

Kapitola 13

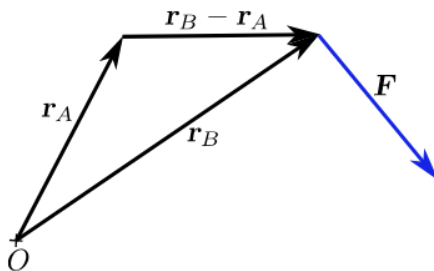
Pohyb hmotného bodu v centrálním silovém poli

13.1 Moment síly a moment hybnosti

Pro vyšetřování pohybu hmotného bodu v centrálním silovém poli si nejdříve zavedeme dvě fyzikální vektorové veličiny, které se však uplatní i v jiných partiích fyziky, které jsou součástí těchto studijních textů. První z nich se nazývá **moment síly** a značíme ho jako \mathbf{M} a je definován jako

$$\mathbf{M} = (\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A) \times \mathbf{F}. \quad (13.1)$$

Z definičního vztahu (13.1) vyplývá, že se jedná o moment síly, která působí v místě o polohovém vektoru \mathbf{r}_B , vzhledem k bodu o polohovém vektoru \mathbf{r}_A , viz obr. 13.1. V případě, že moment síly budeme uvažovat vzhledem k bodu ležícímu



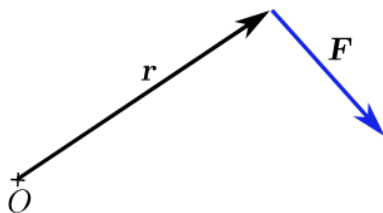
Obrázek 13.1: Vysvětlující obrázek k momentu síly, která působí v místě o polohovém vektoru \mathbf{r}_B , vzhledem k bodu o polohovém vektoru \mathbf{r}_A .

v počátku uvažované souřadnicové soustavy, bude $\mathbf{r}_A = \mathbf{0}$. Potom polohový vektor \mathbf{r}_B můžeme označit bez indexu, tj. $\mathbf{r}_B \equiv \mathbf{r}$ a moment síly bude v tomto případě dán následujícím vztahem (viz obr. 13.2)

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}. \quad (13.2)$$

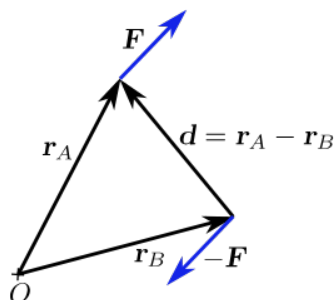
S momentem síly souvisí tzv. **moment silové dvojice** \mathbf{M}_D , který je dán součtem dvou momentů vzhledem k počátku dvou stejných, ale opačně orientovaných, sil působících v místech určených polohovými vektory \mathbf{r}_A a \mathbf{r}_B , viz obr. 13.3. Moment silové dvojice je dán následujícím vztahem:

$$\mathbf{M}_D = \mathbf{r}_A \times \mathbf{F} + \mathbf{r}_B \times (-\mathbf{F}) = (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B) \times \mathbf{F} = \mathbf{d} \times \mathbf{F}. \quad (13.3)$$



Obrázek 13.2: Vysvětlující obrázek k momentu síly, která působí v místě o polohovém vektoru \mathbf{r} , vzhledem k počátku.

Další veličinou, kterou si zavedeme bude tzv. **moment hybnosti** \mathbf{L} . V případě, že

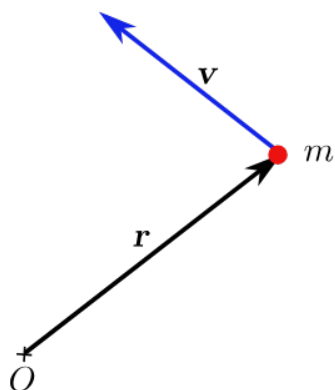


Obrázek 13.3: Vysvětlující obrázek k momentu silové dvojice.

moment hybnosti budeme uvažovat vzhledem k počátku, potom je dán následujícím vztahem¹

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}, \quad (13.4)$$

kde $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ je hybnost uvažovaného hmotného bodu, viz obr. 13.4.



Obrázek 13.4: Vysvětlující obrázek k momentu hybnosti vzhledem k počátku.

¹V případě, že by se jednalo o moment hybnosti vzhledem k obecnému bodu o polohovém vektoru \mathbf{r}_A , zavedli bychom ho analogickým způsobem jako v případě momentu síly (13.1).

13.2 Pohybové rovnice a konstanty pohybu hmotného bodu v centrálním silovém poli

Uvažujme hmotný bod o hmotnosti m , který se nachází v centrálním silovém poli (9.59), jehož silové centrum umístíme do počátku souřadnic. Moment síly v tomto případě určíme na základě vztahu (13.2) jako

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times f(r) \frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{f(r)}{r} (\mathbf{r} \times \mathbf{r}) = \mathbf{0}. \quad (13.5)$$

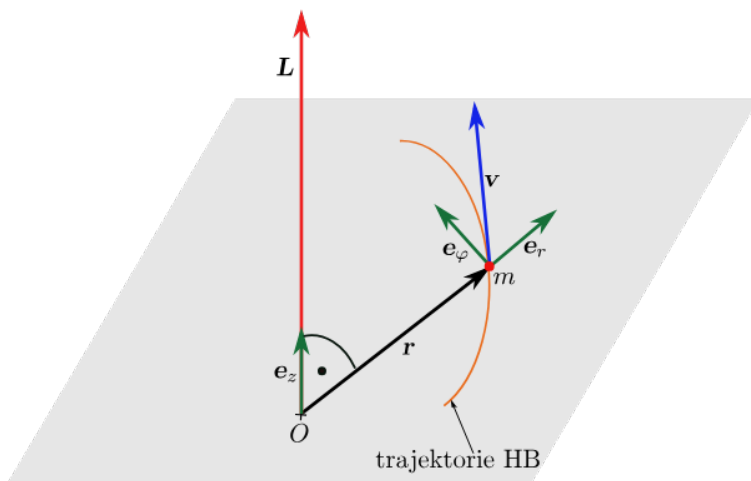
V další části textu budeme uvažovat pouze centrální silové pole neboli působení centrální (radiální) síly. Vyjdeme-li z výsledku (13.5), pak s ohledem na vztah (13.4) můžeme psát, že

$$\mathbf{0} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d(\overbrace{\mathbf{r} \times \mathbf{p}}^{=\mathbf{L}})}{dt} - \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{p} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} - \underbrace{\mathbf{v} \times m\mathbf{v}}_{=\mathbf{0}} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}. \quad (13.6)$$

Z výsledku (13.6) vyplývá, že

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{0} \quad \text{neboli} \quad \mathbf{L} = \text{konst.} \quad (13.7)$$

Rovnosti (13.7) nám vyjadřují skutečnost, že v centrálním silovém poli se moment hybnosti s časem nemění², tj. moment hybnosti se rovná konstantnímu vektoru³ $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} = \text{konst.}$. Z definice vektorového součinu vyplývá, že moment hybnosti \mathbf{L} je vždy kolmý současně k vektorům \mathbf{r} a \mathbf{v} , které leží v rovině, jež s časem nemění svoji pozici vůči zvolené vztažné souřadnicové soustavě, protože $\mathbf{L} = \text{konst.}$, viz obrázek 13.5. Vzhledem k tomuto závěru můžeme konstatovat, že



Obrázek 13.5: Rovinný pohyb v centrálním silovém poli.

pohyb hmotného bodu v centrálním silovém poli je nutně rovinný, tj. uvažovaný

²Tento závěr ale platí jen za předpokladu, že počátek souřadnic, vůči kterému jak moment hybnosti, tak moment síly určujeme, je totožný se silovým centrem.

³Vektor momentu hybnosti \mathbf{L} s časem nemění jak svojí velikost, tak svojí orientaci.

hmotný bod se pohybuje v rovině kolmé k momentu hybnosti $\mathbf{L} = \text{konst.}$, a tudíž k určení jeho polohy potřebujeme znát pouze dvě souřadnice. Jelikož centrální silové pole je sféricky symetrické, je proto přirozené k popisu rovinného pohybu hmotného bodu použít polární souřadnice $\rho \equiv |\mathbf{r}| \equiv r$ a φ v uvažované rovině. Polární souřadnice si zvolíme za zobecněné souřadnice, takže můžeme Lagrangeovu funkci \mathcal{L} pro uvažovaný hmotný bod napsat jako

$$\mathcal{L}(r, \dot{r}, \dot{\varphi}) = T - U = \frac{1}{2}m(v_r^2 + v_\varphi^2) - U(r) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - U(r). \quad (13.8)$$

Ve vztahu pro Lagrangeovu funkci (13.8) se vyskytuje potenciální energie $U(r)$, která je funkcí pouze vzdálenosti r od silového centra (počátku), což je dáno tím, že centrální silové pole je pole izotropní, tj. všechny směry od silového centra jsou si rovnocenné. Všimněme si, že potenciální energie není funkcí času, takže se vztahuje ke konzervativnímu silovému poli. Lagrangeovy rovnice 2. druhu pro uvažovaný hmotný bod, pak mají následující tvar

$$m\ddot{r} - mr\dot{\varphi}^2 = -\frac{dU(r)}{dr}, \quad (13.9)$$

$$\frac{d(mr^2\dot{\varphi})}{dt} = 0 \quad \text{neboli} \quad 2mr\dot{r}\dot{\varphi} + mr^2\ddot{\varphi} = 0. \quad (13.10)$$

Moment hybnosti \mathbf{L} je možné si vyjádřit pomocí polárních souřadnic, viz vztah (6.125), jako

$$\begin{aligned} \mathbf{L} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} &= mr\mathbf{e}_r \times (v_r\mathbf{e}_r + v_\varphi\mathbf{e}_\varphi) = mr v_r \underbrace{(\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_r)}_{=0} + mr v_\varphi \underbrace{(\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\varphi)}_{=\mathbf{e}_z} = \\ &= mr v_\varphi \mathbf{e}_z = mr^2\dot{\varphi}\mathbf{e}_z = \text{konst.} \end{aligned} \quad (13.11)$$

Na základě rovnosti (13.11) tedy můžeme psát, že

$$L_z = L = mr^2\dot{\varphi} = \text{konst.} \quad (13.12)$$

S ohledem na Lagrangeovu funkci (13.8) můžeme konstatovat, že souřadnice φ je cyklickou souřadnicí, takže veličina $\partial\mathcal{L}/\partial\dot{\varphi}$ představuje integrál pohybu, tedy

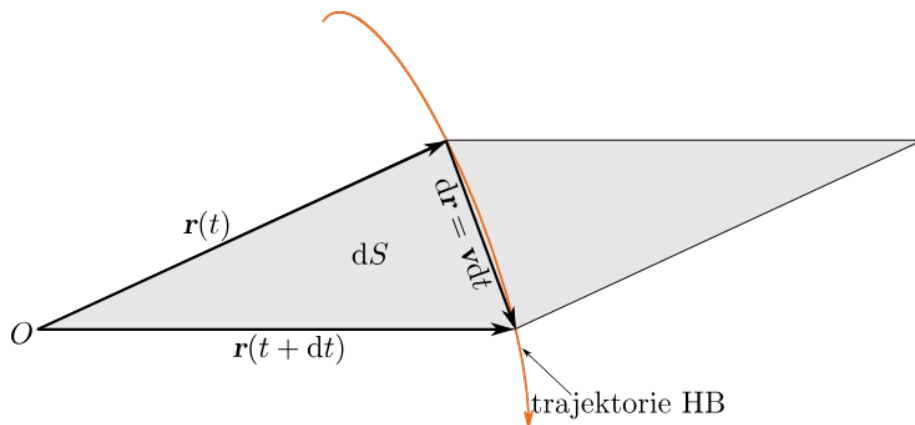
$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi} = L_z = L = \text{konst.}, \quad (13.13)$$

což se shoduje s výsledkem (13.12).

Jelikož Lagrangeova funkce (13.8) nezávisí explicitně na čase, tak se zachovává zobecněná energie \mathcal{E} , která je v tomto případě rovna celkové mechanické energii $E = T + U$, tedy

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + U(r) = \text{konst.} \quad (13.14)$$

Pro geometrické vyjádření zákona zachování momentu hybnosti (13.7) vyjdeme z obrázku 13.6. Využijeme skutečnosti, že velikost vektorového součinu je rovna velikosti plochy rovnoběžníku, jehož délky stran jsou shodné s velikostmi vektorů, mezi kterými se uskutečňuje vektorový součin. V našem případě jsou těmito



Obrázek 13.6: Geometrické vyjádření zákona zachování momentu hybnosti.

vektory $\mathbf{r}(t)$ a $\mathbf{r}(t + dt)$. Plocha odpovídajícího rovnoběžníku je na obrázku 13.6 vybarvena šedě. Zajímáme se o velikost plochy dS , kterou opíše polohový vektor (průvodič) \mathbf{r} za čas dt . V případě, že se jedná o infinitezimální časový interval, pak plocha opsaná polohovým vektorem odpovídá polovině plochy zmiňovaného rovnoběžníku. Takže pro plochu opsanou polohovým vektorem \mathbf{r} za infinitezimální časový interval dt můžeme psát

$$dS = \frac{1}{2} |\mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}(t + dt)| = \frac{1}{2} |\mathbf{r}(t) \times (\mathbf{r}(t) + d\mathbf{r})| = \frac{1}{2} |\underbrace{\mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}(t)}_{=0} + \mathbf{r}(t) \times d\mathbf{r}| =$$

$$\frac{1}{2} |\mathbf{r}(t) \times d\mathbf{r}| = \frac{1}{2} |\mathbf{r} \times \mathbf{v} dt| = \frac{1}{2} |\mathbf{r}(t) \times \mathbf{v}(t)| dt = \frac{|\mathbf{r}(t) \times m\mathbf{v}(t)|}{2m} dt = \frac{|\mathbf{L}|}{2m} dt = \frac{L}{2m} dt.$$

(13.15)

Přímo z výsledného výrazu (13.15) je možné vyjádřit časovou změnu velikosti plochy (velikost plošné rychlosti) opsané polohovým vektorem uvažovaného hmotného bodu, který se pohybuje v centrálním silovém poli jako

$$w = \frac{dS}{dt} = \frac{L}{2m} = konst. \quad (13.16)$$

Protože jak velikost momentu hybnosti, tak hmotnost uvažovaného hmotného bodu, jsou konstantní, je konstantní i plošná rychlost w neboli můžeme konstatovat, že *v centrálním silovém poli je velikost plošné rychlosti konstantní*.

Místo toho, abychom řešili pohybové rovnice (13.9) a (13.10) je možné, bez újmy na obecnosti, řešit pouze integrály pohybu (13.13) a (13.14), což jsou obyčejné diferenciální rovnice 1. řádu, které obsahují konstanty L a E pro hledané funkce $r = r(t)$ a $\varphi = \varphi(t)$.

13.3 Rovnice trajektorie hmotného bodu v centrálním silovém poli

Při hledání tvaru trajektorie hmotného bodu v centrálním silovém poli $r = r(\varphi)$ můžeme postupovat následujícím způsobem.

Zavedeme si proměnnou u , která představuje inverzní radiální vzdálenost, tj.

$$u = \frac{1}{r} \quad (13.17)$$

a upravíme si vztah (13.12) do následujícího tvaru:

$$\dot{\varphi} = \frac{L}{mr^2} . \quad (13.18)$$

Nyní provedeme časovou derivaci radiální vzdálenosti r s tím, že použijeme vztahy (13.17) a (13.18), čímž dostaneme:

$$\dot{r} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{u(\varphi(t))} \right) = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\varphi} \dot{\varphi} = -r^2 \frac{du}{d\varphi} \frac{L}{mr^2} = -\frac{L}{m} \frac{du}{d\varphi} . \quad (13.19)$$

Rovnici (13.14) upravíme do následujícího tvaru:

$$\dot{r}^2 = \frac{2}{m} \left[E - \left(U(r) + \frac{L^2}{2mr^2} \right) \right] . \quad (13.20)$$

Dosadíme do rovnice (13.20) za radiální rychlost \dot{r} ze vztahu (13.19), přičemž použijeme rovnosti (13.17):

$$\left(\frac{L}{m} \frac{du}{d\varphi} \right)^2 = \frac{2}{m} \left[E - \left(U(u) + \frac{L^2 u^2}{2m} \right) \right] . \quad (13.21)$$

Následnou úpravou rovnice (13.21) dostaneme, že

$$\frac{L^2}{m^2} \left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 + \frac{L^2}{m^2} u^2 = \frac{2}{m} [E - U(u)] . \quad (13.22)$$

Derivací rovnice⁴ (13.22) podle proměnné φ a vynásobením $m^2/(2L)^2$ dospějeme k následující rovnici

$$\frac{du}{d\varphi} \frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u \frac{du}{d\varphi} = -\frac{m}{L^2} \frac{dU}{du} \frac{du}{d\varphi} . \quad (13.23)$$

Budeme-li dále předpokládat, že $(du/d\varphi) \neq 0$, pak je možné rovnici (13.23) tímto faktorem vydělit, čímž tato rovnice přejde do následujícího tvaru

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = -\frac{m}{L^2} \frac{dU}{du} . \quad (13.24)$$

Rovnice (13.24) se nazývá **Binetův vzorec**. V případě, že máme zadánu konkrétní funkci potenciální energie $U(r(u))$, pak z Binetova vzorce získáme nehomogenní obyčejnou diferenciální rovnici, jejímž řešením dostaneme funkci $u(\varphi)$. Inverzí této funkce obdržíme funkci $r(\varphi) = 1/u(\varphi)$, která popisuje tvar trajektorie uvažovaného hmotného bodu v centrálním silovém poli.

⁴Při provádění derivace je nutné si uvědomit, že celková mechanická energie E je konstanta a dále, že proměnná u je funkcí polární souřadnice φ , tj. $u = u(\varphi)$.

13.3.1 Keplerova úloha

Významným případem pohybu v centrálním silovém poli je pohyb planet či jiných astronomických objektů, které se pohybují v gravitačním poli Slunce.

Předpokládejme, že Slunce má hmotnost M a jeho potenciální energie je dána vztahem

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r}, \quad \alpha = \kappa Mm > 0, \quad (13.25)$$

kde m je hmotnost uvažovaného hmotného bodu (planety) ($m \ll M$) a κ je gravitační konstanta. Použijeme-li proměnnou u danou vztahem (13.17) potom na základě rovnosti (13.25) můžeme psát, že

$$U(u) = -\alpha u. \quad (13.26)$$

Odtud dostáváme, že

$$\frac{dU}{du} = -\alpha. \quad (13.27)$$

S ohledem na vztah (13.27) je možné vyjádřit Binetův vzorec (13.24) jako

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{\alpha m}{L^2}. \quad (13.28)$$

Rovnice (13.28) představuje lineární diferenciální rovnici s konstantní pravou stranou. Kompletní řešení této diferenciální rovnice obdržíme součtem obecného řešení u_H homogenní rovnice

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = 0 \quad (13.29)$$

a partikulárního řešení u_P rovnice (13.28). Obecné řešení homogenní rovnice je dáno výrazem:

$$u_H = A \cos \varphi + B \sin \varphi, \quad (13.30)$$

které může být přepsáno do následujícího tvaru:

$$u_H = C \cos(\varphi - \varphi_0), \quad (13.31)$$

kde $A = C \cos \varphi_0$, $B = C \sin \varphi_0$.

Partikulárním řešením rovnice (13.28) je zjevně

$$u_P = \frac{\alpha m}{L^2}. \quad (13.32)$$

Takže kompletní řešení diferenciální rovnice (13.28) je dáno následujícím vztahem

$$u = u_H + u_P = C \cos(\varphi - \varphi_0) + \frac{\alpha m}{L^2}. \quad (13.33)$$

Jelikož si můžeme souřadnicovou soustavu zvolit tak, aby počáteční fáze φ_0 byla nulová, tak bez újmy na obecnosti ji v řešení (13.33) položíme rovnu nule, čímž dostaneme, že

$$u = \frac{1}{r} = C \cos \varphi + \frac{\alpha m}{L^2}. \quad (13.34)$$

Úpravou toho řešení dostáváme

$$\frac{1}{r} = \frac{\alpha m}{L^2} (1 + \varepsilon \cos \varphi), \quad (13.35)$$

kde ε je nová konstanta nahrazující původní konstantu C . Následnou další úpravou dostaneme následující rovnici:

$$\frac{p}{r} = 1 + \varepsilon \cos \varphi, \quad (13.36)$$

která je rovnicí kuželosečky v polárních souřadnicích a představuje hledanou rovnici trajektorie HB. Konstantu ε nazýváme **numerická excentricita** (**numerická výstřednost**) a konstanta

$$p = \frac{L^2}{\alpha m} \quad (13.37)$$

se nazývá **parametr kuželosečky**.

V následující části textu si ukážeme, jak souvisí hodnota numerické excentricity ε s konstantami pohybu vztahující se k danému hmotnému bodu (planetě).

Vyjádříme-li řešení (13.36) opět pomocí proměnné u , pak dostáváme, že

$$u = \frac{1 + \varepsilon \cos \varphi}{p} \quad (13.38)$$

Derivací řešení (13.38) podle proměnné φ obdržíme

$$\frac{du}{d\varphi} = -\frac{\varepsilon}{p} \sin \varphi. \quad (13.39)$$

Dosazením výrazů (13.26), (13.38) a (13.39) do rovnice (13.22) dospějeme k následující rovnosti

$$\frac{L^2}{m^2 p^2} (\varepsilon^2 \sin^2 \varphi + 1 + 2\varepsilon \cos \varphi + \varepsilon^2 \cos^2 \varphi) = \frac{2}{m} (E + \alpha u) = \frac{2}{m} \left[E + \frac{\alpha}{p} (1 + \varepsilon \cos \varphi) \right]. \quad (13.40)$$

Uplatněním identity $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$ upravíme levou stranu rovnosti (13.41), čímž dostaneme

$$\frac{L^2}{m^2 p^2} (\varepsilon^2 + 1 + 2\varepsilon \cos \varphi) = \frac{2}{m} \left[E + \frac{\alpha}{p} (1 + \varepsilon \cos \varphi) \right]. \quad (13.41)$$

Vynásobíme rovnici (13.41) výrazem $m^2 p^2 / L^2$, přičemž využijeme rovnost (13.37), a následnou úpravou dospějeme k následující rovnici

$$\varepsilon^2 + 1 + 2\varepsilon \cos \varphi = \frac{2L^2}{\alpha^2 m} E + 2(1 + \varepsilon \cos \varphi). \quad (13.42)$$

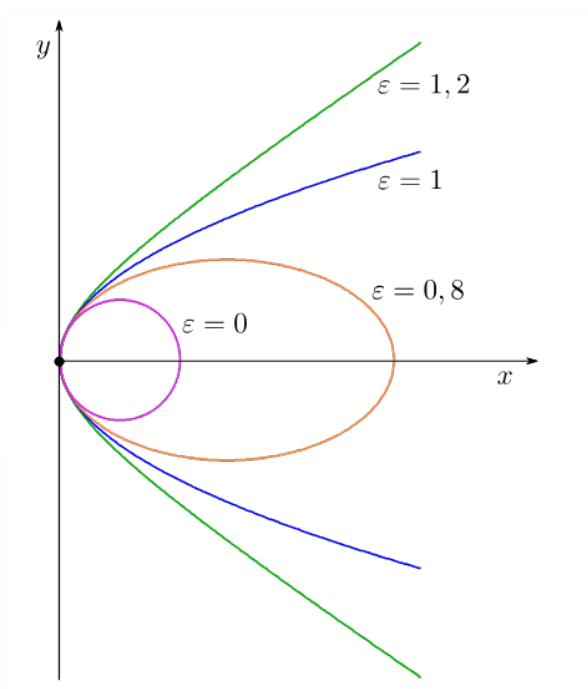
Odtud pak můžeme psát, že

$$\varepsilon^2 = 1 + \frac{2L^2}{\alpha^2 m} E. \quad (13.43)$$

Vztah určuje zavedenou integrační konstantu (numerickou excentricitu) ε .

V závislosti na hodnotě numerické excentricity ε , jejíž hodnota je ovlivněna velikostí celkové mechanické energie E uvažovaného hmotného bodu dle vztahu (13.43), popisuje vztah (13.36) následující kuželosečky:

1. $\varepsilon = 0 \implies E = E_{min} = -\alpha^2 m / (2L^2) < 0 \implies$ kružnice⁵,
2. $0 < \varepsilon < 1 \implies E = (\varepsilon^2 - 1)\alpha^2 m / (2L^2) < 0 \implies$ elipsa,
3. $\varepsilon = 1 \implies E = 0 \implies$ parabola,
4. $\varepsilon > 1 \implies E = (\varepsilon^2 - 1)\alpha^2 m / (2L^2) > 0 \implies$ hyperbola.



Obrázek 13.7: Kuželosečky v závislosti na excentricitě ε .

Z výše vedeného vyplývá, že pohyb planety (hmotného bodu) po parabole či hyperbole znamená, že se daná planeta jednou přiblíží ke Slunci (silovému centru, resp. ohnisku) a pak se bude od něho jen vzdalovat, tj. má dostatečnou energii na to, aby se vymanila z gravitačního potenciálu Slunce. Avšak dle pozorování se planety naší sluneční soustavy periodicky přibližují ke Slunci, musí být nutně jejich celková mechanická energie záporná ($E < 0$) neboli $\varepsilon < 1$, tedy planety obíhají po eliptických orbitách (trajektoriích). Abychom mohli formulovat další závěry, je nutné si na tomto místě připomenout některé ze základních vlastností elipsy.

⁵Vyjádření hodnoty minimální celkové mechanické energie E_{min} dostaneme přímo ze vztahu (13.43), kam dosadíme $\varepsilon = 0$.

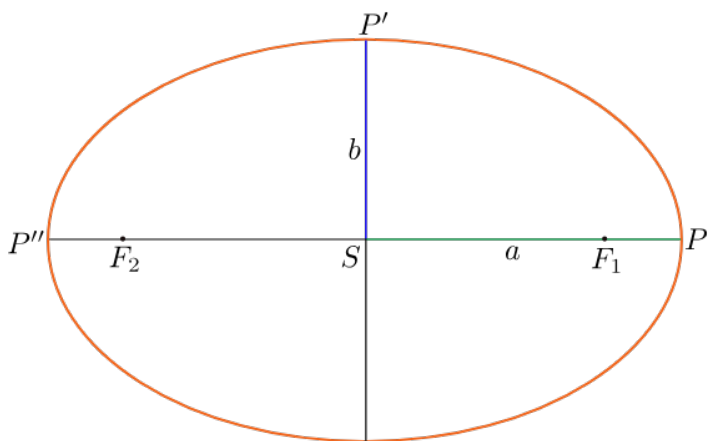
Planimetrická definice elipsy

Elipsou rozumíme množinu všech bodů P v rovině, které mají konstantní součet vzdáleností od dvou pevně zadaných bodů F_1, F_2 , tj.

$$|PF_1| + |PF_2| = konst. , \quad (13.44)$$

kde body F_1, F_2 se nazývají ohniska.

Na obr. 13.8 je zachycena elipsa. Úsečka $|SP| = a$ představuje délku hlavní poloosy a úsečka $|SP'| = b$ představuje délku vedlejší poloosy elipsy. Na obr. 13.8



Obrázek 13.8: Elipsa s vyznačenými poloosami a, b a ohnisky F_1, F_2 .

je zvolen bod P a s jeho pomocí určíme velikost konstanty v definičním vztahu (13.44). Jak z tohoto obrázku vidíme, že $|PF_1| = |P''F_2|$, tak musí platit:

$$konst. = |PF_1| + |PF_2| = |PF_1| + a + a - |P''F_2| = |PF_1| + 2a - |PF_1| = 2a . \quad (13.45)$$

Tedy můžeme odtud za konstantu dosadit do vztahu (13.44) a bude platit, že

$$|PF_1| + |PF_2| = 2a . \quad (13.46)$$

Na obr. 13.9 vidíme bod P nacházející se na jiném místě elipsy, než tomu bylo na předchozím obrázku. Vidíme, že pro rovnoramenný trojúhelník F_2F_1P na základě vztahu (13.46) musí platit:

$$|PF_1| + |PF_2| = r + r' = 2a \Rightarrow r' = a , \quad r = a . \quad (13.47)$$

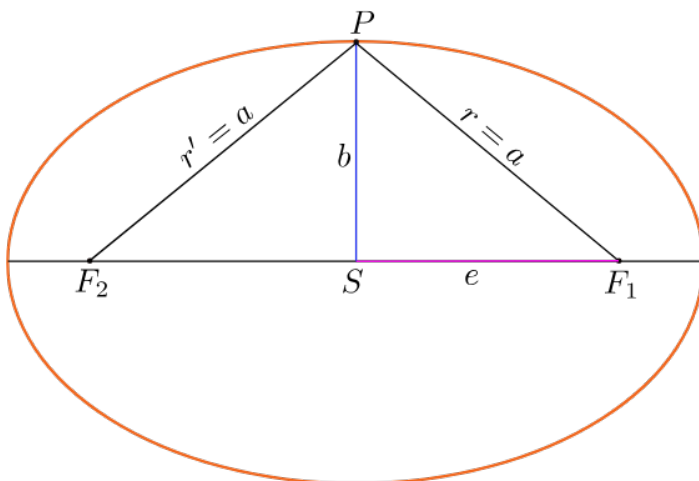
Z tohoto obrázku použitím Pythagorovy věty dostáváme:

$$e^2 + b^2 = a^2 , \quad (13.48)$$

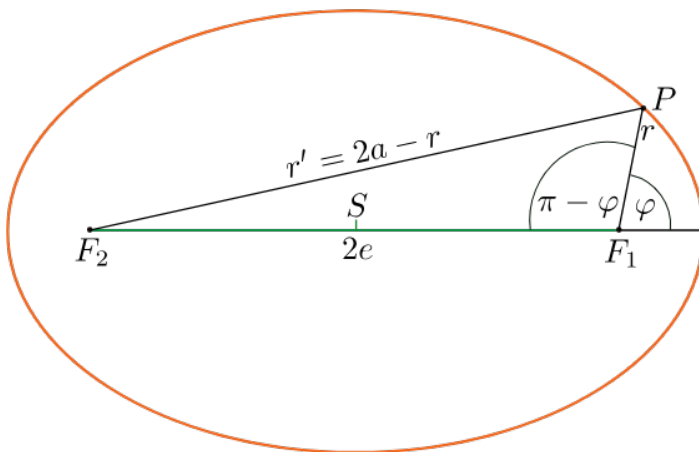
kde délka úsečky $|SF_1| = |SF_2| = e$ se nazývá **numerická excentricita** (**numerická výstřednost**).

Na obr. 13.10 vidíme bod P nacházející se opět na jiném místě elipsy, než tomu bylo na předchozím obrázku. Na základě vztahu (13.46) musí platit:

$$|PF_1| + |PF_2| = r' + r = 2a \Rightarrow r' = 2a - r . \quad (13.49)$$



Obrázek 13.9: Situační obrázek.



Obrázek 13.10: Situační obrázek k nalezení rovnice elipsy v polárních souřadnicích na základě planimetrické definice.

Pro trojúhelník F_2F_1P použijeme kosinovou větu:

$$(2a - r)^2 = 4e^2 + r^2 - 4er \cos(\pi - \varphi), \quad (13.50)$$

tedy

$$4a^2 - 4ar + r^2 = 4e^2 + r^2 - 4er \cos(\pi - \varphi). \quad (13.51)$$

Tuto rovnici podělíme číslem 4 a za a^2 dosadíme ze vztahu (13.48), takže po úpravě dostáváme:

$$e^2 + b^2 - ar = e^2 + er \cos \varphi. \quad (13.52)$$

Odtud

$$b^2 = ar \left(1 + \frac{e}{a} \cos \varphi \right). \quad (13.53)$$

Provedeme konečnou úpravu, která vede na hledanou rovnici elipsy v polárních souřadnicích

$$\frac{b^2}{a} = 1 + \frac{e}{a} \cos \varphi. \quad (13.54)$$

Porovnáním s rovnicí (13.36) je zřejmé, že

$$\varepsilon = \frac{e}{a} \quad (13.55)$$

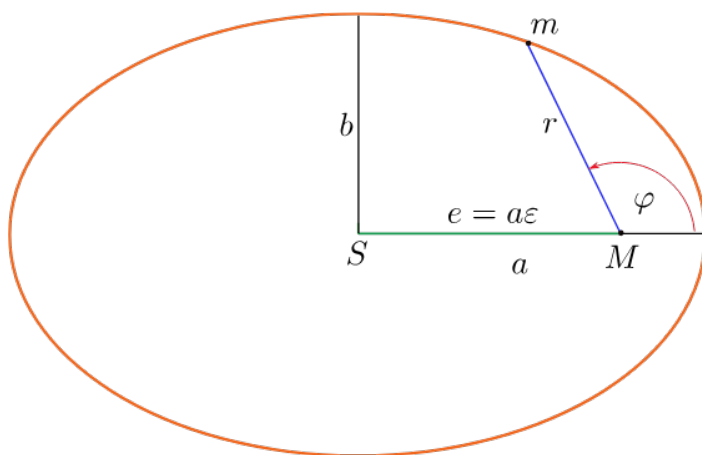
a

$$p = \frac{b^2}{a} . \quad (13.56)$$

Z tohoto vztahu je vidět, že parametr p souvisí s velikostí elipsy, a že numerická excentricita nám říká, jak hodně se elipsa liší od kružnice. Rovněž pro elipsu zřejmě platí, že $a > e$, $e > 0$, a tedy $0 < e/a = \varepsilon < 1$.

Na obr. 13.11 je zachycen HB o hmotnosti m pohybující se po elipse v gravitačním silovém centru ležícím v ohnisku F_1 o hmotnosti M .

Na obrázku 13.12 jsou zachycena významná místa při obíhání hmotného bodu



Obrázek 13.11: Elipsa s hlavní poloosou a a vedlejší poloosou b a numerickou excentricitou (výstředností) $e = \varepsilon a$ spolu s polárními souřadnicemi r , φ uvažovaného hmotného bodu (planety) o hmotnosti m nacházejícího se v centrálním gravitačním poli hmotného bodu (Slunce) o hmotnosti M .

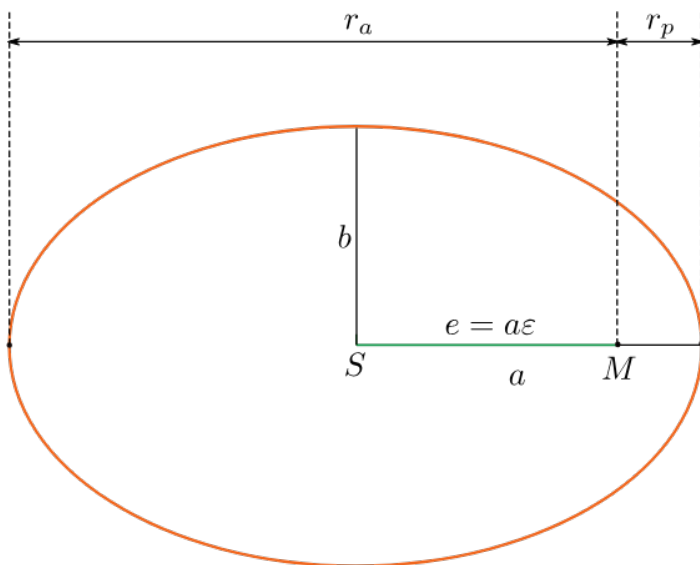
kolem silového centra. Jedním z těchto míst je tzv. **pericentrum**, které v případě, že silovým centrem je Slunce, má název **perihelium** (přísluní). Je-li tímto silovým centrem Země, pak se nazývá **perigeum**. Pericentrem je bod na elipse, kterému odpovídá souřadnice $\varphi = 0$, tedy se jedná o bod elipsy, který se nachází nejbližší silového centra. Vzdálenost tohoto bodu od silového centra získáme ze vztahu (13.36) po dosazení $\varphi = 0$, tj.

$$r_p = \frac{p}{1 + \varepsilon} . \quad (13.57)$$

Podle obrázku 13.12 můžeme rovněž psát, že

$$r_p = a - e . \quad (13.58)$$

Dalším významným místem je bod elipsy, který je nejvíce vzdálen od silového centra a odpovídá mu souřadnice $\varphi = \pi$. Tento bod se nazývá **apocentrum**. Je-li silovým centrem Slunce, pak se tento bod nazývá **afelium** (odsluní), je-li silovým centrem Země, pak se nazývá **apogeum**. Vzdálenost tohoto bodu od silového centra



Obrázek 13.12: Vzdálenost pericentra a apocentra od silového centra.

získáme opět dosazením do vztahu (13.36) pro $\varphi = \pi$, tj. získáme ze vztahu (13.36) po dosazení $\varphi = 0$, tj.

$$r_a = \frac{p}{1 - \varepsilon} . \quad (13.59)$$

Podle obrázku 13.12 můžeme rovněž psát, že

$$r_a = a + e . \quad (13.60)$$

Dáme-li do rovnosti pravé strany⁶ výrazů (13.57) a (13.58), pak dostaneme

$$\frac{p}{1 + \varepsilon} = a - e = a - a\varepsilon = a(1 - \varepsilon) . \quad (13.61)$$

Ze vztahu (13.48) si můžeme vyjádřit čemu se rovná kvadrát vedlejší poloosy:

$$b^2 = a^2 - e^2 = a^2 - a^2\varepsilon^2 = a^2(1 - \varepsilon^2) . \quad (13.62)$$

S pomocí vztahu (13.62) si můžeme vyjádřit parametr kuželosečky ze vztahu (13.61) jako

$$p = a(1 - \varepsilon^2) = \frac{b^2}{a} . \quad (13.63)$$

Dosadíme-li do nalezeného vztahu (13.63) výrazy (13.37) a (13.43), pak můžeme vyjádřit velikost velké poloosy jako

$$a = -\frac{\alpha}{2E} = \frac{\alpha}{2|E|} . \quad (13.64)$$

Ve vztahu (13.64) byla při úpravě vzata do úvahy skutečnost, že při pohybu po elipse je $E < 0$. Z tohoto vztahu je vidět, jak velikost velké poloosy a závisí jen na celkové mechanické energii obíhajícího hmotného bodu a ne na momentu hybnosti. Pomocí vztahu pro plošnou rychlost (13.16) je možné vyjádřit plochu elipsy, kterou

⁶Podobně bychom mohli použít pravých stran rovností (13.59) a (13.60).

opíše polohový vektor hmotného bodu (planety), pomocí doby jeho oběhu T_o následujícím způsobem:

$$S = \int_0^{T_o} w dt = \int_0^{T_o} \frac{L}{2m} dt = \frac{L}{2m} \int_0^{T_o} dt = \frac{LT_o}{2m} . \quad (13.65)$$

Plochu této elipsy je možné vyjádřit i pomocí jejích poloos pomocí známého vzorce:

$$S = \pi ab . \quad (13.66)$$

Dáme-li vztahy (13.65) a (13.66) do rovnosti, můžeme si vyjádřit dobu oběhu hmotného bodu (planety) kolem silového centra (Slunce) jako

$$T_o = \frac{2\pi mab}{L} . \quad (13.67)$$

Umocníme vztah (13.67) na kvadrát:

$$T_o^2 = \frac{4\pi^2 m^2 a^2 b^2}{L^2} . \quad (13.68)$$

Pro další úpravu použijeme vztah (13.56)

$$T_o^2 = \frac{4\pi^2 m^2 pa^3}{L^2} . \quad (13.69)$$

K další úpravě rovnosti (13.69) použijeme vztahu (13.37)

$$T_o^2 = \frac{4\pi^2 ma^3}{\alpha} . \quad (13.70)$$

Dosadíme-li do tohoto vztahu za $\alpha = \varkappa m M$ (viz rovnost (13.25)), pak po následné úpravě dospějeme ke vztahu

$$\frac{T_o^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\varkappa M} = konst. . \quad (13.71)$$

Z výsledného vztahu (13.71) vyplývá, že podíl druhé mocniny oběžné doby hmotného bodu (planety) kolem silového centra (Slunce) a třetí mocniny délky hlavní poloosy jeho eliptické dráhy je konstantní. Pomocí vztahu (13.71) je možné určit hmotnost silového centra (Slunce).

Jestliže řešíme Keplerovu úlohu za účelem vyšetření pohybu planet naší sluneční soustavy, tak je nutné si uvědomit, že jsme se dopustili celé řady zjednodušení, takže jsme nevzali v úvahu např.:

- Slunce i uvažované planety jsou nepravidelná nehomogenní tělesa, tudíž není možné, striktně vzato, je nahradit hmotným bodem;
- Slunce i ostatní planety rotují kolem vlastních os;
- planety sluneční soustavy gravitačně působí na jiné planety;
- planety díky své hmotnosti způsobují, že silové centrum se nenachází ve středu Slunce, ale v místě společného těžiště;

- u planet s výstřednou trajektorií (protažená elipsa) se projevují relativistické efekty (např. stáčení perihelia Merkuru);
- ...

S ohledem na výše uvedené skutečnosti můžeme předpokládat, že lze závěry z řešení Keplerovy úlohy s dostatečnou přesností aplikovat na naši sluneční soustavu, což je dáno tím, že hmotnost Slunce (cca $2 \cdot 10^{30}$ kg) je podstatně větší než hmotnost planet sluneční soustavy (např. hmotnost Země je cca $6 \cdot 10^{24}$ kg). Ve výše uvedeném textu byly formulovány závěry, ke kterým dospěl Johannes Kepler, když se zabýval vyšetřováním pohybu planet naší sluneční soustavy kolem Slunce. Závěry, ke kterým dospěl J. Kepler se nazývají **Keplerovy zákony**, které je možné formulovat následujícím způsobem:

Keplerovy zákony

1. Planety se pohybují po elipsách kolem Slunce, které se nachází v jejich společném ohnisku.
2. Plocha průvodiče planet opsaná za jednotku času je konstantní.
3. Podíl kvadrátu oběžné doby planety kolem Slunce a třetí mocniny délky velké poloosy jí příslušné elipsy je roven konstantě, která je pro všechny planety sluneční soustavy stejná.

13.4 Kvalitativní analýza pohybu v centrálním silovém poli pomocí efektivní potenciální energie

Zavedeme si pomocnou veličinu **efektivní potenciální energie** následujícím způsobem:

$$U_{ef}(r) = U(r) + \frac{L^2}{2mr^2} . \quad (13.72)$$

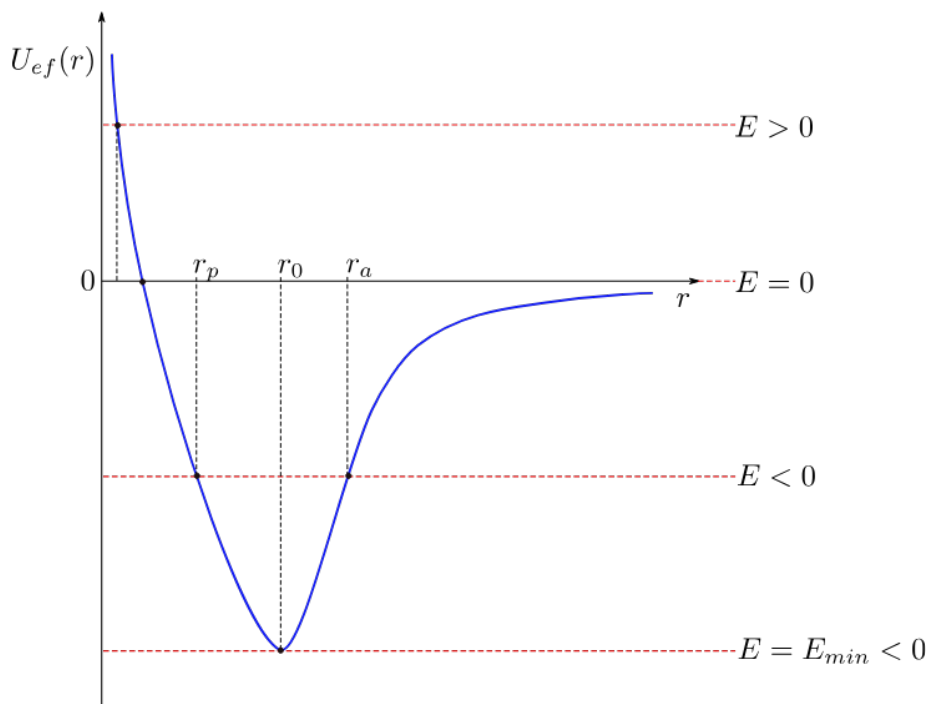
Pomocí efektivní potenciální energie je možné přepsat vztah (13.20) do následujícího tvaru:

$$\dot{r}^2 = \frac{2}{m} [E - U_{ef}(r)] . \quad (13.73)$$

Abychom ze vztahu (13.73) mohli vyjádřit druhou odmocninou rychlost hmotného bodu (planety) v radiálním směru \dot{r} , musí platit, že pravá strana vztahu (13.73) je nezáporná, což je zajištěno následující podmínkou:

$$E \geq U_{ef}(r) , \quad (13.74)$$

neboli pohyb je možný jen pro takové radiální vzdálenosti od silového centra r , pro které je splněna podmínka (13.74). Tuto podmínku lze poměrně snadno analyzovat graficky, když si pro daný moment hybnosti L vykreslíme průběh efektivní potenciální energie $U_{ef}(r)$. Pro případ gravitačního pole, je průběh efektivní potenciální energie zachycen na obrázku 13.13. Pod grafem funkce $U_{ef}(r)$ se nachází



Obrázek 13.13: Průběh efektivní potenciální energie $U_{ef}(r)$ a hladiny celkové mechanické energie E hmotného bodu (planety).

zakázaná oblast, kam se nemůže hmotný bod (planeta) dostat, protože by byla porušena podmínka (13.74). Na obrázku 13.13 jsou přerušovanou čarou zachyceny hladiny celkové mechanické energie uvažovaných hmotných bodů. Připomeňme, že platí $E = konst.$ pro všechna r . Průsečíky přímek reprezentujících danou hladinu E s grafem efektivní potenciální energie představují body obratu. Pro body obratu platí, že $E = U_{ef}$, takže na základě rovnosti (13.73) platí, že v těchto bodech je radiální rychlost nulová $\dot{r} = 0$. Nulová hodnota radiální rychlosti nám říká, že se hmotný bod (planeta) v daném místě zastaví a začne se následně buď vzdalovat od silového centra nebo přibližovat k silovému centru. Z obrázku 13.13 je patrné, že pro případ $E < 0$ se jedná o konečný (finitní) pohyb příslušného hmotného bodu, tj. hmotný bod se pohybuje v potenciálové jámě mezi radiálními vzdálenostmi r_p a r_a a **opakovaně** se vzdaluje a přibližuje vzhledem k silovému centru, avšak obecně nemusí být trajektorie HB uzavřená, byť se jedná o pohyb finitní. V případě gravitačního pole tomuto případu odpovídá pohyb hmotného bodu (planety) po elipse (uzavřená trajektorie), což souvisí s **Bertrandovým teorémem**.

Bertrandův teorém

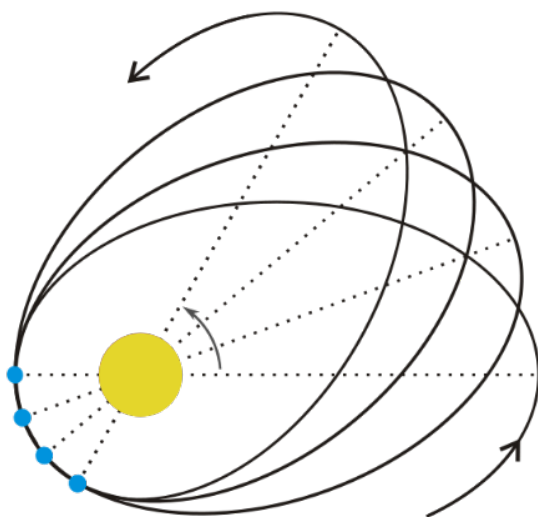
Pouze potenciální energie $U \sim 1/r$ a $U \sim r^2$ vedou na uzavřené periodické trajektorie.

Z obrázku je dále vidět, že pro $E \geq 0$ existuje pouze jeden bod obratu, takže pohyb vyšetřovaného hmotného bodu je neomezený (infinitní). Pro energii $E = 0$ je trajektorií pohybu parabola a pro energii $E > 0$ je trajektorií hyperbola.

Zvláštní případ nastává pro celkovou mechanickou energii, která se rovná minimu efektivní potenciální energie. V tomto případě si zachovává hmotný bod konstantní vzdálenost od jeho silového centra, která je v obrázku označena jako r_0 . Tedy v případě, že $E = E_{min}$ se hmotný bod pohybuje kolem svého silového centra po kružnici. Chceme-li najít hodnotu poloměru této kružnice r_0 , potom do vztahu pro rovnici kuželosečky v polárních souřadnicích (13.36) dosadíme za excentricitu $\varepsilon = 0$, čímž dostaneme:

$$r_0 = p . \quad (13.75)$$

Když není splněn Bertrandův teorém, tak pohyb tělesa je sice finitní pro $E < 0$, avšak neděje se po uzavřené trajektorii (elipsa). Astronomická pozorování ukazují na skutečnost, že dochází ke stáčení perihelia Merkuru, viz obr. 13.14, které však nelze přesně vysvětlit pomocí Newtonovy teorie gravitace i při započítání vlivu zbývajících planet sluneční soustavy. Teprve pomocí Einsteinovy obecné teorie lze uspokojivě vysvětlit tento jev. Každopádně pozorování stáčení perihelia Merkuru je ukázkou toho, že není přesně splněn Bertrandův teorém, takže pohyb Merkuru je sice finitní, ale pohybuje se po neuzavřené dráze. Uvažujeme-li případ pohybu



Obrázek 13.14: Stáčení perihelia Merkuru (modře) obíhajícího kolem Slunce (žlutě).

po kruhové dráze ($\varepsilon = 0$, $E = E_{min} < 0$), potom poloměr této dráhy je dán již výše zmíněným vztahem (13.75), který doplníme pomocí vztahu pro parametr kuželosečky (13.37):

$$r_0 = p = \frac{L^2}{\alpha m} . \quad (13.76)$$

Protože rychlost v HB o hmotnosti m po kruhové dráze je konstantní, tak lze vyjádřit velikost momentu hybnosti (víme, že vektor rychlosti HB je kolmý k polohovému vektoru při pohybu po kružnici):

$$L = |\mathbf{r} \times m\mathbf{v}| = mvr_0 . \quad (13.77)$$

Dosazením do vztahu (13.76) a uvážením, že $\alpha = \kappa m M$ dostaneme:

$$r_0 = \frac{L^2}{\alpha m} = \frac{\kappa^2 v^2 r_0^2}{\kappa \kappa^2 M} = \frac{v^2 r_0^2}{\kappa M} . \quad (13.78)$$

Odtud

$$v = \sqrt{\frac{\kappa M}{r_0}} , \quad (13.79)$$

což je rychlost HB pohybující se kolem silového centra o hmotnosti M po kružnici o poloměru r_0 .

V případě, že gravitačním silovým centrem je planeta Země o přibližné hmotnosti $M_z = 5,972 \cdot 10^{24}$ kg a HB (např. satelit) se pohybuje po kruhové dráze těsně na Zemi, jejíž poloměr je $R_z = 6378$ km (Zemi považujeme za homogenní kouli), pak rychlost HB je:

$$v_1 = \sqrt{\frac{\kappa M_z}{R_z}} \approx 7,905 \text{ kms}^{-1} . \quad (13.80)$$

Rychlost v_1 se nazývá **1. kosmická rychlost**.

Pozn.: Při výpočtu jsme neuvažovali existenci atmosféry Země.

Reálné satelity musí obíhat kolem Země nad její atmosférou (výše než 200 km).

Označme výšku satelitu nad Zemí jako H , potom potřebná kruhová rychlost je:

$$v_k = \sqrt{\frac{\kappa M_z}{r_0}} = \sqrt{\frac{\kappa M_z}{R_z + H}} < v_1 \quad \text{pro } H > 0 . \quad (13.81)$$

V případě, že chceme vyslat HB (kosmická sonda) mimo dosah gravitačního působení planety Země, musíme mu udělit rychlost, kterou nazýváme **2. kosmická rychlost** a označíme ji v_2 . Jedná se o nejmenší rychlost, která umožní HB odletět nekonečně daleko od Země. V takovém případě se HB bude pohybovat po dráze, kterou je parabola. V takovém případě musí platit, že celková mechanická energie $E = T + U = 0$, tj. musí platit:

$$E = 0 = \frac{1}{2} \kappa v_2^2 - \kappa \frac{M_z}{R_z} . \quad (13.82)$$

Odtud

$$v_2 = \sqrt{2\kappa \frac{M_z}{R_z}} = \sqrt{2} v_1 \approx 11,180 \text{ kms}^{-1} . \quad (13.83)$$

2. kosmická rychlost se také nazývá **úniková rychlost**.

Příklad 13.4.1

Doba oběhu planety Země kolem Slunce $T_o = 365,2564$ dnů. Nejbližší vzdálenost Země ke Slunci je při jejím oběhu $r_p = 147\,097\,000$ km. Spočítejte délku hlavní a vedlejší poloosy elipsy, po které Země kolem Slunce obíhá. Dále spočítejte excentricitu pro tuto elipsu, největší vzdálenost Země od Slunce, rychlost Země v aféliu a periheliu a její celkovou mechanickou energii. Hmotnost Slunce $M_S \approx 1,989 \cdot 10^{30}$ a hmotnost Země $M_z \approx 5,972 \cdot 10^{24}$ ($\kappa = 6,67430 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$).

Řešení:

Délku hlavní poloosy spočítáme ze vztahu (13.71):

$$a = \left(\frac{\kappa M_S T_o^2}{4\pi^2} \right)^{\frac{1}{3}} = 149\,612\,423 \text{ km} . \quad (13.84)$$

Excentricitu spočítáme pomocí vztahů (13.58) a (13.55):

$$\varepsilon = 1 - \frac{r_p}{a} = 0,017 . \quad (13.85)$$

Vidíme, že excentricita ε je velmi malá, takže se planeta Země pohybuje po eliptické dráze blízké dráze kruhové.

Celkovou mechanickou energii získáme ze vztahu (13.64):

$$E = -\frac{\alpha}{2a} = -\frac{\kappa M_Z M_S}{2a} = -2,649492246 \cdot 10^{30} \text{ kJ} . \quad (13.86)$$

Rychlost Země v periheliu spočítáme ze vztahu pro celkovou mechanickou energii:

$$E = \frac{1}{2} M_Z v_p^2 - \kappa \frac{M_Z M_S}{r_p} \Rightarrow v_p = \sqrt{\frac{2}{M_Z} \left(E + \frac{\kappa M_Z M_S}{r_p} \right)} = 30,30 \text{ kms}^{-1} . \quad (13.87)$$

Délku vedlejší poloosy spočítáme ze vztahu (13.48) a (13.55):

$$b = \sqrt{a^2 - e^2} = \sqrt{a^2 - a^2 \varepsilon^2} = 149\,591\,276 \text{ km} . \quad (13.88)$$

Vidíme, že $a \approx b$, tedy se jedná téměř o kružnici.

Největší vzdálenost Země od Slunce spočítáme ze vztahu (13.60):

$$r_a = a - e = a - a\varepsilon = 152\,127\,847 \text{ km} . \quad (13.89)$$

Protože velikost momentu hybnosti při pohybu v centrálním silovém poli musí být konstantní, tak musí platit

$$L = \cancel{M_Z} r_p v_p = \cancel{M_Z} r_a v_a . \quad (13.90)$$

Odtud rychlost Země aféliu:

$$v_a = \frac{r_p}{r_a} v_p = 29,30 \text{ kms}^{-1} . \quad (13.91)$$

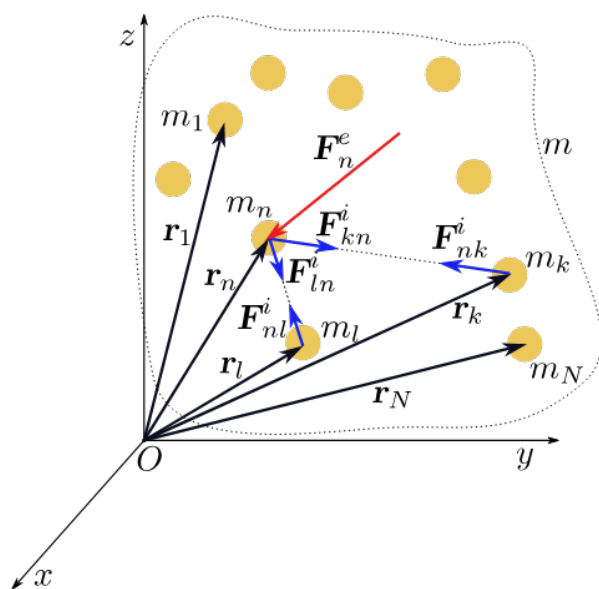
Na základě srovnání s rychlostí v periheliu můžeme konstatovat, že se Země pohybuje kolem Slunce téměř konstantní rychlostí.

Kapitola 14

Dynamika soustavy hmotných bodů

Dynamika soustavy hmotných bodů je dána prostým složením pohybových rovnic jednotlivých hmotných bodů, které uvažovanou soustavu tvoří. Je-li soustava tvořena velkým množstvím hmotných bodů, je obtížné sledovat každý hmotný bod soustavy samostatně. Z tohoto důvodu je nutné se omezit na celkový popis soustavy. Právě dynamika soustavy hmotných bodů se zaměřuje na dynamiku soustavy jako celku.

Předpokládejme, že soustavu tvoří N hmotných bodů. Pro každý hmotný bod



Obrázek 14.1: Soustava N hmotných bodů s vyznačenými silami, které na ně působí.

soustavy (obecně n -tý hmotný bod) platí následující pohybová rovnice

$$\frac{d\mathbf{p}_n}{dt} = \mathbf{F}_n, \quad (14.1)$$

kde \mathbf{F}_n je výslednice **pravých** sil působících na zvolený n -tý bod. Výslednici sil \mathbf{F}_n můžeme rozdělit na výslednici sil vnitřních (interních) \mathbf{F}_n^i a na výslednici sil vnějších (externích) \mathbf{F}_n^e ($\mathbf{F}_n = \mathbf{F}_n^i + \mathbf{F}_n^e$). Výslednice vnitřních sil \mathbf{F}_n^i je dána součtem jednotlivých silových působení všech zbývajících hmotných bodů soustavy na

uvažovaný hmotný bod, tj.

$$\mathbf{F}_n^i = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^N \mathbf{F}_{nk}^i . \quad (14.2)$$

V součtech sil \mathbf{F}_{nk} tedy vynecháme sčítanec, kde $n = k$, což vychází z předpokladu, že žádný hmotný bod na sebe nepůsobí nenulovou silou ($\mathbf{F}_{nn} = \mathbf{0}$, $n = 1, 2, \dots, N$), viz obr. 14.1.

V další části textu již nebudeme psát, že sumace probíhá od 1 do N .

Vnitřní síly považujeme za síly **centrální**. Pohybovou rovnici pak můžeme napsat jako

$$\frac{d\mathbf{p}_n}{dt} = \mathbf{F}_n^i + \mathbf{F}_n^e = \sum_{k \neq n} \mathbf{F}_{nk}^i + \mathbf{F}_n^e . \quad (14.3)$$

14.1 První věta impulzová

Budeme-li uvažovat všechny hmotné body soustavy, pak musíme uvažovat následující soustavu pohybových rovnic:

$$\sum_n \frac{d\mathbf{p}_n}{dt} = \sum_n \mathbf{F}_n^i + \sum_n \mathbf{F}_n^e = \sum_n \sum_{k \neq n} \mathbf{F}_{nk}^i + \underbrace{\sum_n \mathbf{F}_n^e}_{\mathbf{F}^e} . \quad (14.4)$$

Rovnost (14.4) upravíme následujícím způsobem

$$\frac{d}{dt} \underbrace{\sum_n \mathbf{p}_n}_{\mathbf{p}} = \sum_n \sum_{k \neq n} \mathbf{F}_{nk}^i + \mathbf{F}^e , \quad (14.5)$$

kde \mathbf{F}^e je výslednice vnějších sil působících na soustavu: hmotných bodů, \mathbf{p} je celková hybnost soustavy hmotných bodů. Na základě zákona akce a reakce¹ (viz obr. 14.1) musí platit, že

$$\mathbf{F}_{nk}^i = -\mathbf{F}_{kn}^i . \quad (14.6)$$

S ohledem na vztah (14.6) platí, že

$$\sum_n \sum_{k \neq n} \mathbf{F}_{nk}^i = \mathbf{0} , \quad (14.7)$$

tedy můžeme rovnici (14.5) přepsat do následujícího tvaru:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}^e . \quad (14.8)$$

Rovnice (14.8) představuje matematický zápis tzv. **I. věty impulzové**, která říká: *časová změna celkové hybnosti soustavy hmotných bodů se rovná výslednici vnějších sil na soustavu hmotných bodů působících.*

¹ n -tý hmotný bod působí na k -tý hmotný bod stejně velkou silou, jakou působí k -tý hmotný bod na n -tý hmotný bod, ale opačně orientovanou.

Soustavu hmotných bodů považujeme za **izolovanou**, když z vnějšku na ně nepůsobí jiné síly, tj. $\mathbf{F}_n^e = \mathbf{0}$.

Pro izolovanou soustavu hmotných bodů bude mít I. věta impulzová následující tvar

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{p} = \text{konst.} \quad (14.9)$$

Vztah (14.9) představuje matematický zápis **zákona zachování hybnosti izolované soustavy hmotných bodů**. Tento Zákon můžeme také vyjádřit jako

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \cdots + \mathbf{p}_N = \text{konst.} \quad (14.10)$$

resp.

$$m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + m_N \mathbf{v}_N = \text{konst.} \quad (14.11)$$

Nyní vyšetříme, jak se změni celková hybnost soustavy hmotných bodů, jestliže přejdeme z jedné inerciální vztažné soustavy (nečárkované) do jiné inerciální vztažné soustavy (čárkované), která se vůči nečárkované soustavě pohybuje rychlostí $\mathbf{V} = \text{konst.}$ Pro rychlost n -tého bodu v nečárkované vztažné soustavě můžeme psát

$$\mathbf{v}_n = \mathbf{v}'_n + \mathbf{V}, \quad (14.12)$$

kde \mathbf{v}'_n je rychlost n -tého bodu v čárkované soustavě. Pro celkovou hybnost soustavy můžeme psát

$$\mathbf{p} = \sum_n \mathbf{p}_n = \sum_n m_n \mathbf{v}_n = \sum_n m_n \mathbf{v}'_n + \sum_n m_n \mathbf{V} = \underbrace{\sum_n m_n \mathbf{v}'_n}_{=\mathbf{p}'} + \underbrace{\mathbf{V} \sum_n m_n}_{=m\mathbf{V}} = \mathbf{p}' + m\mathbf{V}, \quad (14.13)$$

kde \mathbf{p}' je celková hybnost soustavy hmotných bodů v čárkované soustavě a m je celková hmotnost soustavy. Takže transformační vztah pro celkové hybnosti mezi čárkovanou a nečárkovanou soustavou je

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}' + m\mathbf{V}. \quad (14.14)$$

Derivací vztahu (14.14) podle času dostaneme:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d\mathbf{p}'}{dt} + \underbrace{\frac{d(m\mathbf{V})}{dt}}_{=0} = \frac{d\mathbf{p}'}{dt} = \mathbf{F}^e. \quad (14.15)$$

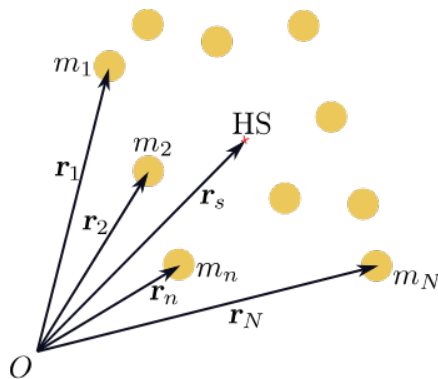
Z rovnosti (14.15) vyplývá, že *I. věta impulzová má stejný tvar ve všech inerciálních vztažných soustavách*, i když hybnost v každé ze vztažných soustav je podle vztahu (14.14) jiná.

14.2 Hmotný střed soustavy hmotných bodů

V této části kapitoly si nadefinujeme pro soustavu N hmotných bodů myšlený bod, který nazýváme **hmotný střed** (HS) ². Poloha hmotného středu je dána vztahem ³

²Někdy se používá pojmu **těžiště**, avšak je nutné si uvědomit, že těžiště je působištem tíhy (tíhové síly) tělesa a je shodné s hmotným středem jen tehdy, když se těleso nachází v homogenním tíhovém poli.

³Poloha hmotného středu nemusí souhlasit s polohou nějakého hmotného bodu soustavy.



Obrázek 14.2: Hmotný střed (HS) soustavy HB.

$$\mathbf{r}_s = \frac{\sum_n m_n \mathbf{r}_n}{\sum_n m_n} = \frac{\sum_n m_n \mathbf{r}_n}{m}, \quad (14.16)$$

kde $\mathbf{r}_s = (x_s, y_s, z_s)$ je polohový vektor hmotného středu, viz obr. 14.2 (polohový vektor hmotného středu \mathbf{r}_s nemusí ukazovat na místo, kde se nachází nějaký HB). Pro jednotlivé kartézské souřadnice dostáváme:

$$x_s = \frac{\sum_n m_n x_n}{m}, \quad y_s = \frac{\sum_n m_n y_n}{m}, \quad z_s = \frac{\sum_n m_n z_n}{m}. \quad (14.17)$$

Pro rychlost hmotného středu dostáváme:

$$\mathbf{v}_s = \frac{d\mathbf{r}_s}{dt} = \frac{1}{m} \sum_n m_n \frac{d\mathbf{r}_n}{dt} = \frac{\sum_n m_n \mathbf{v}_n}{m} = \frac{\sum_n \mathbf{p}_n}{m} = \frac{\mathbf{p}}{m}. \quad (14.18)$$

Z rovnosti (14.18) můžeme psát, že

$$\mathbf{p} = m \mathbf{v}_s = \mathbf{p}_s. \quad (14.19)$$

Vztah (14.19) představuje zápis fyzikální skutečnosti, že celková hybnost soustavy hmotných bodů je **stejná** jako hybnost hmotného bodu o hmotnosti celé soustavy umístěného v hmotném středu, tedy jinými slovy můžeme soustavu hmotných bodů nahradit jediným hmotným bodem, který se nachází v hmotném středu \mathbf{r}_s a má hmotnost rovnou hmotnosti celé soustavy, přičemž na tento bod působí výslednice všech vnějších sil. Takže na základě (14.19) můžeme I. větu impulsovou napsat ve tvaru:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d\mathbf{p}_s}{dt} = m \frac{d\mathbf{v}_s}{dt} = \mathbf{F}^e. \quad (14.20)$$

Rovnice (14.20) vlastně představuje pohybovou rovnici hmotného středu.

Jedná-li se o izolovanou soustavu, potom na základě vztahu (14.20) můžeme psát, že

$$\frac{d\mathbf{p}_s}{dt} = m \frac{d\mathbf{v}_s}{dt} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{v}_s = \text{konst.} \quad (14.21)$$

Výraz (14.21) je vyjádřením **Zákona zachování rychlosti hmotného středu izolované soustavy**.

Vztažnou soustavu, jejíž počátek je umístěn do hmotného středu soustavy hmotných bodů nazýváme **soustavou hmotného středu** nebo také **těžišťovou soustavou**. V těžišťové soustavě platí, že

$$\mathbf{p}_s = \mathbf{0}, \quad (14.22)$$

protože v této soustavě platí, že

$$\mathbf{v}_s = \mathbf{0} . \quad (14.23)$$

Připomeňme, že v této soustavě také platí

$$\mathbf{r}_s = \mathbf{0} . \quad (14.24)$$

Z matematického hlediska se těžišťová soustava jeví jako vztažná soustava **výhodnější**.

14.3 Druhá věta impulzová

Vynásobíme všechny pohybové rovnice (14.4) vektorově polohovým vektorem, který přísluší danému hmotnému bodu, čímž dostaneme, že

$$\sum_n \mathbf{r}_n \times \frac{d\mathbf{p}_n}{dt} = \sum_n \sum_{k \neq n} \mathbf{r}_n \times \mathbf{F}_{nk}^i + \sum_n \underbrace{\mathbf{r}_n \times \mathbf{F}_n^e}_{=\mathbf{M}_n^e} , \quad (14.25)$$

kde \mathbf{M}_n^e je moment vnějších sil působících na n -tý bod.

Na základě pravidla pro derivování vektorového součinu funkcí platí:

$$\frac{d \overbrace{(\mathbf{r}_n \times \mathbf{p}_n)}^{=\mathbf{L}_n}}{dt} = \underbrace{\frac{d\mathbf{r}_n}{dt} \times \mathbf{p}_n}_{\substack{=\mathbf{v}_n \\ =\mathbf{0}}} + \underbrace{\mathbf{r}_n \times \frac{d\mathbf{p}_n}{dt}}_{=\mathbf{M}_n^e} , \quad (14.26)$$

takže od odtud dostáváme, že

$$\frac{d\mathbf{L}_n}{dt} = \mathbf{r}_n \times \frac{d\mathbf{p}_n}{dt} , \quad (14.27)$$

kde \mathbf{L}_n je moment hybnosti n -tého hmotného bodu soustavy. Dosadíme výraz (14.27) do rovnice (14.25), takže můžeme psát:

$$\sum_n \frac{d\mathbf{L}_n}{dt} = \sum_n \sum_{k \neq n} \mathbf{r}_n \times \mathbf{F}_{nk}^i + \sum_n \mathbf{M}_n^e . \quad (14.28)$$

Dále upravíme (14.28)

$$\frac{d}{dt} \underbrace{\sum_n \mathbf{L}_n}_{=\mathbf{L}} = \sum_n \sum_{k \neq n} \mathbf{r}_n \times \mathbf{F}_{nk}^i + \underbrace{\sum_n \mathbf{M}_n^e}_{=\mathbf{M}^e} , \quad (14.29)$$

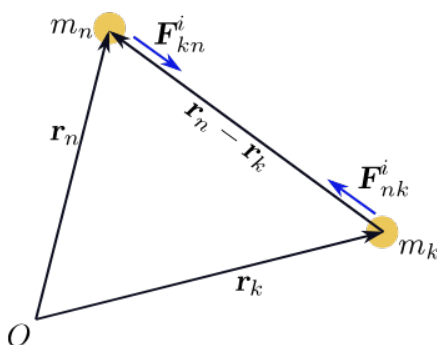
kde \mathbf{L} je celkový moment hybnosti soustavy hmotných bodů a \mathbf{M}^e je celkový moment vnějších sil působících na soustavu hmotných bodů. Rovnici (14.29) můžeme vyjádřit jako

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum_n \sum_{k \neq n} \mathbf{r}_n \times \mathbf{F}_{nk}^i + \mathbf{M}^e . \quad (14.30)$$

První člen na pravé straně rovnice (14.30) vyjádříme jako⁴

$$\begin{aligned} \sum_n \sum_{k \neq n} \mathbf{r}_n \times \mathbf{F}_{nk}^i &= \frac{1}{2} \sum_n \sum_{k \neq n} (\mathbf{r}_n \times \mathbf{F}_{nk}^i + \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_{kn}^i) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_n \sum_{k \neq n} (\mathbf{r}_n \times \mathbf{F}_{nk}^i - \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_{nk}^i) = \frac{1}{2} \sum_n \sum_{k \neq n} (\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_k) \times \mathbf{F}_{nk}^i = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (14.31)$$

Skutečnost, že se výraz (14.31) rovná nulovému vektoru je vidět z obrázku 14.3 (rovnoběžnost vektorů). Díky rovnosti (14.31) pak můžeme rovnici (14.30) vyjádřit jako



Obrázek 14.3: Vysvětlující obrázek k rovnosti (14.31).

dřít jako

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}^e. \quad (14.32)$$

Rovnice (14.32) je matematickým vyjádřením II. věty impulzové, která říká, že časová změna celkového momentu hybnosti soustavy je rovna celkovému momentu vnějších sil působících na soustavu hmotných bodů vzhledem ke stejnému bodu⁵. Jedná-li se o izolovanou soustavu hmotných bodů potom z II. věty impulzové plyne

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{L} = \text{konst.} \quad (14.33)$$

Vztah (14.33) představuje matematický zápis **Zákona zachování momentu hybnosti izolované soustavy hmotných bodů**.

14.4 Energie soustavy hmotných bodů

Vynásobíme všechny pohybové rovnice (14.4) skalárně rychlostí, která přísluší danému hmotnému bodu, čímž dostaneme, že

$$\sum_n \mathbf{v}_n \cdot \frac{d\mathbf{p}_n}{dt} = \sum_n \mathbf{v}_n \cdot \mathbf{F}_n^i + \sum_n \underbrace{\mathbf{v}_n \cdot \mathbf{F}_n^e}_{=P_n^e}. \quad (14.34)$$

⁴Při úpravě použijeme vztahu (14.6).

⁵Bod, vůči kterému jsou oba momenty počítány, musí být počátkem inerciální vztažné soustavy, aby platily Newtonovy pohybové zákony, jejichž platnost jsme při odvozování této věty předpokládali. Dá se však dokázat, viz kapitola 16.4, že tímto společným bodem může být i hmotný střed.

kde P_n^e je okamžitý výkon vnějších sil působících na n -tý bod.

Pro levou stranu rovnice (14.34) můžeme psát, že

$$\sum_n \mathbf{v}_n \cdot \frac{d\mathbf{p}_n}{dt} = \sum_n m_n \mathbf{v}_n \cdot \frac{d\mathbf{v}_n}{dt} = \sum_n \frac{1}{2} m_n \frac{dv_n^2}{dt} = \sum_n \frac{dT_n}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_n T_n = \frac{dT}{dt}, \quad (14.35)$$

kde T je celková kinetická energie soustavy hmotných bodů. Dosadíme tento výsledek do levé strany rovnice (14.34)

$$\frac{dT}{dt} = \sum_n \mathbf{v}_n \cdot \mathbf{F}_n^i + \underbrace{\sum_n P_n^e}_{=P^e}, \quad (14.36)$$

kde P^e je celkový okamžitý výkon vnějších sil působících na soustavu hmotných bodů.

Dále upravíme první člen na pravé straně rovnice (14.36), přičemž využijeme skutečnosti, že vnitřní síly jsou centrální, a že centrální síly jsou silami konzervativními

$$\begin{aligned} \sum_n \mathbf{v}_n \cdot \mathbf{F}_n^i &= \sum_n \mathbf{v}_n \cdot (-\nabla_n U_n) = - \sum_n \mathbf{v}_n \cdot \left(\frac{\partial U_n}{\partial x_n}, \frac{\partial U_n}{\partial y_n}, \frac{\partial U_n}{\partial z_n} \right) = - \sum_n \mathbf{v}_n \cdot \frac{\partial U_n}{\partial \mathbf{r}_n} = \\ &= - \sum_n \frac{\partial U_n}{\partial \mathbf{r}_n} \cdot \frac{d\mathbf{r}_n}{dt} = - \sum_n \frac{\partial U_n}{\partial \mathbf{r}_n} \cdot \frac{d\mathbf{r}_n}{dt} = - \sum_n \frac{dU_n}{dt} = - \frac{d}{dt} \sum_n U_n = - \frac{dU}{dt}, \end{aligned} \quad (14.37)$$

kde U je celková potenciální energie soustavy hmotných bodů.

Výsledek úpravy (14.37) dosadíme do rovnice (14.36)

$$\frac{dT}{dt} = - \frac{dU}{dt} + P^e. \quad (14.38)$$

Rovnici (14.38) upravíme do tvaru

$$\frac{dT}{dt} + \frac{dU}{dt} = \frac{d(T+U)}{dt} = \frac{dE}{dt} = P^e, \quad (14.39)$$

kde E je celková mechanická energie soustavy hmotných bodů.

Rovnice (14.39) je matematickým vyjádřením věty o **Mechanické energii soustavy hmotných bodů**, která říká, že časová změna celkové mechanické energie soustavy je rovna celkovému okamžitému výkonu vnějších sil na soustavu hmotných bodů působících. Pro případ izolované soustavy hmotných bodů můžeme na základě rovnosti (14.39) psát, že

$$\frac{dE}{dt} = 0 \Rightarrow E = konst. \quad (14.40)$$

Výraz (14.40) vyjadřuje **Zákon zachování mechanické energie pro soustavu hmotných bodů**.

Pro izolovanou soustavu jsme našli celkem **čtyři** zákony zachování:

1. zákon zachování hybnosti,

2. zákon zachování momentu hybnosti,
3. zákon zachování mechanické energie,
4. zákon zachování rychlosti hmotného středu.

Kapitola 15

Srážka těles

V mechanice, ale i v atomové, jaderné či částicové fyzice, se setkáváme s významným fyzikálním jevem, kterým je **srážka** (kolize) těles, resp. částic. Pojem srážky je velmi obecný a široký. Zpravidla je spojen s přímým kontaktem zúčastněných těles. Avšak tělesa (částice) se mohou ovlivňovat prostřednictvím vzájemného silového působení, aniž by došlo k jejich přímému styku. V takovém případě místo pojmu srážka zpravidla používáme pojmu **rozptyl**. V nejobecnější rovině můžeme srážku chápat jako časově a prostorově omezenou interakci těles, resp. částic, při níž dochází k přerozdělování hybnosti a energie. Jedná-li se o srážku těles konečných rozměrů, pak mluvíme o **rázu těles**. Je-li druhý tělesem neprostupná stěna, hovoříme o **odrazu tělesa**.

Během srážky na sebe tělesa působí po relativně krátkou dobu velkými silami, které nazýváme **nárazové síly**. Vzhledem k ohromné velikosti nárazových sil se při vyšetřování srážek těles ostatní síly, včetně tíhy, obvykle zanedbávají, aniž by to znamenalo větší chybu při popisu tohoto děje.

Při rázu těles záleží na tvaru tělesa, umístění jeho těžiště, vlastnostech povrchu či způsobu nárazu.

Budeme se zabývat pouze srážkami těles bez potřeby znalosti jejich vnitřní struktury a mechanických vlastností jejich povrchu. V takovém případě hovoříme o **srážce částic**. Částicí nebudeme rozumět jen bodové částice, ale i koule s dokonale hladkým povrchem. Tyto koule se budou pohybovat jen posuvným pohybem (nebudou rotovat) a nebudou se odvalovat po uvažovaném povrchu. Při popisu srážek částic vystačíme pouze se zákony zachování. Výsledky našich úvah budou platit pro částice libovolné povahy a v omezené míře i pro reálná tuhá tělesa (např. kulečnickové koule), u kterých budeme moci zanedbat drsnost jejich povrchu a rotaci.

15.1 Klasifikace srážek

Pokud při srážce platí zákon zachování kinetické energie (nedochází k žádným ztrátám mechanické energie), jde o **srážku pružnou** (dokonale pružnou). Jestliže zákon zachování kinetické energie neplatí, jedná se o **srážku nepružnou**. V případě, že se po srážce obě částice pohybují jako jediná částice (nedojde k odpružení), jde o **srážku dokonale nepružnou**. Pokud však k jistému odpružení částic dojde, mluvíme o **nedokonale pružné srážce**.

V případě, že leží vektory rychlosti obou částic před i po srážce na jediné přímce, jde o **přímou** neboli **čelní srážku**. Není-li tomu tak, pak se jedná o **srážku šikmou**.

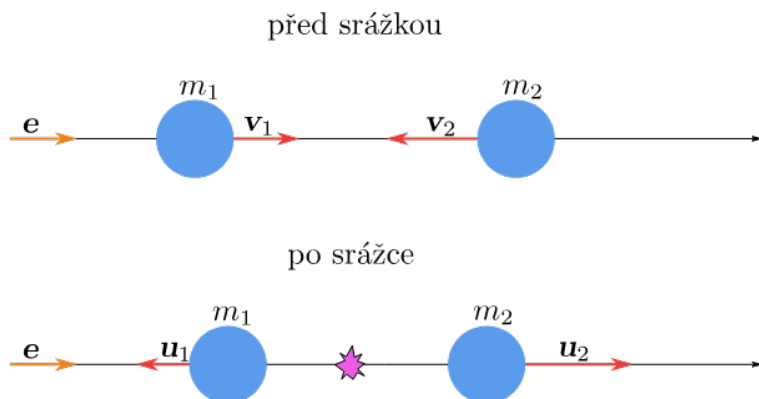
15.2 Zákony zachování při srážkách částic

Pokud neznáme přesný mechanismus silové interakce částice (zákon síly), nemůžeme srážku plně popsat a předpovědět její výsledek. Vzhledem k tomu, že z důvodů uvedených výše stačí uvažovat jen nárazové síly a ostatní můžeme ignorovat, považujeme obě částice během srážky za izolovanou soustavu. Díky této skutečnosti bude platit pro srážku Zákon zachování hybnosti a momentu hybnosti. Avšak v našem případě budeme předpokládat, že se jedná o srážku buď bodových částic či koule s dokonale hladkým povrchem, takže Zákon momentu hybnosti neuvažujeme.

Aniž bychom znali cokoli bližšího o struktuře srážejících se částic a jejich silovém působení, můžeme uvažovat zákon zachování hybnosti. V případě pružné srážky přistupuje k tomuto zákonu zachování ještě zákon zachování mechanické energie. Protože se při našich úvahách omezíme pouze na srážky dvou částic (binární srážka), budeme hmotnosti částic vstupujících do interakčního prostoru označovat jako m_1 a m_2 a jejich rychlosti jako \mathbf{v}_1 a \mathbf{v}_2 . Protože neznáme přesný mechanismus interakce uvažovaných částic, nevíme co se v interakční oblasti děje.

15.3 Dokonale pružná čelní srážka

Uvažujme, pro názornost, dvě (dokonale) pružné koule s ideálně hladkým povrchem, které se pohybují proti sobě. Jde o srážku přímou (čelní srážka). I když se koule po srážce pružně deformují, za okamžik se jejich deformační energie přemění zpět na kinetickou energii a obě koule se po srážce od sebe pružně odrazí. Situace před srážkou a po srážce je zachycena na obrázku 15.1. Z obrázku je vidět, že



Obrázek 15.1: Dokonale pružná čelní srážka dvou koulí.

koule pře srážkou se pohybují rychlostmi \mathbf{v}_1 a \mathbf{v}_2 a po pružné srážce se pohybují rychlostmi \mathbf{u}_1 a \mathbf{u}_2 . Vzhledem k tomu, že se jedná o čelní srážku, pohyb se děje po přímce (jednorozměrný pohyb). Tuto přímku budeme orientovat pomocí jednotkového bázevého vektoru \mathbf{e} . Z tohoto pohledu bude platit:

$$\mathbf{v}_1 = v_1 \mathbf{e}, \quad \mathbf{v}_2 = v_2 \mathbf{e}, \quad \mathbf{u}_1 = u_1 \mathbf{e}, \quad \mathbf{u}_2 = u_2 \mathbf{e},$$

kde v_1 , v_2 , u_1 a u_2 jsou příslušné složky jednorozměrných vektorů.

Z definice pružné srážky je zřejmé, že platí jak Zákon zachování hybnosti, tak Zákon zachování mechanické energie, tedy

$$m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 = m_1 \mathbf{u}_1 + m_2 \mathbf{u}_2 , \quad (15.1)$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2 . \quad (15.2)$$

Protože se jedná o přímé srážky, tak můžeme počítat jen se složkami vektorů, čímž můžeme přepsat a upravit rovnice (15.1) a (15.2) jako

$$m_1(v_1 - u_1) = m_2(u_2 - v_2) , \quad (15.3)$$

$$m_1(v_1^2 - u_1^2) = m_2(u_2^2 - v_2^2) . \quad (15.4)$$

Rovnice (15.4) dále upravíme následujícím způsobem:

$$m_1(v_1 - u_1)(v_1 + u_1) = m_2(u_2 - v_2)(u_2 + v_2) . \quad (15.5)$$

S ohledem na rovnici (15.3) z tohoto výsledku dostáváme:

$$v_1 + u_1 = u_2 + v_2 . \quad (15.6)$$

Takže řešíme následující soustavu dvou rovnic:

$$m_1(v_1 - u_1) = m_2(u_2 - v_2) , \quad (15.7)$$

$$v_1 + u_1 = u_2 + v_2 , \quad (15.8)$$

kde neznámými jsou pro nás rychlosti po srážce: u_1 a u_2 .

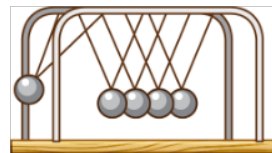
Řešením soustavy rovnic (15.7) a (15.8) dostaneme:

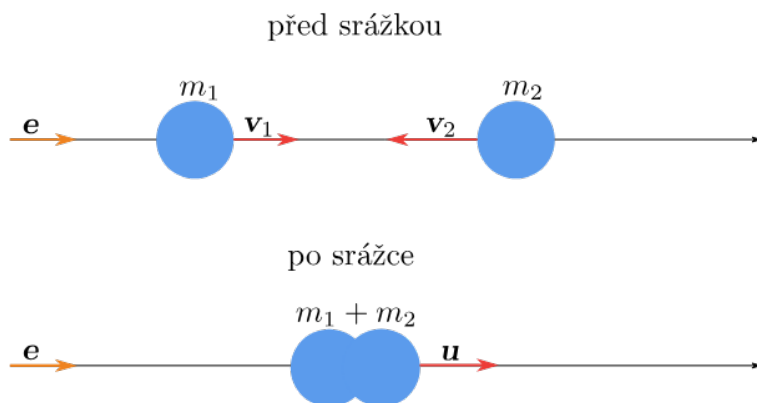
$$u_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2 , \quad (15.9)$$

$$u_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 - \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_2 . \quad (15.10)$$

Z tohoto řešení rovnic je vidět, že pro $m_1 = m_2$ je $u_1 = v_2$ a $u_2 = v_1$, tedy koule se po pružné srážce budou pohybovat opačnými směry než před srážkou a přitom si vymění velikosti rychlostí.

Kdyby se koule o hmotnosti m_2 nepohybovala (stála), tj. $v_2 = 0$, potom $u_1 = 0$ a $u_2 = v_1$, tedy po pružné srážce se zastaví koule o hmotnosti m_1 a druhá koule se počne pohybovat v původním směru první koule a se stejnou rychlostí ($m_1 = m_2$). Opět předpokládejme, že koule o hmotnosti m_2 se nepohybuje ($v_2 = 0$) a narazí do ní koule o hmotnosti m_1 rychlostí v_1 . Avšak v tomto případě budeme uvažovat, že hmotnost m_1 je zanedbatelná vůči hmotnosti m_2 . V takovém případě dostáváme ze vztahů (15.9) a (15.10), že $u_1 = -v_1$ a $u_2 = 0$, tedy koule o hmotnosti m_2 se po pružné srážce nebude pohybovat a koule o hmotnosti m_1 se od ní odrazí (tj. má opačnou orientaci) se stejnou rychlostí jakou do druhé koule narazila.





Obrázek 15.2: Dokonale nepružná srážka dvou koulí.

15.4 Dokonale nepružná čelní srážka

Tentokrát budeme uvažovat dvě koule, které jsou dokonale nepružné. Při srážce se obě koule deformují a zaklesnou se do sebe, takže se pak pohybují jako jediný celek (částice) o hmotnosti $m_1 + m_2$ s rychlostí \mathbf{u} , viz obr. 15.2. Při tomto druhu srážky se mechanická energie nezachovává, neboť se její část přemění na deformační práci a teplo. Avšak při nepružné srážce se zachovává hybnost soustavy uvažovaných koulí, tedy

$$m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 = (m_1 + m_2) \mathbf{u} . \quad (15.11)$$

Odtud po dokonale nepružné srážce koulí pro výslednou rychlost \mathbf{u} dostáváme¹:

$$\mathbf{u} = \frac{m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2}{m_1 + m_2} = \frac{\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2}{m_1 + m_2} . \quad (15.12)$$

Protože uvažujeme čelní srážku, tak odtud můžeme psát, že

$$u = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} . \quad (15.13)$$

O výsledné orientaci společné rychlosti po dokonale nepružné srážce rozhodují velikosti jejich hybností před srážkou. Budou-li hybnosti shodné co do velikosti ($|v_1| = |v_2|$), tak po dokonale nepružné srážce se spojená tělesa (koule) nebudou pohybovat.

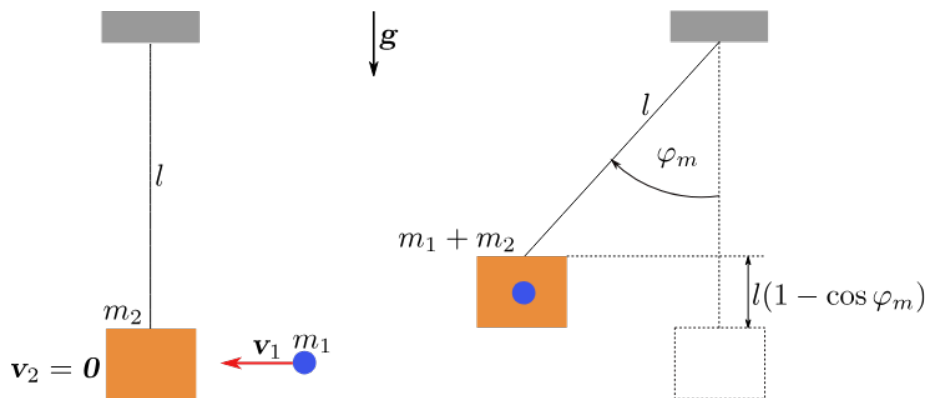
Úbytek energie spojený s deformační prací a uvolněným teplem při dokonale nepružné srážce spočítáme jako rozdíl kinetických energií před srážkou a po dokonale pružné srážce:

$$\begin{aligned} \Delta E = \Delta T &= \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) u^2 = \\ &= \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \frac{(m_1 v_1 + m_2 v_2)^2}{(m_1 + m_2)^2} = \\ &= \frac{(m_1 + m_2) m_1 v_1^2 + (m_1 + m_2) m_2 v_2^2 - (m_1 v_1 + m_2 v_2)^2}{2(m_1 + m_2)} = \\ &= \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (v_1 - v_2)^2 . \end{aligned} \quad (15.14)$$

¹Tento výsledek bychom dostali i v případě, že by se nejednalo o srážku přímou.

Příklad 15.4.1

Příkladem dokonale nepružné srážky je srážka střely s balistickým kyvadlem, viz obr. 15.3, které se nachází v homogenním tíhovém poli Země a na jeho nepružném závěsu zanedbatelné hmotnosti mající délku l je zavěšena bedýnka vyplněná pískem a celková hmotnost tohoto závaží je m_2 . Do bedýnky vletne střela vodorovnou rychlostí \mathbf{v}_1 a uváže v ní. Kyvadlo se po vniknutí střely vychýlí o maximální úhel φ_m . Určete velikost rychlosti střely a úbytek její kinetické energie ΔT .



Obrázek 15.3: Balistické kyvadlo.

Řešení:

Z rovnice (15.11) si vyjádříme velikost rychlosti střely v_1 ($v_2 = 0$):

$$v_1 = \frac{m_1 + m_2}{m_1} u. \quad (15.15)$$

Kinetická energie soustavy se při této srážce nezachovává, ale při kmitech balistického kyvadla platí Zákon zachování celkové mechanické energie, tj.

$$\frac{1}{2} \cancel{(m_1 + m_2)} u^2 = \cancel{(m_1 + m_2)} gl(1 - \cos \varphi_m). \quad (15.16)$$

Odtud si vyjádříme rychlost bedýnky se střelou, která v ní uvázla:

$$u = \sqrt{2gl(1 - \cos \varphi_m)}. \quad (15.17)$$

Její hodnotu dosadíme do vztahu (15.15) a dostaneme hledaný vztah pro velikost rychlosti střely před jejím vniknutím do bedýnky:

$$v_1 = \frac{m_1 + m_2}{m_1} \sqrt{2gl(1 - \cos \varphi_m)}. \quad (15.18)$$

Úbytek kinetické energie střely spočítáme dosazením do vztahu (15.14):

$$\Delta T = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} v_1^2 = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} \frac{(m_1 + m_2)^2}{m_1^2} 2gl(1 - \cos \varphi_m) = \frac{m_2(m_1 + m_2)}{m_1} gl(1 - \cos \varphi_m). \quad (15.19)$$

Kapitola 16

Mechanika tuhého tělesa

16.1 Základní pojmy

Pod pojmem těleso budeme rozumět určitý objem V , který je nějakým způsobem vyplněn spojitě¹ nebo nespojitě hmotou. V případě spojitěho vyplnění objemu V hmotou má smysl zavést objemovou hustotu ρ . **Objemová hustota** v uvažovaném místě o polohovém vektoru \mathbf{r} (v bodě P o polohovém vektoru \mathbf{r}) je dána následujícím vztahem

$$\rho(\mathbf{r}) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V}, \quad (16.1)$$

kde ΔV je objem obklopující bod P a Δm je hmotnost této části objemu. Ze vztahu (16.1) vyplývá, že

$$dm = \rho(\mathbf{r})dV. \quad (16.2)$$

Pro homogenní těleso (s konstantní hustotou) platí, že

$$\rho = \frac{m}{V}, \quad (16.3)$$

kde m je hmotnost celého tělesa.

Pro hmotu rozloženou v tenké vrstvě je možné podobným způsobem zavést **plošnou hustotu**

$$\sigma(\mathbf{r}) = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta S}, \quad (16.4)$$

kde ΔS je plocha obsahující bod P a Δm je hmotnost této části plochy.

V případě, že hmota je rozložena podél nějaké křivky, zavádíme zcela analogicky **lineární hustotu**

$$\tau(\mathbf{r}) = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta l}, \quad (16.5)$$

kde Δl je část křivky obsahující bod P a Δm je hmotnost této části křivky.

Obecně těleso může konat tři druhy pohybů:

1. **posuvný** (translační),
2. **otáčivý** (rotační),

¹Víme, že všechna tělesa jsou tvořena atomy. Je-li uvažovaný objem tvořen velkým množstvím atomů, lze odhlédnout od nespojitě struktury a považovat rozložení hmoty za spojitě.

3. deformační.

Pod pojmem **tuhé těleso** chápeme těleso, u něhož je vzájemná vzdálenost jednotlivých bodů **neměnná** (nedeformuje se). Tuhé těleso může vykonávat pouze dva druhy pohybu, tj. posuvný a otáčivý.

Vzhledem k tomu, že tuhé těleso může být reprezentováno hmotnými body, které vůči sobě nemění vzdálenost, tak **všechny závěry** odvozené pro soustavu hmotných bodů můžeme použít i pro tuhé těleso. Pro převod vztahů platných pro soustavu hmotných bodů na vztahy použitelné pro tuhá tělesa se spojitě rozloženou hmotou můžeme použít následující převodní vztahy:

Převodní vztahy

$$\sum_n f_n m_n \rightarrow \int_m f dm, \quad \sum_n \mathbf{f}_n m_n \rightarrow \int_m \mathbf{f} dm, \quad (16.6)$$

kde f_n , resp. \mathbf{f}_n , je nějaká skalární, resp. vektorová, fyzikální veličina vztahující se k n -tému hmotnému bodu, kde m_n je jeho hmotnost a $f = f(\mathbf{r})$, resp. $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{r})$, je spojitá skalární, resp. vektorová, funkce přes hmotnost tělesa se spojitě rozloženou hmotou.

Jelikož je nevhodné integrovat přes hmotnost tělesa, tak pomocí vztahu (16.2) převedeme integrál (16.6) na objemový integrál

$$\int_V f \rho dV. \quad (16.7)$$

Z důvodu lepší přehlednosti textu budeme nadále tuhé těleso označovat jen pojmem těleso.

Pro hmotný střed tělesa, který jsme si zavedli pro soustavu HB (14.16), můžeme na základě transformačního vztahu psát, že

$$\mathbf{r}_S = \frac{\int_m \mathbf{r} dm}{\int_m dm} \equiv \frac{\int_V \rho(\mathbf{r}) \mathbf{r} dV}{\int_V \rho dV}. \quad (16.8)$$

Poznamenejme, že integrál ve jmenovateli výrazu (16.8) představuje celkovou hmotnost tělesa, tj.

$$m = \int_m dm = \int_V \rho dV. \quad (16.9)$$

Je-li hustota konstantní, potom můžeme přepsat vztah (16.8) do tvaru

$$\mathbf{r}_S = \frac{\rho \int_V \mathbf{r} dV}{m} = \frac{\int_V \mathbf{r} dV}{V}. \quad (16.10)$$

Určením objemové hustoty jako funkce polohy $\rho = \rho(\mathbf{r})$ je vlastně určena i hranice tělesa, tj. těleso se nachází tam, kde $\rho \neq 0$, mimo těleso je $\rho = 0$.

Poloha tělesa je jednoznačně určena polohou jeho tří bodů, které neleží současně na jedné přímkě. Vzhledem k tomu, že se vzájemná vzdálenost mezi takovými body nemění, existují mezi body tři vazby, takže počet stupňů volnosti tělesa $s = 3 \cdot 3 - 3 = 9 - 3 = 6$.

16.2 Posuvný a otáčivý pohyb tělesa

Při čistě posuvném pohybu jsou dráhy všech bodů tělesa **totožné** (jsou jen vůči sobě posunuté), v libovolném časovém okamžiku $t = t_i$ se tyto body pohybují **stejnou** okamžitou rychlostí ($\mathbf{v}(\mathbf{r}_1, t_i) = \mathbf{v}(\mathbf{r}_2, t_i) \equiv \mathbf{v}(t_i)$), viz obr 16.1, proto lze zkoumání posuvného pohybu převést na zkoumání pohybu jediného z bodů, nejčastěji hmotného středu. Tedy těleso při posuvném pohybu můžeme nahradit jedním HB o hmotnosti celého tělesa, který umístíme do jeho hmotného středu a přisoudíme mu okamžitou rychlost $\mathbf{v}(t)$, kterou se těleso pohybuje. Kinetická energie při čistě posuvném pohybu je:

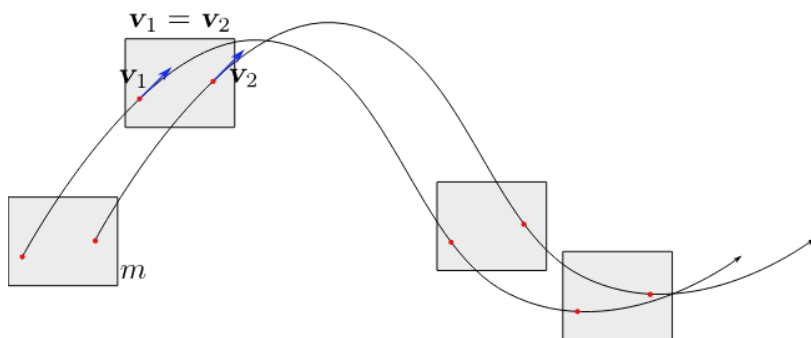
$$T(t) = \frac{1}{2}mv^2(t), \quad (16.11)$$

kde m je hmotnost celého tělesa a $v(t)$ je velikost jeho okamžité rychlosti.

Hybnost tělesa při posuvném pohybu je dána jako

$$\mathbf{p}(t) = m\mathbf{v}(t). \quad (16.12)$$

V případě čistě otáčivého pohybu je situace složitější. Otáčivý pohyb můžeme



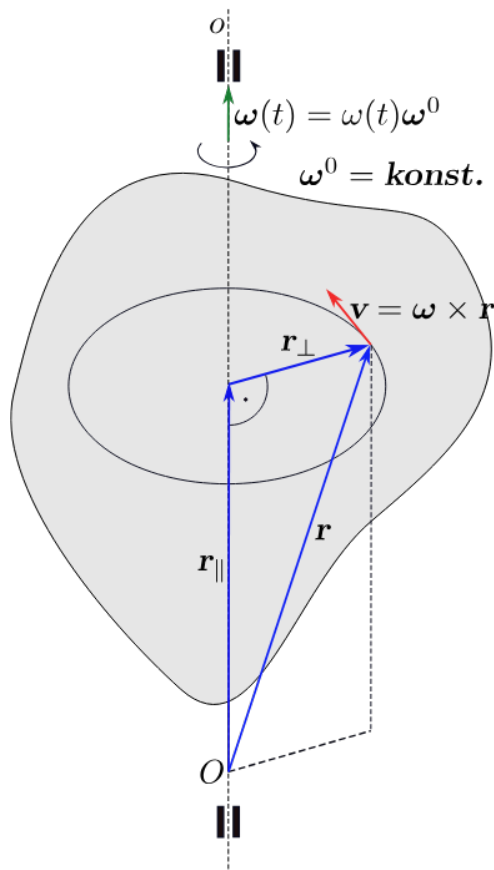
Obrázek 16.1: Posuvný (translační) pohyb tělesa v různých časových okamžicích.

rozdělit na dva druhy otáčení:

1. **otáčení kolem pevné osy** – je to pohyb, u kterého zůstávají v klidu body ležící na ose otáčení, tedy v klidu zůstává **jediná přímka** v tělese (prochází-li osa otáčení tělesem),
2. **otáčení kolem pevného bodu** – je to pohyb, u kterého zůstává v klidu **jediný bod** v tělese (je-li pevný bod součástí tělesa).

Při rotaci kolem **pevné** osy (osa rotace) o body tělesa ležící na ose rotace zůstávají v klidu a každý jiný bod tělesa opisuje kružnici, jejíž střed leží na ose rotace. Samotná kružnice, kolem které obíhají body mimo osu rotace, leží v rovině proložené uvažovaným bodem kolmo na osu rotace, viz obrázek 16.2. Okamžitá úhlová rychlost $\boldsymbol{\omega}(t) = \omega(t)\boldsymbol{\omega}^0$ ($\boldsymbol{\omega}^0 = \text{konst.}$) bodů pohybujících se po kružnici je pro všechny body **stejná**. Z kinematiky hmotného bodu víme, že pro okamžitou rychlost \mathbf{v} můžeme psát, že

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}. \quad (16.13)$$



Obrázek 16.2: Otáčení (rotace) tělesa kolem pevné osy.

Výraz pro okamžitou obvodovou rychlost (16.13) je možné také psát tak, že rozložíme polohový vektor do dvou složek, kdy jedna je rovnoběžná s osou otáčení (rotace) a druhá je na ní kolmá ($\mathbf{r} = \mathbf{r}_{\perp} + \mathbf{r}_{\parallel}$):

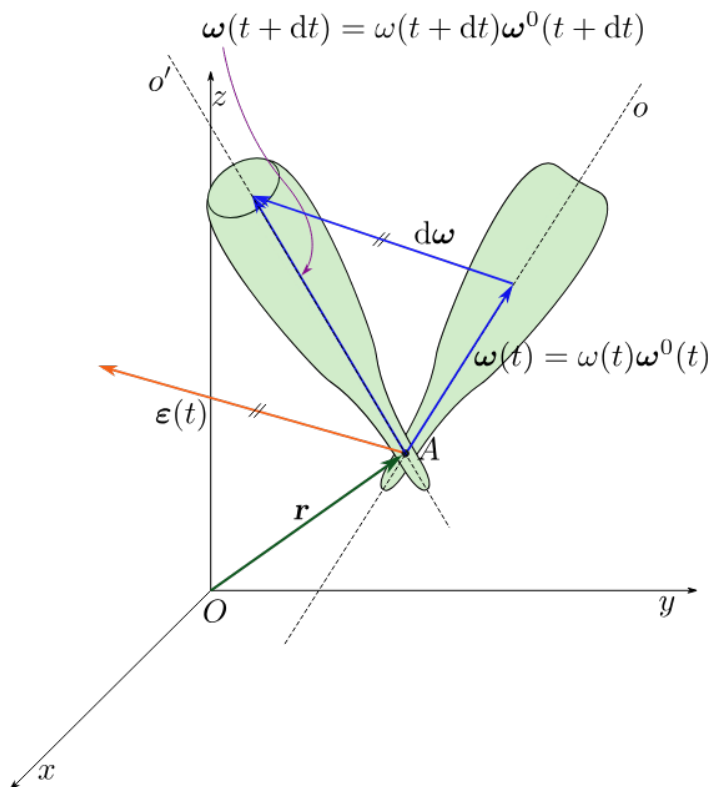
$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}_{\perp} + \mathbf{r}_{\parallel}) = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\perp} + \underbrace{\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\parallel}}_{=0} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\perp} . \quad (16.14)$$

Pro úhlovou rychlost $\boldsymbol{\omega}$ a úhlové zrychlení $\boldsymbol{\varepsilon}$ při tomto otáčení platí, že $\boldsymbol{\omega} \parallel \boldsymbol{\varepsilon}$.

Při rotaci kolem **pevného** bodu A se každý bod tělesa, vyjma pevného, pohybuje po kulové ploše se středem v pevném bodě. Rotaci kolem pevného bodu si můžeme představit jako rotaci kolem osy, která s časem mění svoji polohu v prostoru, přičemž tato osa vždy prochází pevným bodem, okolo kterého se rotace uskutečňuje. Této ose pak říkáme **okamžitá osa otáčení**. Tedy obecně orientace okamžité osy otáčení není vázána (fixována) ani v prostoru, ani v tělese, které kolem ní rotuje. Vektor úhlové rychlosti $\boldsymbol{\omega}$ leží na okamžité ose rotace. Díky této skutečnosti vektor $\boldsymbol{\omega}$ mění v čase nejen svoji velikost, ale i orientaci, tj. $\boldsymbol{\omega}(t) = \omega(t)\boldsymbol{\omega}^0(t)$. Vzhledem k tomu, že

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} , \quad (16.15)$$

takže $\boldsymbol{\omega}$ a $\boldsymbol{\varepsilon}$ již **nej**sou rovnoběžné, viz obrázek 16.3.



Obrázek 16.3: Otáčení (rotace) tělesa kolem pevného bodu A – okamžitá osa ve dvou časových okamžicích vzdálených od sebe o dt .

16.3 Obecný pohyb tělesa

Uvažujme těleso, ve kterém zvolíme bod A , který představuje pevný bod otáčení. Tímto bodem bude v každém časovém okamžiku vždy procházet okamžitá osa otáčení $o(t)$, na které leží okamžitý vektor úhlové rychlosti $\omega(t)$. Nechť bod A je současně počátkem čárkované souřadnicové soustavy, která je pevně spojena s vyšetřovaným tělesem, takže se jedná o neinerciální vztažnou soustavu, jelikož těleso vykonává obecný pohyb, viz obr. 16.4. Z tohoto je vidět, že polohový vektor \mathbf{r}_{AX} ukazuje z pohledu čárkované soustavy na nějaký bod v tělese X . Z pohledu čárkované soustavy se jeví tento polohový vektor jako **neměnný**. Na obr. 16.4 je zachycena ještě nečárkovaná soustava s počátkem v bodě O a tuto soustavu uvažujeme jako inerciální. Polohový vektor \mathbf{r}_X ukazuje na bod X a polohový vektor \mathbf{r}_A na bod A z pohledu nečárkované soustavy. Tedy platí, že

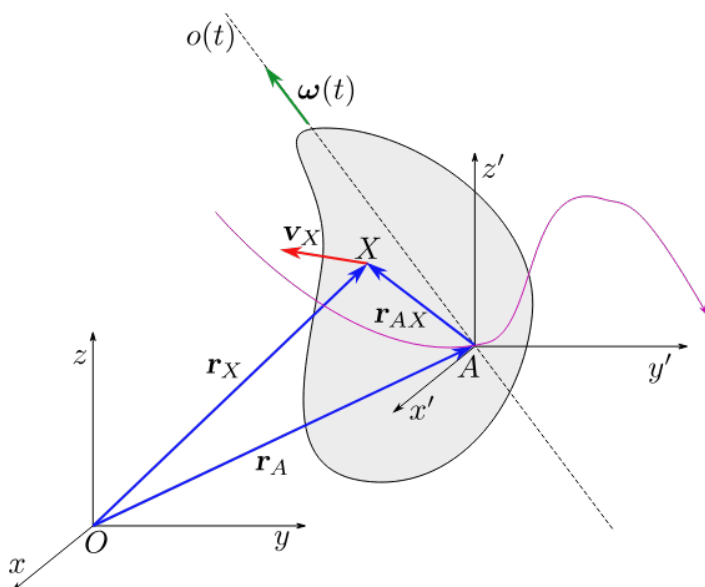
$$\mathbf{r}_X = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{AX} . \quad (16.16)$$

Tuto rovnici zderivujeme podle času, čímž obdržíme časovou změnu polohových vektorů, tak jak je vnímána z pohledu nečárkované soustavy:

$$\frac{d\mathbf{r}_X}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_A}{dt} + \frac{d\mathbf{r}_{AX}}{dt} . \quad (16.17)$$

Tuto rovnici můžeme vyjádřit pomocí okamžitých rychlostí:

$$\mathbf{v}_X = \mathbf{v}_A + \frac{d\mathbf{r}_{AX}}{dt} . \quad (16.18)$$



Obrázek 16.4: Geometrická situace pro popis obecného pohybu tělesa.

Protože čárkovaná soustava je neinerciální vztažnou soustavou, která rotuje kolem okamžité osy otáčení, tak můžeme časovou změnu polohového vektoru \mathbf{r}_{AX} z pohledu nečárkované inerciální vztažné soustavy vyjádřit pomocí již zavedeného operátoru pro neinerciální soustavy (8.11) jako

$$\frac{d\mathbf{r}_{AX}}{dt} = \underbrace{\frac{d'\mathbf{r}_{AX}}{dt}}_{=0} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AX} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AX} . \quad (16.19)$$

Tento výsledek dosadíme do rovnice (16.18), čímž dostáváme:

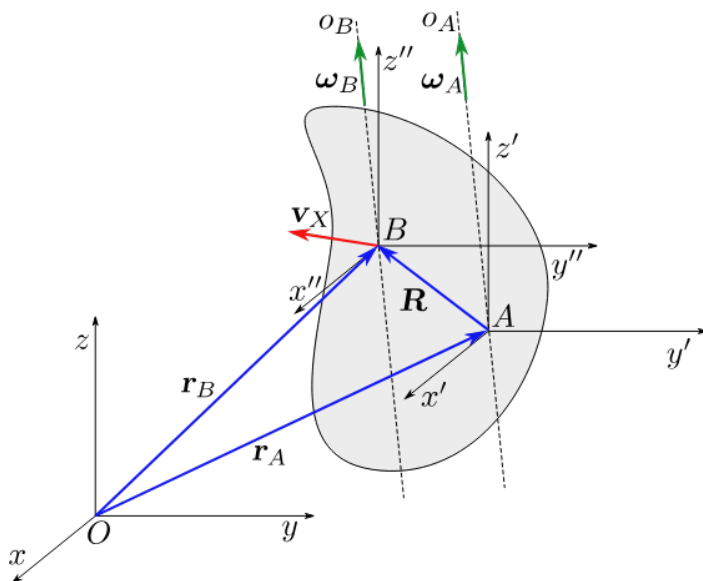
$$\mathbf{v}_X = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AX} . \quad (16.20)$$

V této rovnici \mathbf{v}_X je okamžitá rychlost bodu X z pohledu inerciální soustavy a \mathbf{v}_A je okamžitá rychlost bodu A , tj. počátku neinerciální vztažné soustavy pevně spojené s tělesem a současně představuje okamžitou rychlost posuvného pohybu, jehož trajektorie je vyznačena na obrázku fialovou křivkou. Druhý člen na pravé straně této rovnice reprezentuje okamžitou rychlost otáčivého pohybu kolem okamžité osy otáčení. Rovnice (16.20) je matematickým vyjádřením tzv. **Chaslesovy věty**.

Chaslesova věta

Koná-li tuhé těleso obecný pohyb, je ho možné v každém okamžiku rozložit na pohyb otáčivý a pohyb posuvný a tyto pohyby vyšetřovat zvlášť.

Otázkou zůstává, jak volba bodu A ovlivní okamžitou rychlost otáčivého pohybu, potažmo úhlovou rychlost. Abychom mohli na tuto otázku odpovědět, tak vyjdeme ze situačního obrázku 16.5. Na situačním obrázku jsou zobrazeny dvě neinerciální vztažné soustavy pevně spojené s tělesem. Soustava jednou čárkovaná má počátek



Obrázek 16.5: Geometrická situace pro vyšetřování volby počátku neinerciální vztažné soustavy.

v bodě A a soustava dvakrát čárkovaná má počátek v bodě B . Z tohoto obrázku je zřejmé, že

$$\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{R} . \quad (16.21)$$

Zderivujeme tuto rovnici podle času a použijeme vztah (16.20), ve kterém si rychlosti vyjádříme pomocí časových derivací odpovídajících polohových vektorů, kde $X \equiv B$:

$$\frac{d\mathbf{r}_B}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_A}{dt} + \frac{d\mathbf{R}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_A}{dt} + \boldsymbol{\omega}_B \times \mathbf{R} . \quad (16.22)$$

Ze vztahu (16.21) můžeme psát:

$$\mathbf{r}_A = \mathbf{r}_B - \mathbf{R} . \quad (16.23)$$

Opět tuto rovnici zderivujeme podle času a použijeme vztah (16.20) podobně jako v předchozím případě:

$$\frac{d\mathbf{r}_A}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_B}{dt} + \frac{d\mathbf{R}'}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_B}{dt} + \boldsymbol{\omega}_A \times \mathbf{R}' = \frac{d\mathbf{r}_B}{dt} - \boldsymbol{\omega}_A \times \mathbf{R} , \quad (16.24)$$

kde $\mathbf{R}' = -\mathbf{R}$ je polohový vektor, který ukazuje na bod A z pohledu dvakrát čárkované soustavy.

Odtud

$$\frac{d\mathbf{r}_B}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_A}{dt} + \boldsymbol{\omega}_A \times \mathbf{R} . \quad (16.25)$$

Takže můžeme vztahy (16.22) a (16.25) dát do rovnosti:

$$\frac{d\mathbf{r}_A}{dt} + \boldsymbol{\omega}_B \times \mathbf{R} = \frac{d\mathbf{r}_A}{dt} + \boldsymbol{\omega}_A \times \mathbf{R} . \quad (16.26)$$

Odtud vidíme, že musí platit:

$$\boldsymbol{\omega}_A(t) = \boldsymbol{\omega}_B(t) \equiv \boldsymbol{\omega}(t) . \quad (16.27)$$

Protože jsme body A a B zvolili **libovolně**, tak uvedený výsledek musí platit obecně. Odtud vyplývá věta:

Věta o stejných úhlových rychlostech

Všechny soustavy pevně spojené s tělesem se otáčejí kolem okamžitých os, které jsou rovnoběžné a otáčejí se se stejnou okamžitou úhlovou rychlostí.

Vyjádříme si vztah (16.24) pomocí okamžitých rychlostí a zohledníme závěr (16.27):

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}. \quad (16.28)$$

Z rovnice (16.28) je vidět, že je možné vždy vybrat počátek A souřadnic soustavy pevně spojené s pohybujícím se tělesem tak, že jeho okamžitá translační rychlost je rovna nulovému vektoru ($\mathbf{v}_A = \mathbf{0}$), takže pohyb tělesa v daném okamžiku bude čistou rotací vzhledem k ose procházející bodem A (počátkem), takže rychlost libovolného bodu tělesa pozorovaná z pohledu inerciální vztažné soustavy se bude rovnat jen obvodové rychlosti, tj. $\mathbf{v} \equiv \mathbf{v}_X = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$, kde $\mathbf{r} \equiv \mathbf{r}_{AX}$ je polohový vektor daného bodu tělesa z pohledu neinerciální vztažné soustavy mající počátek v bodě A , pro který platí, že posuvná rychlost je nulová.

Koná-li těleso současně více rotačních pohybů s úhlovými rychlostmi $\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2, \dots$, potom rychlost libovolného bodu tělesa, jehož polohový vektor je \mathbf{r} , bude

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \dots = \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{r} + \dots = (\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2 + \dots) \times \mathbf{r} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}. \quad (16.29)$$

Ze vztahu (16.29) vyplývá, že pohyb nahradíme jedinou rotací s úhlovou rychlostí $\boldsymbol{\omega}$.

16.4 Pohybové rovnice tuhého tělesa

Pro tuhé těleso platí všechny zákony, které byly odvozeny pro soustavu hmotných bodů. Pohybové rovnice tuhého tělesa můžeme vyjádřit následovně

1.

$$\frac{d\mathbf{p}_T}{dt} = \mathbf{F}^e, \quad (16.30)$$

kde $\mathbf{p} = \mathbf{p}_T = m\mathbf{v}_T$ je celková hybnost tělesa o celkové hmotnosti m a \mathbf{F}^e je výslednice vnějších sil.

2.

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}^e. \quad (16.31)$$

První rovnice je matematickým vyjádřením tzv. **těžiškové věty**, která říká, že *těžiště (hmotný střed) tělesa se pohybuje tak, jak by se pohyboval hmotný bod o hmotnosti tělesa pod působením stejných vnějších sil.*

Druhá rovnice je matematickým vyjádřením tzv. **momentové věty (druhá věta impulzová pro těleso)**, která říká, že *časová změna celkového momentu hybnosti*

Předpokládáme homogenní tíhové pole, takže hmotný střed je totožný s těžištěm.

tělesa se rovná momentu vnějších sil vzhledem ke stejné zvolenému pevnému (nepohybujícímu se) bodu².

Z první věty dostaneme přímo pohyb těžiště tělesa, a proto by bylo přirozené počítat i momenty vzhledem k těžišti. Avšak těžiště není pevným bodem (bod, který se nepohybuje) a pohybuje se obecně zrychleně. Tedy není jisté, zda druhá věta impulzová platí i pro těžiště. Abychom mohli v této otázce rozhodnout provedeme následující úvahy.

Uvažujme těleso o hmotnosti m a pevný bod A , pro který platí druhá věta impulzová, tj.

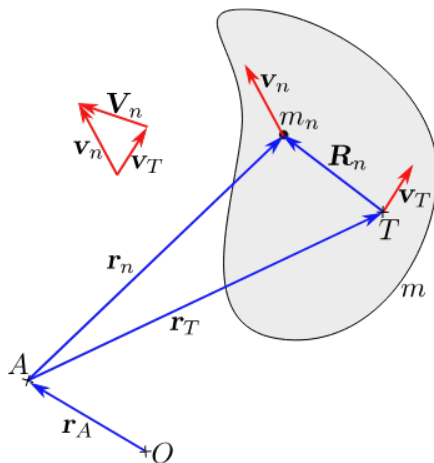
$$\frac{d\mathbf{L}_A}{dt} = \mathbf{M}_A^e, \quad (16.32)$$

kde \mathbf{L}_A je moment hybnosti tělesa vzhledem k bodu A a \mathbf{M}_A^e je moment síly vzhledem k bodu A .

Pro moment hybnosti vzhledem k bodu A platí:

$$\mathbf{L}_A = \sum_n \mathbf{r}_n \times m_n \mathbf{v}_n, \quad (16.33)$$

kde \mathbf{r}_n je polohový vektor n -tého hmotného bodu vzhledem k bodu A . Tento polohový vektor si rozložíme $\mathbf{r}_n = \mathbf{R}_n + \mathbf{r}_T$, kde \mathbf{r}_T je polohový vektor těžiště vzhledem k bodu A a \mathbf{R}_n je polohový vektor n -tého hmotného bodu vzhledem k těžišti, viz obr. 16.6. Rovněž vektor rychlosti n -tého hmotného bodu \mathbf{v}_n rozložíme na dva vektory $\mathbf{v}_n = \mathbf{v}_T + \mathbf{V}_n$, kde \mathbf{v}_T je rychlost těžiště a \mathbf{V}_n doplňková rychlost n -tého hmotného bodu. Dosazením do vztahu (16.33) dostaneme:



Obrázek 16.6: Geometrická situace k určení druhé věty impulzové vzhledem k těžišti.

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_A &= \sum_n ([\mathbf{R}_n + \mathbf{r}_T] \times m_n (\mathbf{v}_T + \mathbf{V}_n)) = \\ &= \left(\sum_n m_n \mathbf{R}_n \right) \times \mathbf{v}_T + \sum_n \mathbf{R}_n \times m_n \mathbf{V}_n + \mathbf{r}_T \times \sum_n m_n \mathbf{V}_n + \mathbf{r}_T \times m \mathbf{v}_T. \end{aligned} \quad (16.34)$$

²Dá se ukázat, že tímto bodem může být i hmotný střed, viz níže.

S ohledem na vztah (14.16) platí

$$m\mathbf{r}_T = \sum_n m_n \mathbf{R}_n, \quad (16.35)$$

kde polohový vektor těžiště vzhledem k těžišti je $\mathbf{r}_T = \mathbf{0}$. V důsledku této skutečnosti je vztah (16.35) roven nulovému vektoru, tj.

$$\sum_n m_n \mathbf{R}_n = \mathbf{0}. \quad (16.36)$$

Celková hybnost tělesa vzhledem k těžišti musí být rovněž nulová, tj.

$$\sum_n m_n \mathbf{V}_n = \sum_n m_n \frac{d\mathbf{R}_n}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_n m_n \mathbf{R}_n = \mathbf{0}. \quad (16.37)$$

S ohledem na rovnosti (16.36) a (16.37) upravíme vztah (16.34)

$$\mathbf{L}_A = \mathbf{r}_T \times m\mathbf{v}_T + \sum_n \mathbf{R}_n \times m_n \mathbf{V}_n = \mathbf{r}_T \times \mathbf{p}_T + \mathbf{L}_T, \quad (16.38)$$

kde $\mathbf{p}_T = m\mathbf{v}_T$ a \mathbf{L}_T je moment hybnosti tělesa vzhledem k těžišti.

Pro moment síly vzhledem k bodu A dospějeme k analogickému transformačnímu vztahu jako v případě momentu hybnosti vzhledem k témuž bodu (16.38), tedy

$$\mathbf{M}_A^e = \mathbf{r}_T \times \mathbf{F}^e + \sum_n \mathbf{R}_n \times \mathbf{F}_n^e = \mathbf{r}_T \times \mathbf{F}^e + \mathbf{M}_T^e, \quad (16.39)$$

kde \mathbf{F}^e je výslednice vnějších sil působících na těleso.

Po dosazení vztahů (16.38) a (16.39) do rovnice (16.32) a po příslušném derivování dostaneme

$$\underbrace{\frac{d\mathbf{r}_T}{dt} \times \mathbf{p} + \mathbf{r}_T \times \frac{d\mathbf{p}}{dt}}_{=\mathbf{v}_T \times \mathbf{p} = \mathbf{0}} + \frac{d\mathbf{L}_T}{dt} = \mathbf{r}_T \times \mathbf{F}^e + \mathbf{M}_T^e. \quad (16.40)$$

Z první věty impulzové platí, že $d\mathbf{p}/dt = \mathbf{F}^e$, takže se nám rovnice (16.40) redukuje na

$$\frac{d\mathbf{L}_T}{dt} = \mathbf{M}_T^e. \quad (16.41)$$

Tato rovnice vyjadřuje **momentovou větu vzhledem k těžišti** (druhou větu impulzovou vzhledem k těžišti) tělesa. Dokázali jsme, že momentová věta platí nejen pro inerciální body, ale i pro těžiště tělesa bez ohledu na jeho pohyb³.

16.5 Rovnováha tuhého tělesa

Obecně jsou podmínky rovnováhy tuhého tělesa stanoveny takto:

Těleso je v rovnováze, když výslednice vnějších sil, která na něj působí, je nulová,

$$\mathbf{F}^e = \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{F}_\alpha^e = \mathbf{0} \quad (16.42)$$

³Těžiště tělesa se obecně pohybuje neinerciálně.

a výsledný moment vnějších sil, které na něj působí, je nulový,

$$\mathbf{M}^e = \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{M}_{\alpha}^e = \mathbf{0} . \quad (16.43)$$

Je-li těleso před působením vnějších sil, které splňují podmínky (16.42) a (16.43), v klidu, zůstane v klidu i nadále. Tento případ se označuje jako **statická rovnováha**. Není-li těleso před působením vnějších sil, které splňují podmínky (16.42) a (16.43), v klidu, může konat řadu různých pohybů. Tedy podmínky rovnováhy (16.42) a (16.43) jsou nutnými, ale ne postačujícími, podmínkami pro to, aby těleso bylo v klidu.

16.6 Otáčivý pohyb tělesa kolem pevné osy

16.6.1 Kinetická energie a moment setrvačnosti tuhého tělesa

Při otáčivém pohybu tuhého tělesa kolem pevné osy úhlovou rychlostí $\boldsymbol{\omega} = \omega \boldsymbol{\omega}^0$ (předpokládejme, že těleso posuvný pohyb nekoná) se jeho každý bod pohybuje po kružnici se středem na ose otáčení se stejnou úhlovou rychlostí, ale rozdílnou obvodovou rychlostí. Označme hmotnost bodu tuhého tělesa m_n , které se nachází od osy otáčení tuhého tělesa ve vzdálenosti r_n , viz obr. 16.7. Obvodová rychlost tohoto bodu je:

$$\mathbf{v}_n = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_n = \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}_{n\parallel} + \mathbf{r}_{n\perp}) = \underbrace{\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{n\parallel}}_{=\mathbf{0}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{n\perp} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{n\perp} . \quad (16.44)$$

Odtud pro velikost obvodové rychlosti n -tého hmotného bodu můžeme psát:

$$v_n = \omega r_{n\perp} . \quad (16.45)$$

Celková **rotační kinetická energie** je dána součtem kinetických energií všech bodů, které tvoří uvažované těleso:

$$T_r = \sum_n \frac{1}{2} m_n v_n^2 . \quad (16.46)$$

Dosazením za obvodovou rychlost ze vztahu (16.45) do vztahu (16.46) dostaneme

$$T_r = \sum_n \frac{1}{2} m_n \omega^2 r_{n\perp}^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \sum_n m_n r_{n\perp}^2 . \quad (16.47)$$

Suma ve vztahu (16.47) na rychlosti otáčení nezávisí, ale je dána jen geometrickým rozložením hmoty tělesa vzhledem k ose. Z tohoto důvodu zavedeme fyzikální veličinu

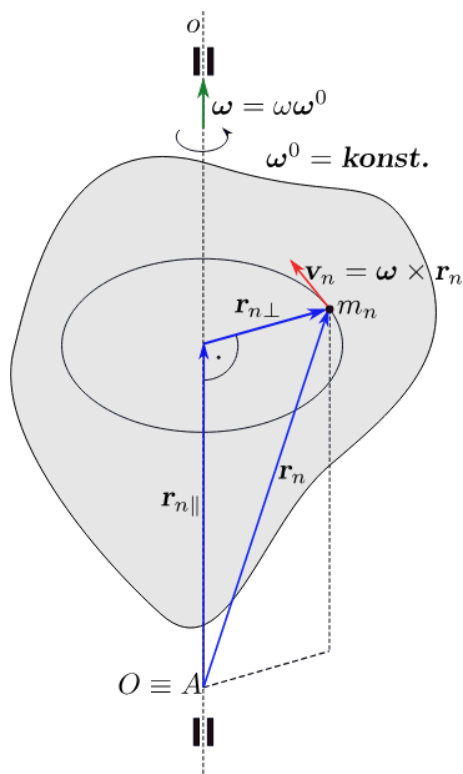
$$J = \sum_n m_n r_{n\perp}^2 , \quad (16.48)$$

která se nazývá **moment setrvačnosti vzhledem k ose otáčení**.

Vztah (16.47) je možné přepsat jako

$$T_r = \frac{1}{2} J \omega^2 . \quad (16.49)$$

Připomeňme, že
 $\boldsymbol{\omega} \perp \mathbf{r}_{n\perp}$.



Obrázek 16.7: Rotace tělesa kolem pevné osy.

V případě, že je hmota v tělese rozložena spojitě, tak na základě převodního vztahu (16.6) můžeme přepsat vztah pro moment setrvačnosti (16.48) do následujícího tvaru

$$J = \int_m r_{\perp}^2 dm = \iiint_V \rho(\mathbf{r}) r_{\perp}^2 dV, \quad (16.50)$$

kde r_{\perp} je vzdálenost od osy otáčení.

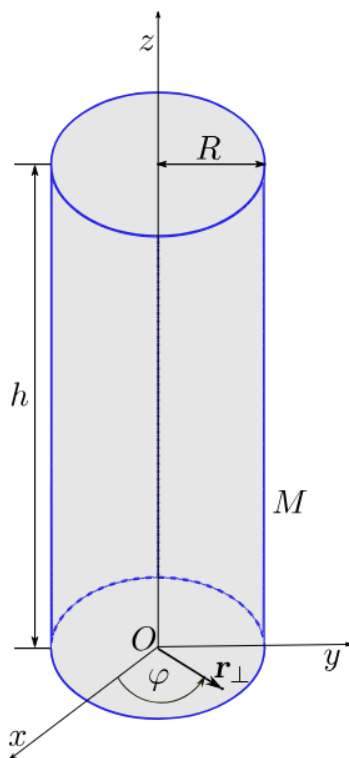
Pozn.: Všechny výše uvedené vztahy jsou platné i pro případ čisté rotace kolem pevného bodu, kdy osu otáčení chápeme jako okamžitou.

Příklad 16.6.1

Spočítejte moment setrvačnosti vzhledem k ose procházející středy podstav homogenního válce ($\rho = konst.$), který má poloměr R , výšku h a hmotnost M , viz obr. 16.8.

Řešení:

Výpočet provedeme pomocí válcových souřadnic na základě vztahu (16.50), kam za element objemu dosadíme (4.81), avšak místo souřadnice ρ použijeme r_{\perp} (ρ jsme použili pro označení objemové hustoty), přičemž válcové souřadnice nabývají



Obrázek 16.8: Homogenní válec.

hodnot: $0 \leq \varphi < 2\pi$, $0 \leq r_{\perp} \leq R$, $0 \leq z \leq h$:

$$J = \iiint_{V(\text{válec})} \rho r_{\perp}^2 dV = \rho \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^R r_{\perp}^3 dr_{\perp} d\varphi dz = \rho \int_0^h \int_0^{2\pi} \frac{R^4}{4} d\varphi dz =$$

$$\rho \int_0^h 2\pi \frac{R^4}{4} dz = 2\pi \rho h \frac{R^4}{4} = \frac{1}{2} \rho (\pi R^2 h) R^2 = \frac{1}{2} \rho V R^2 = \frac{1}{2} M R^2. \quad (16.51)$$

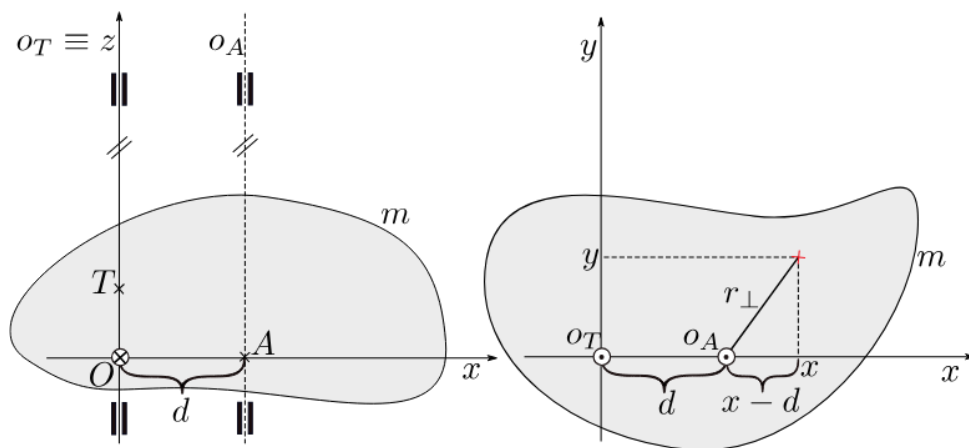
Tedy hledaný moment setrvačnosti homogenního válcového tělesa je:

$$J = \frac{1}{2} M R^2. \quad (16.52)$$

16.6.2 Steinerova věta

Nyní budeme hledat vztah mezi momentem setrvačnosti vzhledem k ose o_T jdoucí těžištěm (hmotným středem) T a vzhledem k ní rovnoběžné ose o_A jdoucí bodem A . Nechť vzdálenost těchto os je d , viz obrázek 16.9. Kartézskou souřadnicovou soustavu volíme tak, aby osa z byla totožná s osou jdoucí těžištěm a osa x procházela jak těžištěm, tak bodem A . Z definice je moment setrvačnosti vzhledem k ose jdoucí bodem A roven:

$$J_A = \int_m r_{\perp}^2 dm. \quad (16.53)$$



Obrázek 16.9: Dva různé pohledy na těleso, kterým prochází osy otáčení o_T a o_A .

Na základě Pythagorovy věty můžeme pro vzdálenost elementu hmotnosti od osy otáčení o_A psát, že $r_{\perp}^2 = (x - d)^2 + y^2$, viz obr. 16.9, pak můžeme vztah (16.53) upravit jako

$$J_A = \int_m [(x - d)^2 + y^2] dm = \int_m (d^2 - 2xd + x^2 + y^2) dm = \\ d^2 \underbrace{\int_m dm}_m - 2d \int_m x dm + \underbrace{\int_m (x^2 + y^2) dm}_{J_T} = md^2 - 2d \int_m x dm + J_T. \quad (16.54)$$

Vzhledem k tomu, že těžiště (hmotný střed) leží na ose z , pak musí platit, že $x_T = 0$, tedy podle vztahu (16.8) dostáváme:

$$x_T = 0 = \frac{\int_m x dm}{m}, \Rightarrow \int_m x dm = 0, \quad (16.55)$$

odtud vyplývá, že prostření člen v poslední rovnosti (16.54) je roven nule. Takže můžeme psát, že

$$J_A = J_T + m d^2. \quad (16.56)$$

Vztah (16.56) je matematickým vyjádřením **Steinerovy věty**.

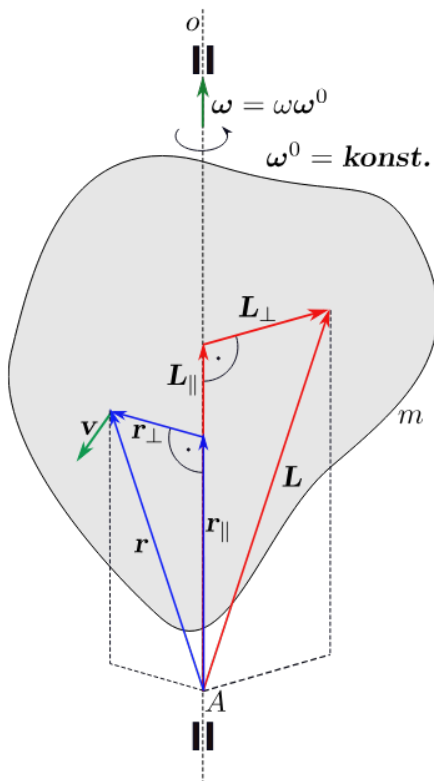
Steinerova věta

Moment setrvačnosti vzhledem k ose rovnoběžné s osou procházející těžištěm je roven součtu momentu setrvačnosti vzhledem k ose jdoucí těžištěm a součinu hmotnosti tělesa s kvadrátem jejich vzdálenosti.

Ze vztahu (16.56) vyplývá, že moment setrvačnosti daného tělesa je vždy **nejmenší** vzhledem k ose procházející těžištěm.

16.6.3 Moment hybnosti vzhledem k pevné ose

Uvažujme tuhé těleso, které se otáčí úhlovou rychlostí ω kolem pevné osy o , viz obrázek 16.10. Moment hybnosti tělesa s diskrétně rozloženou hmotou je definován



Obrázek 16.10: Otáčení tělesa kolem pevné osy s rozkladem momentu hybnosti do složek.

předpisem

$$\mathbf{L} = \sum_n \mathbf{r}_n \times \mathbf{v}_n m_n , \quad (16.57)$$

odtud na základě převodního vztahu (16.6) můžeme pro moment hybnosti tělesa se spojitě rozloženou hmotou psát

$$\mathbf{L} = \int_m \mathbf{r} \times \mathbf{v} dm , \quad (16.58)$$

kde \mathbf{r} je polohový vektor, který vztahujeme k zvolenému bodu A . Moment hybnosti \mathbf{L} obecně závisí na volbě referenčního bodu A . Pokud referenční bod A zvolíme přímo na ose rotace o , pak pro rychlost rotačního pohybu platí vztah

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} , \quad (16.59)$$

z něhož je zřejmé, že vektor rychlosti \mathbf{v} je vždy kolmý k ose rotace o . Provedeme-li rozklad polohového vektoru \mathbf{r} na složku $\mathbf{r}_{||}$, která je rovnoběžná s osou rotace, a složku \mathbf{r}_{\perp} kolmou k ose rotace (viz obr. 16.10), pak platí, že

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_{||} + \mathbf{r}_{\perp} . \quad (16.60)$$

Dosazením vztahu (16.60) do rovnosti (16.59) dostaneme:

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}_{||} + \mathbf{r}_{\perp}) = \underbrace{\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{||}}_{=0} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\perp} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\perp} \quad (16.61)$$

Za povšimnutí stojí skutečnost, že v případě volby referenčního bodu A na ose otáčení, nezávisí složka \mathbf{r}_\perp na jeho poloze na ose.

Dosadíme výraz (16.60) do definičního vztahu (16.58)

$$\mathbf{L} = \int_m (\mathbf{r}_\parallel + \mathbf{r}_\perp) \times \mathbf{v} dm = \int_m \mathbf{r}_\parallel \times \mathbf{v} dm + \int_m \mathbf{r}_\perp \times \mathbf{v} dm = \mathbf{L}_\perp + \mathbf{L}_\parallel . \quad (16.62)$$

Jak je vidět na obrázku 16.10, složka \mathbf{L}_\parallel je rovnoběžná s osou rotace, kdežto složka \mathbf{L}_\perp je na ní kolmá. Složku \mathbf{L}_\parallel nazýváme **momentem hybnosti vzhledem k ose rotace**. Určíme tuto složku podle definičního předpisu (16.58) a vztahu (16.62), přičemž použijeme pravidlo pro dvojitý vektorový součin „bac-cab“ (viz (4.34))

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_\parallel &= \int_m \mathbf{r}_\perp \times \mathbf{v} dm = \int_m \mathbf{r}_\perp \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_\perp) dm = \int_m r_\perp^2 \boldsymbol{\omega} dm - \int_m \mathbf{r}_\perp \overbrace{(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}_\perp)}^{=0} dm = \\ &= \boldsymbol{\omega} \int_m r_\perp^2 dm . \end{aligned} \quad (16.63)$$

S ohledem na vztah (16.50) můžeme výsledek (16.63) přepsat jako

$$\mathbf{L}_\parallel = J \boldsymbol{\omega} , \quad (16.64)$$

kde J je moment setrvačnosti tělesa vzhledem k ose otáčení o .

Příčná složka momentu hybnosti \mathbf{L}_\perp nemá na dynamiku rotujícího tělesa s pevnou osou vliv, má pouze vliv na silové reakce v ložiscích osy. Z tohoto důvodu se jí nebudeme v dalších úvahách zabývat.

16.6.4 Pohybová rovnice rotujícího tělesa kolem pevné osy

Z druhé věty impulzové můžeme psát, že

$$\frac{d\mathbf{L}_\parallel}{dt} = \mathbf{M}_\parallel^e , \quad (16.65)$$

kde \mathbf{M}_\parallel^e je **moment vnějších sil vzhledem k ose otáčení**.

Vztah (16.65) představuje podélnou složku druhé věty impulzové.

Pro výsledný moment vnějších sil působících na uvažované těleso můžeme psát:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^e &= \sum_n \mathbf{r}_n \times \mathbf{F}_n^e = \sum_n [(\mathbf{r}_{n\perp} + \mathbf{r}_{n\parallel}) \times (\mathbf{F}_{n\perp}^e + \mathbf{F}_{n\parallel}^e)] = \\ &= \sum_n \underbrace{(\mathbf{r}_{n\parallel} \times \mathbf{F}_{n\parallel}^e)}_{=0} + \mathbf{r}_{n\parallel} \times \mathbf{F}_{n\perp}^e + \mathbf{r}_{n\perp} \times \mathbf{F}_{n\parallel}^e + \underbrace{(\mathbf{r}_{n\perp} \times \mathbf{F}_{n\perp}^e)}_{=\mathbf{M}_{n\parallel}^e} . \end{aligned} \quad (16.66)$$

Druhé a třetí členy v poslední sumaci jsou kolmé k ose, tedy nemají vliv na dynamiku rotujícího tělesa. Ze vztahu (16.66) spočítáme moment vnějších sil vzhledem k ose způsobem

$$\mathbf{M}_\parallel^e = \sum_n \mathbf{r}_{n\perp} \times \mathbf{F}_{n\perp}^e . \quad (16.67)$$

Do vztahu (16.65) dosadíme ze vztahu (16.64):

$$\frac{d(J\boldsymbol{\omega})}{dt} = \mathbf{M}_\parallel^e . \quad (16.68)$$

Rovnice (16.68) představuje pohybovou rovnici tělesa rotujícího kolem pevné osy. Jestliže se moment setrvačnosti tělesa rotujícího kolem pevné osy s časem nemění, je možné přepsat pohybovou rovnici (16.68) do tvaru:

$$J \frac{d\omega}{dt} = J\varepsilon = \mathbf{M}_{\parallel}^e . \quad (16.69)$$

Vzhledem k rovnoběžnosti vektorů ε a \mathbf{M}_{\parallel}^e , pracujeme zpravidla s pohybovou rovnicí ve skalárním tvaru, tj.

$$J\varepsilon = M_{\parallel}^e . \quad (16.70)$$

Jestliže na těleso nebudou působit žádné síly (**izolované těleso**) či jen síly nemající otáčivý účinek na těleso, potom $M_{\parallel}^e = 0$, tedy na základě vztahu (16.68) můžeme psát:

$$\frac{d(J\omega)}{dt} = 0 , \quad (16.71)$$

tj.

$$L_{\parallel} = J\omega = \text{konst.} \quad (16.72)$$

Vztah (16.72) je matematickým vyjádřením **Zákona zachování momentu hybnosti pro tuhé těleso rotující kolem pevné osy**.

Ze vztahu (16.72) je možné psát, že

$$J_1\omega_1 = J_2\omega_2 . \quad (16.73)$$

Odtud vyplývá, že dojde-li ke změně momentu setrvačnosti $J_1 \rightarrow J_2$ a $J_1 \neq J_2$, pak se musí změnit i úhlová rychlost otáčejícího se tělesa na hodnotu:

$$\omega_2 = \frac{J_1}{J_2}\omega_1 . \quad (16.74)$$

Platí-li relace $J_1 > J_2$, potom $\omega_2 > \omega_1$.

16.6.5 Práce a výkon vnějších sil při rotačním pohybu kolem pevné osy

Vyjádříme si obvodovou rychlost \mathbf{v}_n hmotného bodu rotujícího tělesa kolem pevné osy úhlovou rychlostí $\omega = \omega\omega^0$, kde $\omega^0 = \text{konst.}$:

$$\mathbf{v}_n = \frac{d\mathbf{r}_n}{dt} = \omega \times \mathbf{r}_n = \omega\omega^0 \times \mathbf{r}_n = \frac{d\varphi}{dt}\omega^0 \times \mathbf{r}_n = \frac{d\varphi}{dt} \times \mathbf{r}_n . \quad (16.75)$$

Tedy

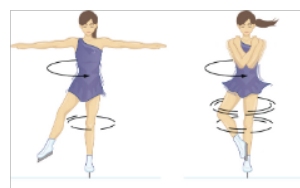
$$\frac{d\mathbf{r}_n}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \times \mathbf{r}_n , \quad (16.76)$$

kde

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega . \quad (16.77)$$

Odtud dostáváme, že

$$d\mathbf{r}_n = \left(\frac{d\varphi}{dt} \times \mathbf{r}_n \right) dt = d\varphi \times \mathbf{r}_n , \quad (16.78)$$



kde $d\mathbf{r}_n = d\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{r}_n$ představuje posunutí působistiště n -té vnější síly působící na n -tý hmotný bod při pootočení tělesa o úhel $d\varphi$. Pro element práce vnějších sil můžeme při použití rovnosti (16.78) psát, že

$$dA = \sum_n \mathbf{F}_n^e \cdot d\mathbf{r}_n = \sum_n \mathbf{F}_n^e \cdot (d\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{r}_n). \quad (16.79)$$

Využijeme pravidla pro smíšený součin (4.37):

$$\mathbf{F}_n^e \cdot (d\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{r}_n) = d\boldsymbol{\varphi} \cdot (\mathbf{r}_n \times \mathbf{F}_n^e) \quad (16.80)$$

k úpravě vztahu (16.79)

$$dA = d\boldsymbol{\varphi} \cdot \sum_n \mathbf{r}_n \times \mathbf{F}_n^e = d\boldsymbol{\varphi} \cdot \sum_n \mathbf{M}_n^e = \mathbf{M}^e \cdot d\boldsymbol{\varphi}. \quad (16.81)$$

Provedeme integraci vztahu (16.81)

$$A = \int \mathbf{M}^e \cdot d\boldsymbol{\varphi} = \int (\mathbf{M}_{\parallel}^e + \mathbf{M}_{\perp}^e) \cdot d\boldsymbol{\varphi} = \int M_{\parallel}^e d\varphi. \quad (16.82)$$

Ze vztahu (16.82) vyplývá, že práci při rotačním pohybu konají jen vnější síly, které mají nenulový podélný moment M_{\parallel}^e vzhledem k ose otáčení. Reakce ložisek, ve kterých je osa otáčení uchycena, práci nekonají. Vztah (16.82) platí i pro rotaci tělesa kolem pevného bodu.

V případě, že je otáčivý moment stálý, tj. $M_{\parallel}^e = konst.$, potom je možné přímo ze vztahu (16.82) psát, že

$$A = M_{\parallel}^e \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi = M_{\parallel}^e (\varphi_2 - \varphi_1) = M_{\parallel}^e \Delta\varphi. \quad (16.83)$$

Z definice pro okamžitý výkon vnějších sil s přihlédnutím ke vztahům (16.81) a (16.77) dostáváme, že

$$P^e = \frac{dA}{dt} = \frac{\mathbf{M}^e \cdot d\boldsymbol{\varphi}}{dt} = \mathbf{M}^e \cdot \boldsymbol{\omega} = (\mathbf{M}_{\parallel}^e + \mathbf{M}_{\perp}^e) \cdot \boldsymbol{\omega} = \mathbf{M}_{\parallel}^e \cdot \boldsymbol{\omega} = M_{\parallel}^e \omega, \quad (16.84)$$

kde P^e je okamžitý výkon vnějších sil při rotačním pohybu.

Ze vztahu (16.82) pro konstantní moment setrvačnosti tělesa při použití vztahů (16.49), (16.69) a (16.77) vyplývá:

$$A = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_{\parallel}^e d\varphi = \int_{\omega_1}^{\omega_2} J \frac{d\omega}{dt} \omega dt = J \int_{\omega_1}^{\omega_2} \omega d\omega = \frac{1}{2} J (\omega_2^2 - \omega_1^2) = T_{r2} - T_{r1}, \quad (16.85)$$

což je v souladu s obecným závěrem (9.23).

Příklad 16.6.2

Homogenní válec o hmotnosti $m = 5$ kg a poloměru $r = 0,05$ m rotuje kolem své centrální osy z klidu s konstantním úhlovým zrychlením $\varepsilon = 3 \text{ rad s}^{-2}$. Spočítejte velikost momentu hybnosti vnější síly vzhledem k ose otáčení, který je příčinou úhlového zrychlení, dále práci, kterou vykonají vnější síly po sedmi otáčkách válce a kinetickou energii válce po jeho sedmi otáčkách.

Řešení:

Pro výpočet momentu vnějších sil vyjdeme z pohybové rovnice pro rotační pohyb kolem pevné osy otáčení (16.70), kde použijeme moment setrvačnosti válce (16.52) a dosadíme hodnoty ze zadání:

$$M_{\parallel}^e = J\varepsilon = \frac{1}{2}mr^2\varepsilon = 0,01875 \text{ Nm} . \quad (16.86)$$

Úhel otočení po sedmi otáčkách je:

$$\Delta\varphi = 7 \cdot 2\pi = 14\pi \text{ rad} . \quad (16.87)$$

Tento úhel dosadíme do vztahu (16.83):

$$A = M_{\parallel}^e \Delta\varphi = 0,2625\pi \text{ J} . \quad (16.88)$$

Protože byl válec v počátku v klidu, tak se rotační kinetická energie musí rovnat vykonané práci, viz vztah (16.85), kde $T_{r1} = 0 \text{ J}$. O této skutečnosti se můžeme přímo přesvědčit dosazením do vztahu (16.85). Abychom mohli do tohoto vztahu dosadit rotační kinetickou energii válce, tak nejdříve musíme spočítat jeho úhlovou rychlost po sedmi otáčkách. Vyjdeme ze vztahu (6.64):

$$\Delta\varphi = \frac{1}{2}\varepsilon t^2 \quad \Rightarrow \quad t^2 = \frac{2\Delta\varphi}{\varepsilon} . \quad (16.89)$$

Dále použijeme vztah (6.63), který umocníme na kvadrát a dosadíme za t^2 ze vztahu (16.89):

$$\omega^2 = \varepsilon^2 t^2 = \varepsilon^2 \frac{2\Delta\varphi}{\varepsilon} = 2\Delta\varphi\varepsilon . \quad (16.90)$$

K výpočtu rotační kinetické energie použijeme vztah (16.49):

$$T_r = \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{2}mr^2 2\Delta\varphi\varepsilon = 0,2625\pi \text{ J} . \quad (16.91)$$

Z porovnání výsledků je zřejmé, že $A = T_r$.

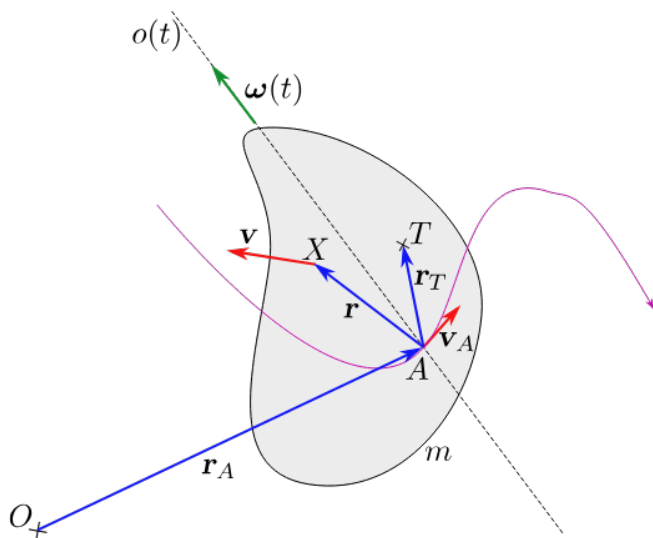
16.7 Rotace kolem pevného bodu

Uvažujme těleso o hmotnosti m konající obecný pohyb, který, jak již víme, je složený z pohybu translačního a rotačního kolem pevného bodu. Označme tento pevný bod jako A . Tímto bodem bude procházet okamžitá osa rotace $o(t)$ s okamžitou úhlovou rychlostí $\omega(t)$, viz obr. 16.11.

16.7.1 Kinetická energie obecně pohybujícího se tělesa a Königova věta

Na základě převodního pravidla (16.6) si vyjádříme vztah pro kinetickou energii tělesa se spojitě rozloženou hmotou o celkové hmotnosti m :

$$T = \sum_n T_n = \frac{1}{2} \sum_n m_n v_n^2 \quad \Rightarrow \quad T = \frac{1}{2} \int_m v^2 dm . \quad (16.92)$$



Obrázek 16.11: Obecný pohyb tělesa.

Rychlost nějakého bodu tělesa X je dána vztahem (16.20), kde označíme $\mathbf{v}_X \equiv \mathbf{v}$ a $\mathbf{r}_{AX} \equiv \mathbf{r}$ (viz obr. 16.11):

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} . \quad (16.93)$$

Odtud můžeme psát:

$$\begin{aligned} v^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} &= (\mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \cdot (\mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = v_A^2 + \mathbf{v}_A \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{v}_A + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})^2 = \\ &= v_A^2 + 2\mathbf{v}_A \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})^2 . \end{aligned} \quad (16.94)$$

Poslední člen si vyjádříme pomocí vektorové identity:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})^2 = a^2 b^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 , \quad (16.95)$$

přičemž si rozložíme polohový vektor \mathbf{r} na dva vektory, kdy jeden je rovnoběžný s okamžitou osou rotace a druhý je na ni kolmý: $\mathbf{r} = \mathbf{r}_{\parallel} + \mathbf{r}_{\perp}$, tedy

$$(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})^2 = (\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}_{\parallel} + \mathbf{r}_{\perp}))^2 = (\underbrace{\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\parallel}}_{=0} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\perp})^2 = \omega^2 r_{\perp}^2 - (\underbrace{\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}_{\perp}}_{=0})^2 = \omega^2 r_{\perp}^2 . \quad (16.96)$$

Takže vztah pro kvadrát velikosti rychlosti (16.94) můžeme odtud vyjádřit jako

$$v^2 = v_A^2 + 2\mathbf{v}_A \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + \omega^2 r_{\perp}^2 . \quad (16.97)$$

Tento vztah dosadíme za v^2 ve vztahu pro kinetickou energii (16.92), přičemž k úpravě použijeme vztahy (16.8) a (16.50):

$$T = \frac{1}{2} \int_m v^2 dm = \frac{1}{2} \int_m (v_A^2 + 2\mathbf{v}_A \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + \omega^2 r_\perp^2) dm = \frac{1}{2} \int_m v_A^2 dm + \int_m (\mathbf{v}_A \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) dm + \frac{1}{2} \int_m \omega^2 r_\perp^2 dm = \frac{1}{2} v_A^2 \underbrace{\int_m dm}_{=m} + \mathbf{v}_A \cdot \left(\boldsymbol{\omega} \times \underbrace{\int_m \mathbf{r} dm}_{=m\mathbf{r}_T} \right) + \frac{1}{2} \omega^2 \underbrace{\int_m r_\perp^2 dm}_{=J} = \frac{1}{2} m v_A^2 + \mathbf{v}_A \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_T) m + \frac{1}{2} J \omega^2 . \quad (16.98)$$

Tedy kinetická energie obecně se pohybujícího se tělesa je dána následujícím vztahem, kde ještě použijeme úpravu na základě identity pro smíšený součin (4.37):

$$T = \frac{1}{2} m v_A^2 + \frac{1}{2} J \omega^2 + \mathbf{v}_A \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_T) m = \frac{1}{2} m v_A^2 + \frac{1}{2} J \omega^2 + \mathbf{r}_T \cdot (\mathbf{v}_A \times \boldsymbol{\omega}) m . \quad (16.99)$$

První člen na pravé straně reprezentuje kinetickou energii translačního pohybu a druhý člen odpovídá rotační kinetické energii. Velikost posledního členu souvisí s volbou počátku vztažné soustavy pevně spojené s pohybujícím se tělesem a je nulový za těchto čtyřech okolností:

1. Zvolený počátek A je totožný s těžištěm tělesa ($A \equiv T$, tj. těžišťová soustava) $\Rightarrow \mathbf{r}_T = \mathbf{0}$.
2. Translační pohyb se děje ve směru okamžité osy rotace, tj. $\mathbf{v}_A \parallel \boldsymbol{\omega}$.
3. Koná-li těleso čistě posuvný pohyb, tj. $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$.
4. Těleso koná čistě rotační pohyb, tj. $\mathbf{v}_A = \mathbf{0}$.

Pro vyjádření rychlosti těžiště použijeme vztah (16.20), kde $\mathbf{v}_T \equiv \mathbf{v}_X$ a $\mathbf{r}_T \equiv \mathbf{r}_{AX}$:

$$\mathbf{v}_T = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_T \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_T = \mathbf{v}_T - \mathbf{v}_A . \quad (16.100)$$

Výsledný vztah dosadíme do rovnosti (16.99), čímž dostaneme:

$$T = \frac{1}{2} m v_A^2 + \frac{1}{2} J \omega^2 + \mathbf{v}_A \cdot (\mathbf{v}_T - \mathbf{v}_A) m . \quad (16.101)$$

Tento vztah je matematickým vyjádřením **Königovy věty**.

Pro těžišťovou soustavu, tj. $A \equiv T$ a $\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_T$, poslední člen na pravé straně vztahu (16.99), resp. (16.101) je nulový, takže pro kinetickou energii vyšetřovaného tělesa dostáváme, že

$$T = \frac{1}{2} m v_T^2 + \frac{1}{2} J_T \omega^2 = T_{tr} + T_r . \quad (16.102)$$

V další části textu budeme předpokládat jen čistě rotační pohyb tělesa (kolem pevného bodu A), takže $\mathbf{v}_A = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$, takže

$$T = \frac{1}{2} J \omega^2 = T_r . \quad (16.103)$$

16.7.2 Moment hybnosti tělesa čistě rotujícího kolem pevného bodu a tenzor setrvačnosti

Pro těleso čistě rotující kolem pevného bodu ($\mathbf{v}_A = \mathbf{0}$) musí platit na základě vztahu (16.20) (kde označíme $\mathbf{v}_X \equiv \mathbf{v}$ a $\mathbf{r}_{AX} \equiv \mathbf{r}$) pro rychlost libovolného bodu tělesa z pohledu inerciální soustavy následující vztah:

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} . \quad (16.104)$$

Pro vztažnou soustavu pevně spojenou s rotujícím tělesem s počátkem v bodě A budeme kvůli jednoduššímu zápisu označovat souřadnice x_1, x_2 a x_3 , tedy i složky vektorů z pohledu této soustavy budou rozlišeny číselnými indexy.

Vyjádříme si moment hybnosti uvažovaného tělesa vzhledem k bodu A (počátek vztažné soustavy) pomocí vztahu (16.58), kam dosadíme ze vztahu (16.104):

$$\mathbf{L} = (L_1, L_2, L_3) = \int_m \mathbf{r} \times \mathbf{v} dm = \int_m \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) dm . \quad (16.105)$$

Pro dvojitý vektorový součin v tomto vztahu použijeme pravidlo „bac-cab“ (viz (4.34)), čímž dostaneme:

$$\mathbf{L} = (L_1, L_2, L_3) = \int_m [r^2 \boldsymbol{\omega} - \mathbf{r}(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r})] dm , \quad (16.106)$$

kde

$$\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3) , \quad r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 , \quad \boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \quad \text{a} \quad \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r} = \sum_{j=1}^3 \omega_j x_j . \quad (16.107)$$

Pro i -tou složku ($i = 1, 2, 3$) vektoru momentu hybnosti uvažovaného tělesa můžeme na základě vztahu (16.106) psát:

$$L_i = \int_m \left[\omega_i r^2 - x_i \sum_{j=1}^3 \omega_j x_j \right] dm , \quad i = 1, 2, 3 . \quad (16.108)$$

Složku vektoru okamžité úhlové rychlosti ω_i si vyjádříme pomocí Kroneckerova delta (4.5) následujícím způsobem:

$$\omega_i = \sum_{j=1}^3 \omega_j \delta_{ij} , \quad i = 1, 2, 3 . \quad (16.109)$$

Za takhle vyjádřenou složku úhlové rychlosti dosadíme do vztahu (16.108) a upravíme:

$$L_i = \int_m \left[r^2 \sum_{j=1}^3 \omega_j \delta_{ij} - x_i \sum_{j=1}^3 \omega_j x_j \right] dm = \sum_{j=1}^3 \omega_j \underbrace{\int_m (r^2 \delta_{ij} - x_i x_j) dm}_{=J_{ij}} . \quad (16.110)$$

Takže odtud dostáváme:

$$L_i = \sum_{j=1}^3 J_{ij} \omega_j, \quad i = 1, 2, 3, \quad (16.111)$$

kde

$$J_{ij} = \int_m (r^2 \delta_{ij} - x_i x_j) dm, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (16.112)$$

jsou složky **tenzoru setrvačnosti**, který můžeme pomocí převodního vztahu (16.6) vyjádřit i pro těleso tvořené soustavou hmotných bodů:

$$J_{ij} = \sum_n (r_n^2 \delta_{ij} - x_{ni} x_{nj}) m_n, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (16.113)$$

Uvažujeme-li objemové těleso ($dm = \rho dV$), tak ze vztahu (16.112) můžeme psát:

$$J_{ij} = \int_m (\delta_{ij} r^2 - x_i x_j) dm = \iiint_V \rho(\mathbf{r}) (\delta_{ij} r^2 - x_i x_j) dV, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (16.114)$$

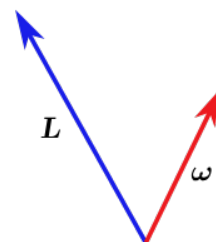
Protože obecně vektor momentu hybnosti \mathbf{L} a vektor úhlové rychlosti $\boldsymbol{\omega}$ tělesa mají nesejdnou orientaci, tak ze vztahu (16.111) vidíme, že složky tenzoru setrvačnosti nám umožňují si vyjádřit jednotlivé složky vektoru momentu hybnosti pomocí složek vektoru úhlové rychlosti a tím je dávají do vztahu.

Tenzor setrvačnosti je tenzorem 2. řádu a v maticovém tvaru si ho pomocí složek můžeme zapsat jako

$$\overleftrightarrow{\mathbf{J}} = \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{pmatrix}. \quad (16.115)$$

Jednotlivé složky tenzoru setrvačnosti si můžeme vyjádřit pomocí vztahů (16.112) nebo (16.113):

$$\overleftrightarrow{\mathbf{J}} = \begin{pmatrix} \int_m (r^2 - x_1^2) dm & - \int_m x_1 x_2 dm & - \int_m x_1 x_3 dm \\ - \int_m x_2 x_1 dm & \int_m (r^2 - x_2^2) dm & - \int_m x_2 x_3 dm \\ - \int_m x_3 x_1 dm & - \int_m x_3 x_2 dm & \int_m (r^2 - x_3^2) dm \end{pmatrix}, \quad (16.116)$$



$$\overleftrightarrow{\mathbf{J}} = \begin{pmatrix} \sum_n m_n (r_n^2 - x_{n1}^2) & -\sum_n m_n x_{n1} x_{n2} & -\sum_n m_n x_{n1} x_{n3} \\ -\sum_n m_n x_{n2} x_{n1} & \sum_n m_n (r_n^2 - x_{n2}^2) & -\sum_n m_n x_{n2} x_{n3} \\ -\sum_n m_n x_{n3} x_{n1} & -\sum_n m_n x_{n3} x_{n2} & \sum_n m_n (r_n^2 - x_{n3}^2) \end{pmatrix}. \quad (16.117)$$

Z maticových vyjádření tenzorů setrvačnosti (16.116) a (16.117) vidíme, že tenzor setrvačnosti $\overleftrightarrow{\mathbf{J}}$ je symetrický tenzor, tj.

$$J_{ij} = J_{ji}. \quad (16.118)$$

To znamená, že tenzor setrvačnosti lze diagonalizovat, což znamená, že pro každý vztažený bod A existuje taková privilegovaná pravoúhlá souřadnicová soustava, že vzhledem k ní všechny deviační momenty vymizí. Osy této význačné souřadnicové soustavy se nazývají **hlavní osy setrvačnosti** tělesa v uvažovaném bodě. Momenty setrvačnosti pro tuto význačnou souřadnicovou soustavu J_1 , J_2 a J_3 se nazývají **hlavní momenty setrvačnosti**. Pro hlavní osy setrvačnosti můžeme tenzor setrvačnosti tedy zapsat jako

$$\overleftrightarrow{\mathbf{J}} = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{pmatrix}. \quad (16.119)$$

Prvky na diagonále matice (16.116) nebo (16.117) nazýváme **momenty setrvačnosti vzhledem k osám**, tj. J_{11} je moment setrvačnosti vzhledem k ose x_1 neboli k ose x , J_{22} je moment setrvačnosti vzhledem k ose x_2 neboli k ose y a J_{33} je moment setrvačnosti vzhledem k ose x_3 neboli k ose z . Prvky matice (16.116) nebo (16.117), které se nacházejí mimo diagonálu se nazývají **deviační momenty**. Deviační momenty jsou mírou dynamické nevyváženosti tělesa při jeho otáčení, více informací viz 16.9.

Pro rotační kinetickou energii (16.103) můžeme s využitím vztahu (16.64) psát:

$$T_r = \frac{1}{2} J \omega^2 = \frac{1}{2} \mathbf{J} \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \mathbf{L}_{\parallel} \cdot \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} (\mathbf{L}_{\parallel} + \mathbf{L}_{\perp}) \cdot \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\omega}. \quad (16.120)$$

Tedy

$$T_r = \frac{1}{2} \mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\omega}. \quad (16.121)$$

Tento vztah nám ukazuje, jak lze si vyjádřit rotační kinetickou energii tělesa pomocí jeho momentu hybnosti a úhlové rychlosti.

Využijeme-li vztahu (16.111), pak je možné vyjádřit rotační kinetickou energii (16.121) jako

$$T_r = \frac{1}{2} \mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 L_i \omega_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 J_{ij} \omega_i \omega_j. \quad (16.122)$$

Takže

$$T_r = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 J_{ij} \omega_i \omega_j . \quad (16.123)$$

Na základě vztahu (16.49) je možné také psát, že

$$T_r = \frac{1}{2} \mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} J \omega^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 J_{ij} \omega_i \omega_j . \quad (16.124)$$

Je zde nutné zmínit, že moment setrvačnosti J je počítán vzhledem k okamžité ose rotace $o(t)$, jejíž orientace je dána jednotkovým vektorem úhlové rychlosti $\boldsymbol{\omega}^0(t)$, takže moment setrvačnosti se obecně s časem může měnit, tak jak se mění orientace okamžité osy otáčení. Proto správně bychom měli moment hybnosti zapisovat způsobem jako $J^{(\boldsymbol{\omega}^0(t))}$, avšak k vůli lepší přehlednosti tak činit nebudeme, ale je nutné si tuto skutečnost uvědomovat.

Pozn.: Je potřeba si uvědomit, že vše bylo odvozováno vzhledem k okamžité ose otáčení, která obecně mění s časem svoji orientaci, tedy vektor úhlové rychlosti se jak do velikosti, tak do orientace s časem také mění, tj. $\boldsymbol{\omega}(t) = \omega(t) \boldsymbol{\omega}^0(t)$. Proto všechny vyskytující se veličiny ve vztazích jsou obecně závislé na čase, takže veličiny uvedené ve vztahu lze použít vždy pro konkrétní časový okamžik. Avšak odtud také vyplývá, že je možné tyto vztahy použít i pro případ rotace tělesa kolem pevné osy.

16.7.3 Moment setrvačnosti vzhledem k libovolné orientaci osy otáčení a elipsoid setrvačnosti

Na základě posledních dvou rovností ve vztahu (16.124) můžeme psát:

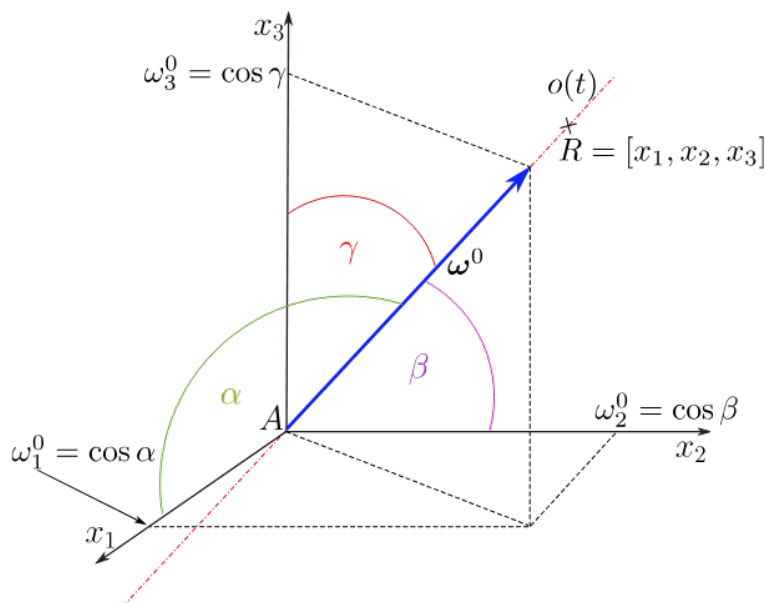
$$J = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 J_{ij} \frac{\omega_i \omega_j}{\omega^2} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 J_{ij} \omega_i^0 \omega_j^0 , \quad (16.125)$$

kde ω_i^0 , resp. ω_j^0 jsou složky jednotkového vektoru úhlové rychlosti: $\boldsymbol{\omega}^0 = (\omega_1^0, \omega_2^0, \omega_3^0)$. Jednotkový vektor úhlové rychlosti je možné si také vyjádřit pomocí jeho směrových kosinů (4.10), viz obr. 16.12, tj.

$$\boldsymbol{\omega}^0 = (\omega_1^0, \omega_2^0, \omega_3^0) = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) . \quad (16.126)$$

Ze vztahu (16.125) je vidět, že i když má těleso sebekomplikovanější tvar a i když je nehomogenní, stačí určit (třeba experimentálně) moment setrvačnosti J vzhledem k šesti různým osám (využíváme toho, že tenzor setrvačnosti je symetrický) $\boldsymbol{\omega}^0$ procházejícím stejným bodem A . Vyřešením příslušné lineární soustavy rovnic pak dopočítáme složky tenzoru setrvačnosti.

Nechť známe složky tenzoru setrvačnosti uvažovaného tělesa, pak když chceme spočítat moment setrvačnosti J vzhledem k ose otáčení procházející bodem A a svírající s osami souřadnicové soustavy pevně spojené s tělesem $(Ax_1x_2x_3)$ směrové úhly α , β a γ (viz obr. 16.12), pak na základě vztahu (16.125), kam za složky



Obrázek 16.12: Jednotkový vektor úhlové rychlosti ω^0 (vztažná soustava pevně spojená s rotujícím tělesem, $Ax_1x_2x_3$).

jenotkového vektoru úhlového zrychlení dosadíme příslušné směrové kosiny, dostáváme:

$$J = J_{11} \cos^2 \alpha + J_{22} \cos^2 \beta + J_{33} \cos^2 \gamma - 2J_{12} \cos \alpha \cos \beta - 2J_{23} \cos \beta \cos \gamma - 2J_{13} \cos \alpha \cos \gamma . \quad (16.127)$$

Na obr. 16.12 je vyznačen bod $R = [x_1, x_2, x_3]$, pro který platí, že

$$|AR| = \frac{1}{\sqrt{J}} . \quad (16.128)$$

Potom na základě vztahů (4.10) můžeme psát, že

$$\cos \alpha = \frac{x_1}{|AR|} = \sqrt{J} x_1 , \quad \cos \beta = \frac{x_2}{|AR|} = \sqrt{J} x_2 , \quad \cos \gamma = \frac{x_3}{|AR|} = \sqrt{J} x_3 . \quad (16.129)$$

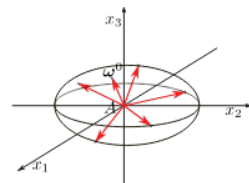
Dosadíme odtud za směrové kosiny do rovnice (16.127), čímž dostaneme:

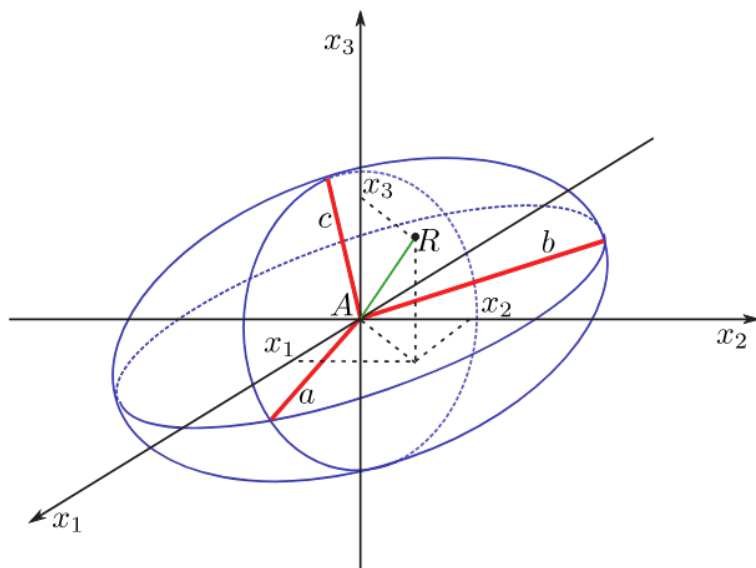
$$J = J_{11} J x_1^2 + J_{22} J x_2^2 + J_{33} J x_3^2 - 2J_{12} J x_1 x_2 - 2J_{23} J x_2 x_3 - 2J_{13} J x_1 x_3 . \quad (16.130)$$

Podělíme tuto rovnici momentem setrvačnosti J , takže dostáváme:

$$J_{11} x_1^2 + J_{22} x_2^2 + J_{33} x_3^2 - 2J_{12} x_1 x_2 - 2J_{23} x_2 x_3 - 2J_{13} x_1 x_3 = 1 . \quad (16.131)$$

Je potřeba si uvědomit, že jak vzdálenost bodu R od bodu A , tak jeho souřadnice závisí na orientaci uvažovaného jednotkového vektoru úhlové rychlosti ω^0 . Když z bodu A budou vektory ω^0 mířit do všech možných směrů, pak pro ně příslušné body R vytvoří geometrické místo bodů a vždy souřadnice těchto bodů budou splňovat rovnici (16.131), která je rovnicí kvadratické plochy představující elipsoid, viz obr. 16.13, kde a , b a c jsou délky jeho poloos. Tento elipsoid nazýváme





Obrázek 16.13: Jednotkový vektor úhlové rychlosti ω^0 (vztažná soustava je pevně spojená s rotujícím tělesem).

elipsoid setrvačnosti.

Jak již bylo zmíněno, vzhledem k tomu, že tenzor setrvačnosti je symetrický, tak existuje význačná souřadnicová soustava, jejíž osy se nazývají hlavní osy setrvačnosti, pro kterou jsou deviační momenty nulové (více kapitola 16.8). Pro takovou soustavu bude mít elipsoid setrvačnosti jednodušší tvar:

$$J_1 x_1^2 + J_2 x_2^2 + J_3 x_3^2 = 1, \quad (16.132)$$

kde $J_1 \equiv J_{11}$, $J_2 \equiv J_{22}$ a $J_3 \equiv J_{33}$ a x_1 , x_2 a x_3 jsou souřadnice v souřadnicové soustavě s hlavními osami setrvačnosti.

Dá se ukázat, že tato význačná soustava je orientována tak, že její osy **splyvají** s hlavními osami elipsoidu setrvačnosti. Kanonický tvar trojosého elipsoidu v kartézských souřadnicích je:

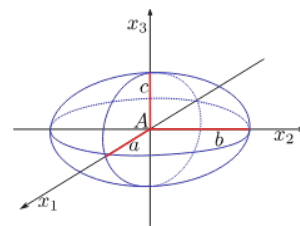
$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} = 1, \quad (16.133)$$

kde a , b a c jsou délky jeho poloos.

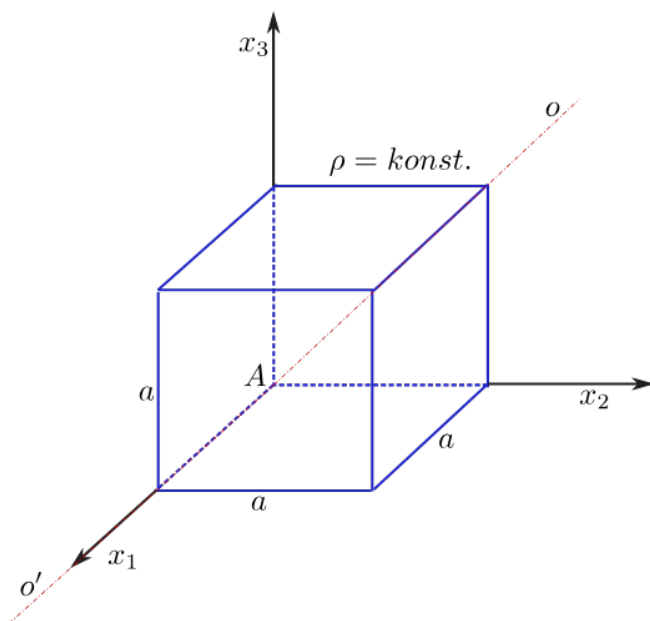
Porovnáním s rovnicí (16.132) získáme následující vztahy mezi hlavními momenty setrvačnosti a délkami poloos elipsoidu setrvačnosti:

$$J_1 = \frac{1}{a^2}, \quad J_2 = \frac{1}{b^2}, \quad J_3 = \frac{1}{c^2}. \quad (16.134)$$

Jsou-li délky poloos elipsoidu setrvačnosti různé, přísluší nejkratší (nejdelší) z nich největší (nejmenší) moment ze všech hodnot momentů setrvačnosti k osám otáčení procházející bodem A .



Příklad 16.7.1



Obrázek 16.14: Homogenní krychle s délkou strany a .

Uvažujme homogenní krychli ($\rho = konst.$), která má hmotnost $M = 3 \text{ kg}$ a délku stran $a = 0,1 \text{ m}$. Nechť její dolní roh leží v počátku souřadnic (A) a odpovídající hrany leží na souřadnicových osách, viz obr. 16.14. Spočítejte moment setrvačnosti vzhledem k ose rotace o , která prochází bodem A a tělesová úhlopříčka krychle je její součástí a k ose rotace o' , která je totožná s osou x_1 . Dále pro obě osy rotace spočítejte rotační kinetickou energii krychle otáčející se úhlovou rychlostí $\omega = 2\pi \text{ rad s}^{-1}$ v pravotočivém smyslu, vektor momentu hybnosti a vektor momentu hybnosti vzhledem k uvažované ose otáčení.

Řešení:

Abychom mohli provést potřebné výpočty, tak si nejprve spočítáme složky tenzoru setrvačnosti podle rovnice (16.112):

$$J_{11} = \rho \int_0^a \int_0^a \int_0^a (x_2^2 + x_3^2) dx_3 dx_2 dx_1 = \rho \int_0^a \int_0^a \int_0^a x_2^2 dx_1 dx_2 dx_3 + \rho \int_0^a \int_0^a \int_0^a x_3^2 dx_1 dx_2 dx_3 = \frac{2}{3} \rho a^5 = \frac{2}{3} M a^2, \quad (16.135)$$

$$M = \rho V = \rho a^3$$

$$J_{12} = -\rho \int_0^a \int_0^a \int_0^a x_1 x_2 dx_3 dx_2 dx_1 = -\rho \int_0^a x_1 dx_1 \int_0^a x_2 dx_2 \int_0^a dx_3 = -\frac{1}{4} \rho a^5 = -\frac{1}{4} M a^2. \quad (16.136)$$

Dalšími výpočty je možné se snadno přesvědčit, že diagonální prvky tenzoru setrvačnosti (momenty setrvačnosti vzhledem k osám) jsou stejné a rovněž všechny

prvky tohoto tenzoru mimo diagonálu (deviační momenty) jsou si rovny, takže

$$\begin{aligned} J_{11} &= J_{22} = J_{33} = \frac{2}{3}Ma^2, \\ J_{12} &= J_{13} = J_{23} = -\frac{1}{4}Ma^2. \end{aligned} \quad (16.137)$$

Pro tenzor setrvačnosti pak dostáváme:

$$\overleftrightarrow{\mathbf{J}} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}Ma^2 & -\frac{1}{4}Ma^2 & -\frac{1}{4}Ma^2 \\ -\frac{1}{4}Ma^2 & \frac{2}{3}Ma^2 & -\frac{1}{4}Ma^2 \\ -\frac{1}{4}Ma^2 & -\frac{1}{4}Ma^2 & \frac{2}{3}Ma^2 \end{pmatrix}. \quad (16.138)$$

1. Osa rotace o :

Abychom určili orientaci osy otáčení o , tak si pro ní spočítáme směrové kosiny ze vztahů (4.10):

$$\cos \alpha = \cos \beta = \cos \gamma = \frac{a}{u} = \frac{\alpha}{\sqrt{3}\alpha} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad (16.139)$$

kde $u = \sqrt{3}a$ je délka tělesové úhlopříčky krychle.

Na základě vztahu (16.127), kam dosadíme za směrové kosiny (16.139) a složky tenzoru setrvačnosti (16.137), spočítáme moment setrvačnosti krychle vzhledem k uvažované ose otáčení o :

$$\begin{aligned} J &= J_{11} \cos^2 \alpha + J_{22} \cos^2 \beta + J_{33} \cos^2 \gamma \\ &\quad - 2J_{12} \cos \alpha \cos \beta - 2J_{23} \cos \beta \cos \gamma - 2J_{13} \cos \alpha \cos \gamma = \frac{Ma^2}{6} = 0,005 \text{ kgm}^2. \end{aligned} \quad (16.140)$$

Rotační kinetickou energii spočítáme na základě vztahu (16.103), do kterého dosadíme:

$$T_r = \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{\pi^2 Ma^2}{3} = \frac{\pi^2 \cdot 10^{-2}}{3} \text{ J}. \quad (16.141)$$

Dále je nutné určit vektor úhlové rychlosti s využitím vztahu (16.126):

$$\boldsymbol{\omega} = \omega \boldsymbol{\omega}^0 = \omega(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}(1, 1, 1). \quad (16.142)$$

Složky vektoru momentu hybnosti spočítáme pomocí vztahu (16.109):

$$L_2 = L_3 = L_1 = J_{11}\omega_1 + J_{12}\omega_2 + J_{13}\omega_3 = \frac{2\pi Ma^2}{6\sqrt{3}} = \frac{\pi \cdot 10^{-2}}{\sqrt{3}} \text{ kgm}^2\text{s}^{-1}, \quad (16.143)$$

tedy

$$\mathbf{L} = \frac{\pi \cdot 10^{-2}}{\sqrt{3}}(1, 1, 1). \quad (16.144)$$

Za povšimnutí stojí, že všechny složky vektoru hybnosti jsou stejné, ale že je tento vektor stejně orientován jako vektor úhlové rychlosti. To znamená, že moment hybnosti vzhledem k ose otáčení o je roven spočítanému momentu hybnosti vzhledem k bodu A , tj. $\mathbf{L} \equiv \mathbf{L}_{\parallel}$.

Můžeme se přesvědčit, že když dosadíme do vztahu (16.121), tak obdržíme stejnou rotační kinetickou energii jako (16.141).

2. Osa rotace o' :

Směrové kosiny pro osu rotace o' jsou:

$$\cos \alpha = 1, \quad \cos \beta = \cos \gamma = 0. \quad (16.145)$$

Na základě vztahu (16.127), kam dosadíme za směrové kosiny (16.139) a složky tenzoru setrvačnosti (16.137), opět spočítáme moment setrvačnosti krychle vzhledem k uvažované ose otáčení o' :

$$\begin{aligned} J &= J_{11} \cos^2 \alpha + J_{22} \cos^2 \beta + J_{33} \cos^2 \gamma \\ &\quad - 2J_{12} \cos \alpha \cos \beta - 2J_{23} \cos \beta \cos \gamma - 2J_{13} \cos \alpha \cos \gamma = \frac{2Ma^2}{3} = 0,02 \text{ kgm}^2. \end{aligned} \quad (16.146)$$

Rotační kinetickou energii spočítáme na základě vztahu (16.103), do kterého dosadíme:

$$T_r = \frac{1}{2} J \omega^2 = \frac{4\pi^2 Ma^2}{3} = 4\pi^2 \cdot 10^{-2} \text{ J}. \quad (16.147)$$

Vektor úhlové rychlosti s využitím vztahu (16.126) je:

$$\boldsymbol{\omega} = \omega \boldsymbol{\omega}^0 = \omega(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) = 2\pi(1, 0, 0). \quad (16.148)$$

Složky vektoru momentu hybnosti spočítáme pomocí vztahu (16.109):

$$L_1 = J_{11}\omega_1 + J_{12}\omega_2 + J_{13}\omega_3 = \frac{4\pi Ma^2}{3} = 4\pi \cdot 10^{-2} \text{ kgm}^2\text{s}^{-1}, \quad (16.149)$$

$$L_2 = L_3 = J_{31}\omega_1 + J_{32}\omega_2 + J_{33}\omega_3 = -\frac{\pi Ma^2}{2} = -\frac{3\pi \cdot 10^{-2}}{2} \text{ kgm}^2\text{s}^{-1}, \quad (16.150)$$

tedy

$$\mathbf{L} = \frac{\pi \cdot 10^{-2}}{2}(8, -3, -3). \quad (16.151)$$

Odtud vidíme, že $\mathbf{L} \nparallel \boldsymbol{\omega}$.

Moment hybnosti vzhledem k ose o' určíme pomocí vztahu (16.64):

$$\mathbf{L}_{\parallel} = J\boldsymbol{\omega} = 2\pi J(1, 0, 0) = 4\pi \cdot 10^{-2}(1, 0, 0). \quad (16.152)$$

Porovnáním s případem rotace kolem osy o vidíme, že jak moment setrvačnosti, tak rotační energie jsou při rotaci kolem osy o' vyšší.

Na příkladu jsme si ukázali, že při znalosti tenzoru setrvačnosti je možné s jeho pomocí spočítat moment setrvačnosti k různým osám rotace.

16.8 Nalezení hlavních os setrvačnosti

V případě, že deviační momenty tenzoru setrvačnosti jsou nulové, potom můžeme pro prvky tenzoru setrvačnosti psát, že

$$J_{ij} = J_i \delta_{ij} , \quad i, j = 1, 2, 3 , \quad (16.153)$$

tedy

$$\overleftrightarrow{\mathbf{J}} = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{pmatrix} . \quad (16.154)$$

V tomto případě můžeme vztah (16.111) vyjádřit jako

$$L_i = \sum_{j=1}^3 J_i \delta_{ij} \omega_j = J_i \omega_i \quad (16.155)$$

a vztah (16.123) je možné přepsat do následujícího tvaru

$$T_r = \frac{1}{2} \sum_{i,j} J_i \delta_{ij} \omega_i \omega_j = \frac{1}{2} \sum_i J_i \omega_i^2 . \quad (16.156)$$

Porovnáním navzájem si odpovídajících vztahů je zřejmé, že v případě nulových deviačních momentů dochází k jejich výraznému zjednodušení. Z lineární algebry je známo, že každou symetrickou matici lze převést ortogonální transformací na diagonální tvar. Tento postup nazýváme **diagonalizací** a ukážeme si ho na případu tenzoru setrvačnosti. Diagonalizace spočívá v nalezení takové orientace na sebe kolmých souřadnicových os, pro které budou prvky mimo diagonálu nulové. V kapitole 16.7.2 jsme nazvali takovéto osy hlavními osami setrvačnosti.

Uvažujme, že těleso se bude otáčet kolem hlavní osy setrvačnosti x'_ν . Potom v tomto případě můžeme vektor úhlové rychlosti vyjádřit jako

$$\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{e}'_\nu . \quad (16.157)$$

Dosadíme-li vektor úhlové rychlosti do vztahu (16.155), pak můžeme psát, že

$$\mathbf{L} = J \boldsymbol{\omega} , \quad (16.158)$$

kde $J \equiv J_\nu$ představuje hlavní moment setrvačnosti pro rotaci kolem uvažované hlavní osy setrvačnosti. Je-li např. $\nu = 2$, potom $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{e}'_2 = (0, \omega_2, 0)$ a vektor moment hybnosti $\mathbf{L} = L \mathbf{e}'_2 = (0, L_2, 0)$, kde $\omega_2 = \omega$ a $L_2 = L$.

Ukázaná vlastnost rovnoběžnosti vektorů \mathbf{L} a $\boldsymbol{\omega}$ v případě rotace kolem nějaké z hlavních os setrvačnosti umožňuje určit orientaci hlavních os setrvačnosti.

Na základě vztahu (16.158) a vztahu (16.111) dostáváme následující soustavu tří algebraických rovnic:

$$\begin{aligned} L_1 &= J\omega_1 = J_{11}\omega_1 + J_{12}\omega_2 + J_{13}\omega_3 , \\ L_2 &= J\omega_2 = J_{21}\omega_1 + J_{22}\omega_2 + J_{23}\omega_3 , \\ L_3 &= J\omega_3 = J_{31}\omega_1 + J_{32}\omega_2 + J_{33}\omega_3 , \end{aligned} \quad (16.159)$$

kterou můžeme upravit jako

$$\begin{aligned}(J_{11} - J)\omega_1 + J_{12}\omega_2 + J_{13}\omega_3 &= 0, \\ J_{21}\omega_1 + (J_{22} - J)\omega_2 + J_{23}\omega_3 &= 0, \\ J_{31}\omega_1 + J_{32}\omega_2 + (J_{33} - J)\omega_3 &= 0.\end{aligned}\tag{16.160}$$

Aby homogenní soustavu rovnic (16.160) měla netriviální řešení, musí být determinant matice soustavy rovnic roven nule, tj.

$$\begin{vmatrix} (J_{11} - J) & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & (J_{22} - J) & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & (J_{33} - J) \end{vmatrix} = 0.\tag{16.161}$$

Výpočtem (rozvojem) determinantu (16.161) dostaneme tzv. **charakteristickou kubickou rovnici** pro neznámou J . Jelikož víme, že tenzor setrvačnosti je symetrický, potom je symetrická i matice soustavy. Z lineární algebry je známo tvrzení, že je-li matice soustavy symetrická, pak řešení uvažované charakteristické kubické rovnice budou reálná. Tato řešení se v lineární algebře nazývají **vlastními čísly**, která reprezentují v našem případě hlavní momenty setrvačnosti. Pro symetrickou matici soustavy rovněž platí, že **vlastní vektory**, které odpovídají různým vlastním číslům, jsou na sebe kolmé, takže tvoří ortogonální bázi. V našem případě vlastní vektory představují vektory úhlových rychlostí. Vlastní vektor odpovídající vlastnímu číslu (hlavnímu momentu setrvačnosti) J_ν (tři reálné kořeny kubické rovnice) označíme $\boldsymbol{\omega}^{(\nu)}$ a jeho složky určíme řešením následující soustavy rovnic

$$\begin{aligned}(J_{11} - J_\nu)\omega_1^{(\nu)} + J_{12}\omega_2^{(\nu)} + J_{13}\omega_3^{(\nu)} &= 0, \\ J_{21}\omega_1^{(\nu)} + (J_{22} - J_\nu)\omega_2^{(\nu)} + J_{23}\omega_3^{(\nu)} &= 0, \\ J_{31}\omega_1^{(\nu)} + J_{32}\omega_2^{(\nu)} + (J_{33} - J_\nu)\omega_3^{(\nu)} &= 0.\end{aligned}\tag{16.162}$$

Potom na základě vztahu (16.158), resp. (16.155), bude platit, že

$$\mathbf{L} = J_\nu \boldsymbol{\omega}^{(\nu)}, \quad \nu = 1, 2, 3.\tag{16.163}$$

Ortogonální bázi $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ hlavních os setrvačnosti určíme pomocí nalezených tří vlastních vektorů $\boldsymbol{\omega}^{(1)}, \boldsymbol{\omega}^{(2)}, \boldsymbol{\omega}^{(3)}$ následujícím způsobem:

$$\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\} = \left\{ \frac{\boldsymbol{\omega}^{(1)}}{|\boldsymbol{\omega}^{(1)}|}, \frac{\boldsymbol{\omega}^{(2)}}{|\boldsymbol{\omega}^{(2)}|}, \frac{\boldsymbol{\omega}^{(3)}}{|\boldsymbol{\omega}^{(3)}|} \right\}.\tag{16.164}$$

Na tomto místě je třeba zdůraznit, že kartézský souřadnicový systém, který bude tvořen hlavními osami setrvačnosti, bude mít stejný počátek jako původní kartézský souřadnicový systém. Odtud dále vyplývá, že rotací kolem počátku souřadnic, pro který jsou prvky tenzoru setrvačnosti počítány, je možné nalézt nový kartézský souřadnicový systém, v němž má tenzor setrvačnosti diagonální tvar.

Polohu hlavních os setrvačnosti je možné často uhodnout u těles pravidelného geometrického tvaru. Má-li těleso rovinu symetrie, pak ji stačí zvolit za souřadnicovou rovinu, aby dva deviační momenty vymizely. Je-li např. rovinou symetrie rovina $x_3 = 0$, potom

$$J_{13} = - \sum_{n=1}^N m_n x_{n1} x_{n3} = 0, \quad J_{23} = - \sum_{n=1}^N m_n x_{n2} x_{n3} = 0,$$

což je dáno tím, že pro dva body symetricky položené vzhledem k rovině $x_3 = 0$ jsou veličiny m_n , x_{n1} , x_{n2} stejné, zatímco souřadnice x_{n3} jsou co do velikosti rovněž stejné, ale liší se znaménky.

Jestliže tedy má těleso rovinu symetrie, pak každá kolmice k této rovině je hlavní osou setrvačnosti pro bod v němž kolmice rovinu protíná. Má-li soustava dvě navzájem kolmé roviny symetrie, pak tyto roviny budou nutně hlavními rovinami elipsoidu setrvačnosti vzhledem ke každému bodu jejich průsečnice. Zvolíme-li tedy tyto roviny za souřadnicové roviny, pak zřejmě vymizí všechny tři deviační momenty. Pro rotační tělesa každá meridiánová rovina⁴, je zřejmě rovinou symetrie, a proto rotační osa tělesa je hlavní osou setrvačnosti pro každý její bod a příslušné elipsoidy setrvačnosti budou rotační elipsoidy, jejichž rotační osou je rotační osa tělesa.

Má-li homogenní těleso osu (osy) souměrnosti (symetrie), je (každá) tato osa hlavní osou osou setrvačnosti.

Příklad 16.8.1

Proveďte diagonalizaci tenzoru setrvačnosti pro krychli z příkladu 16.7.1 a nalezněte báze vektory pro kartézský souřadnicový systém s hlavními osami setrvačnosti.

Řešení:

Na základě spočítaného tenzoru setrvačnosti (16.138) zapíšeme charakteristickou rovnici (16.161) jako

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{2}{3}Ma^2 - J\right) & -\frac{1}{4}Ma^2 & -\frac{1}{4}Ma^2 \\ -\frac{1}{4}Ma^2 & \left(\frac{2}{3}Ma^2 - J\right) & -\frac{1}{4}Ma^2 \\ -\frac{1}{4}Ma^2 & -\frac{1}{4}Ma^2 & \left(\frac{2}{3}Ma^2 - J\right) \end{vmatrix} = 0. \quad (16.165)$$

Jelikož hodnota determinantu není ovlivněna přičtením jakékoliv násobky řádky k jakémukoliv jinému řádku, odečteme první řádek od řádku druhého:

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{2}{3}Ma^2 - J\right) & -\frac{1}{4}Ma^2 & -\frac{1}{4}Ma^2 \\ \left(-\frac{11}{12}Ma^2 + J\right) & \left(\frac{11}{12}Ma^2 - J\right) & 0 \\ -\frac{1}{4}Ma^2 & -\frac{1}{4}Ma^2 & \left(\frac{2}{3}Ma^2 - J\right) \end{vmatrix} = 0. \quad (16.166)$$

⁴Rovina procházející osou rotační plochy se nazývá meridiánová.

Vytknutím před determinant dostaneme

$$\left(\frac{11}{12}Ma^2 - J \right) \begin{vmatrix} \left(\frac{2}{3}Ma^2 - J \right) & -\frac{1}{4}Ma^2 & -\frac{1}{4}Ma^2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{4}Ma^2 & -\frac{1}{4}Ma^2 & \left(\frac{2}{3}Ma^2 - J \right) \end{vmatrix} = 0 . \quad (16.167)$$

Rozvojem podle druhého řádku pak dostáváme následující kubickou charakteristickou rovnici:

$$\left(\frac{11}{12}Ma^2 - J \right) \left[\left(\frac{2}{3}Ma^2 - J \right)^2 - \frac{1}{8}Ma^4 - \frac{1}{4}Ma^2 \left(\frac{2}{3}Ma^2 - J \right) \right] = 0 , \quad (16.168)$$

kterou upravíme do následujícího tvaru

$$\left(\frac{1}{6}Ma^2 - J \right) \left(\frac{11}{12}Ma^2 - J \right) \left(\frac{11}{12}Ma^2 - J \right) = 0 . \quad (16.169)$$

Z charakteristické rovnice (16.169) pak můžeme přímo psát její kořeny, které představují vlastní čísla neboli hlavní momenty setrvačnosti:

$$J_1 = \frac{1}{6}Ma^2 , \quad J_2 = \frac{11}{12}Ma^2 , \quad J_3 = \frac{11}{12}Ma^2 . \quad (16.170)$$

Odtud můžeme napsat diagonalizovaný tvar tenzoru setrvačnosti:

$$\overleftrightarrow{\mathbf{J}} = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6}Ma^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{11}{12}Ma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{11}{12}Ma^2 \end{pmatrix} . \quad (16.171)$$

Jelikož $J_2 = J_3$, potom hlavní osa setrvačnosti spojená s hlavním momentem setrvačnosti J_1 musí být osou symetrie.

Dosazením do soustavy rovnic (16.162) za J hodnotu prvního vlastního čísla J_1 dostaneme:

$$\begin{aligned} \left(\frac{2}{3}Ma^2 - \frac{1}{6}Ma^2 \right) \omega_1^{(1)} - \frac{1}{4}Ma^2 \omega_2^{(1)} - \frac{1}{4}Ma^2 \omega_3^{(1)} &= 0 , \\ -\frac{1}{4}Ma^2 \omega_1^{(1)} + \left(\frac{2}{3}Ma^2 - \frac{1}{6}Ma^2 \right) \omega_2^{(1)} - \frac{1}{4}Ma^2 \omega_3^{(1)} &= 0 , \\ -\frac{1}{4}Ma^2 \omega_1^{(1)} - \frac{1}{4}Ma^2 \omega_2^{(1)} + \left(\frac{2}{3}Ma^2 - \frac{1}{6}Ma^2 \right) \omega_3^{(1)} &= 0 . \end{aligned} \quad (16.172)$$

Soustavu rovnic (16.172) podělíme $Ma^2/4$, čímž dostaneme:

$$\begin{aligned} 2\omega_1^{(1)} - \omega_2^{(1)} - \omega_3^{(1)} &= 0 , \\ -\omega_1^{(1)} + 2\omega_2^{(1)} - \omega_3^{(1)} &= 0 , \\ -\omega_1^{(1)} - \omega_2^{(1)} + 2\omega_3^{(1)} &= 0 . \end{aligned} \quad (16.173)$$

Řešením soustavy rovnic (16.173) dostaneme následující vlastní vektor:

$$\boldsymbol{\omega}^{(1)} = (\omega_1^{(1)}, \omega_2^{(1)}, \omega_3^{(1)}) = \lambda(1, 1, 1), \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (16.174)$$

Abychom získali vlastní vektory, které odpovídají vlastním číslům $J_2 = J_3$, opět dosadíme do soustavy rovnic (16.162) za tato vlastní čísla, čímž obdržíme následující soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} \left(\frac{2}{3}Ma^2 - \frac{11}{12}Ma^2\right)\omega_1^{(1)} - \frac{1}{4}Ma^2\omega_2^{(1)} - \frac{1}{4}Ma^2\omega_3^{(1)} &= 0, \\ -\frac{1}{4}Ma^2\omega_1^{(1)} + \left(\frac{2}{3}Ma^2 - \frac{11}{12}Ma^2\right)\omega_2^{(1)} - \frac{1}{4}Ma^2\omega_3^{(1)} &= 0, \\ -\frac{1}{4}Ma^2\omega_1^{(1)} - \frac{1}{4}Ma^2\omega_2^{(1)} + \left(\frac{2}{3}Ma^2 - \frac{11}{12}Ma^2\right)\omega_3^{(1)} &= 0. \end{aligned} \quad (16.175)$$

Tuto soustavu opět podělíme $Ma^2/4$, čímž dostaneme:

$$\begin{aligned} -\omega_1^{(1)} - \omega_2^{(1)} - \omega_3^{(1)} &= 0, \\ -\omega_1^{(1)} - \omega_2^{(1)} - \omega_3^{(1)} &= 0, \\ -\omega_1^{(1)} - \omega_2^{(1)} - \omega_3^{(1)} &= 0. \end{aligned} \quad (16.176)$$

Řešením této soustavy rovnic dostáváme, že

$$\boldsymbol{\omega}^{(2)} = (\omega_1^{(2)}, \omega_2^{(2)}, \omega_3^{(2)}) = (-\eta - \xi, \xi, \eta), \quad \eta, \xi \in \mathbb{R}, \quad (16.177)$$

$$\boldsymbol{\omega}^{(3)} = (\omega_1^{(3)}, \omega_2^{(3)}, \omega_3^{(3)}) = (-\eta - \xi, \xi, \eta), \quad \eta, \xi \in \mathbb{R}. \quad (16.178)$$

Protože parametry λ, η, ξ představují jakékoliv reálná čísla, zvolíme tyto parametry, tak aby vlastní vektory byly na sebe kolmé. Jelikož vlastní číslo J_1 je různé od vlastních čísel J_2 a J_3 , takže při jakékoliv volbě parametrů budou vlastní vektory odpovídající vlastním číslům J_2 a J_3 kolmé na vlastní vektor odpovídající vlastnímu číslu J_1 . Vzhledem k tomu, že vlastní čísla J_2 a J_3 jsou stejná, tak jí odpovídající vlastní vektory sice budou ležet ve stejné rovině, která bude kolmá k vlastnímu vektoru vlastního čísla J_1 , ale při obecné volbě parametrů η a ξ nebudou na sebe kolmé⁵. Z tohoto důvodu je nutné nalézt parametry η a ξ tak, aby tyto vlastní vektory byly na sebe kolmé a současně, aby vzniklý souřadnicový systém byl pravotočivý. To můžeme jednoduše provést tak, že si pro vlastní vektor $\boldsymbol{\omega}^{(3)}$ zvolíme např. parametry $\eta = -1$ a $\xi = 0$, takže na základě vztahu (16.178) dostaneme $\boldsymbol{\omega}^{(3)} = (1, 0, -1)$. Parametry pro zbývající vlastní vektor $\boldsymbol{\omega}^{(2)}$ určíme z podmínky, aby

$$\boldsymbol{\omega}^{(3)} \cdot \boldsymbol{\omega}^{(2)} = 0. \quad (16.179)$$

Zvolíme si pro vlastní vektor $\boldsymbol{\omega}^{(2)}$ parametr η , např. $\eta = -1$, takže na základě vztahů (16.177) a (16.179) můžeme psát:

$$1 - \xi + 1 = 0. \quad (16.180)$$

⁵Kolmé by na sebe byly jen v případě, že by platilo $J_2 \neq J_3$.

odtud $\xi = 2$. Takže vlastní vektory budou mít souřadnice

$$\boldsymbol{\omega}^{(1)} = (1, 1, 1) , \quad (16.181)$$

$$\boldsymbol{\omega}^{(2)} = (1, 0, -1) , \quad (16.182)$$

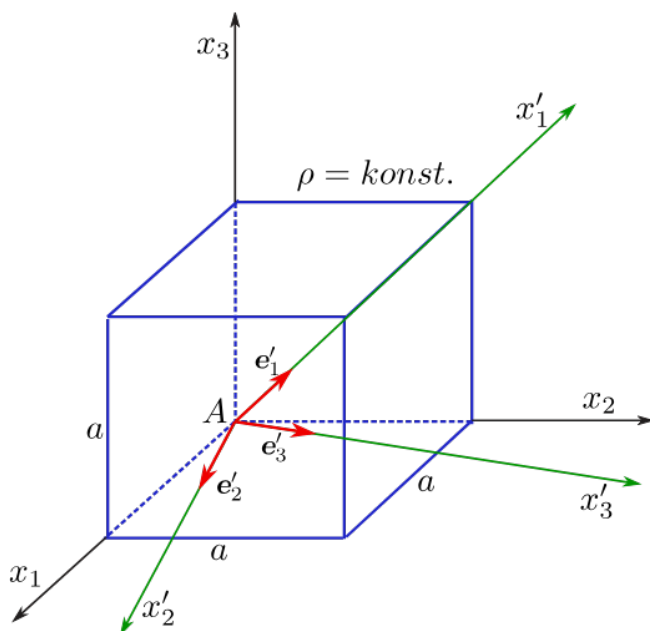
$$\boldsymbol{\omega}^{(3)} = (-1, 2, -1) . \quad (16.183)$$

Určíme ortonormální bázi nové kartézské soustavy, pro kterou má tenzor setrvačnosti nulové deviační momenty, podle vztahu (16.164)

$$\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\} = \left\{ \frac{\boldsymbol{\omega}^{(1)}}{|\boldsymbol{\omega}^{(1)}|}, \frac{\boldsymbol{\omega}^{(2)}}{|\boldsymbol{\omega}^{(2)}|}, \frac{\boldsymbol{\omega}^{(3)}}{|\boldsymbol{\omega}^{(3)}|} \right\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1), \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 2, -1) \right\} . \quad (16.184)$$

Na obrázku 16.15 je jsou zobrazeny původní souřadnice a nalezené hlavní osy setrvačnosti.

Pro rovnice elipsoidu setrvačnosti (16.132), pak můžeme na základě rovností

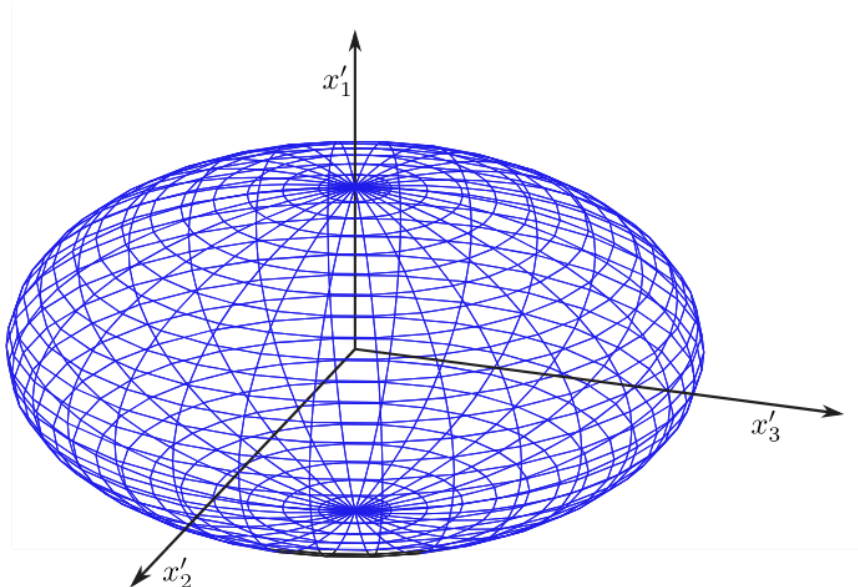


Obrázek 16.15: Hlavní osy setrvačnosti x'_1, x'_2, x'_3 homogenní krychle s délkou strany a .

(16.165) psát

$$\frac{1}{6}Ma^2x_1'^2 + \frac{11}{12}Ma^2x_2'^2 + \frac{11}{12}Ma^2x_3'^2 = 1 . \quad (16.185)$$

Elipsoid setrvačnosti je zachycen na obrázku 16.16.



Obrázek 16.16: Odpovídající elipsoid setrvačnosti.

16.9 Vliv odstředivých sil při nevyvážené rotaci tělesa

Při rotaci tělesa kolem pevné osy budou působit na toto těleso odstředivé síly. Na jednotlivé elementy hmotnosti dm působí odstředivá síla (viz situace na obr. 16.17)

$$d\mathbf{F}_O = \omega^2 \mathbf{r}_\perp dm . \quad (16.186)$$

Potom výsledná odstředivá síla působící na těleso je dána následujícím vztahem:

$$\mathbf{F}_O = \int_m \omega^2 \mathbf{r}_\perp dm = \omega^2 m \mathbf{r}_T , \quad (16.187)$$

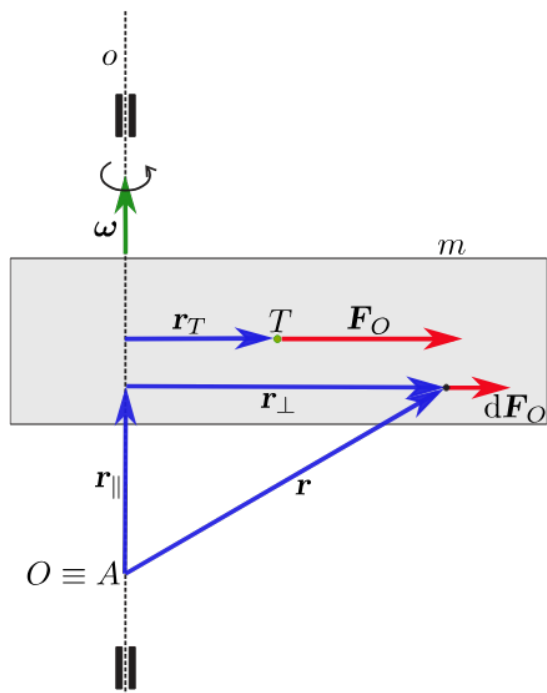
kde \mathbf{r}_T je polohový vektor těžiště.

Na základě vztahu (16.187) je zřejmé, že silová reakce ložisek $\mathbf{R} = -\mathbf{F}_O$ je nenulová pakliže osa otáčení neprochází těžištěm rotujícího tělesa. Leží-li těžiště tělesa na rotační ose ($\mathbf{r}_T = \mathbf{0}$) potom říkáme, že rotující těleso (setrvačnick) je **staticky vyvážené**, a tedy podmínkou statické vyváženosti rotujícího tělesa je $\mathbf{R} = \mathbf{0}$.

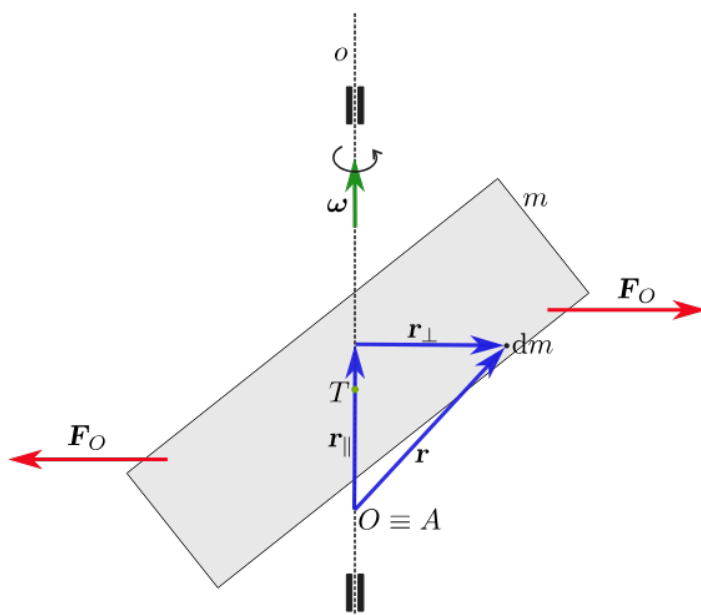
Avšak i v případě, že rotační osa tělesa prochází jeho těžištěm, může dojít k namáhání ložisek díky tzv. **klopnému momentu** odstředivých sil, viz obrázek 16.18. Klopný moment odstředivých sil je možné určit následujícím způsobem:

$$\mathbf{M}_O = \int \mathbf{r} \times d\mathbf{F}_O = \int_m \mathbf{r} \times \omega^2 \mathbf{r}_\perp dm = \omega^2 \int_m (\mathbf{r}_\perp + \mathbf{r}_\parallel) \times \mathbf{r}_\perp dm = \omega^2 \int_m \mathbf{r}_\parallel \times \mathbf{r}_\perp dm . \quad (16.188)$$

Ze vztahu (16.188) je patrné, že klopný moment je kolmý k rotační ose o , má tedy tendenci rotační osu tělesa sklopit a odtud ono označení klopný moment. Reakci ložisek na klopný moment označíme $\mathbf{M}_R = -\mathbf{M}_O$. Pokud je klopný moment nulový, potom hovoříme o **dynamicky vyváženém** rotujícím tělese (setrvačnicku). Takže podmínkou dynamicky vyváženého rotujícího tělesa je, že $\mathbf{M}_R = \mathbf{0}$.

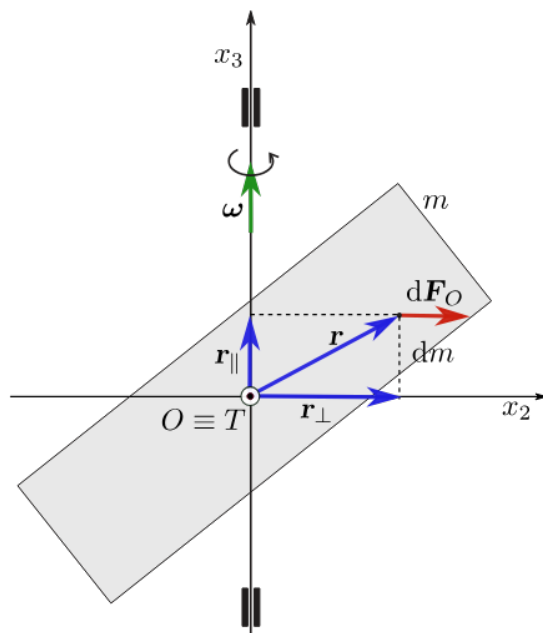


Obrázek 16.17: Staticky nevyvážené rotující těleso (setrvačnick).



Obrázek 16.18: Dynamicky nevyvážené rotující těleso (setrvačnick).

Bez újmy na obecnosti dále předpokládáme, že osa rotace je totožná se souřadnicovou osou x_3 a počátek souřadnicové soustavy je totožný s těžištěm tělesa, viz obr. 16.19. V tomto případě spočítáme klopný moment podle vztahu (16.188) jako



Obrázek 16.19: Výpočet klopného momentu pro těleso rotující kolem osy x_3 .

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_O &= (M_{O1}, M_{O2}, M_{O3}) = \omega^2 \int_m \mathbf{r}_{\parallel} \times \mathbf{r}_{\perp} dm = \omega^2 \int_m (0, 0, x_3) \times (x_1, x_2, 0) dm = \\ &= \left(\omega^2 \int_m -x_2 x_3 dm \right) \mathbf{i} + \left(-\omega^2 \int_m -x_1 x_3 dm \right) \mathbf{j} = M_{O1} \mathbf{i} + \mathbf{j} M_{O2} . \quad (16.189) \end{aligned}$$

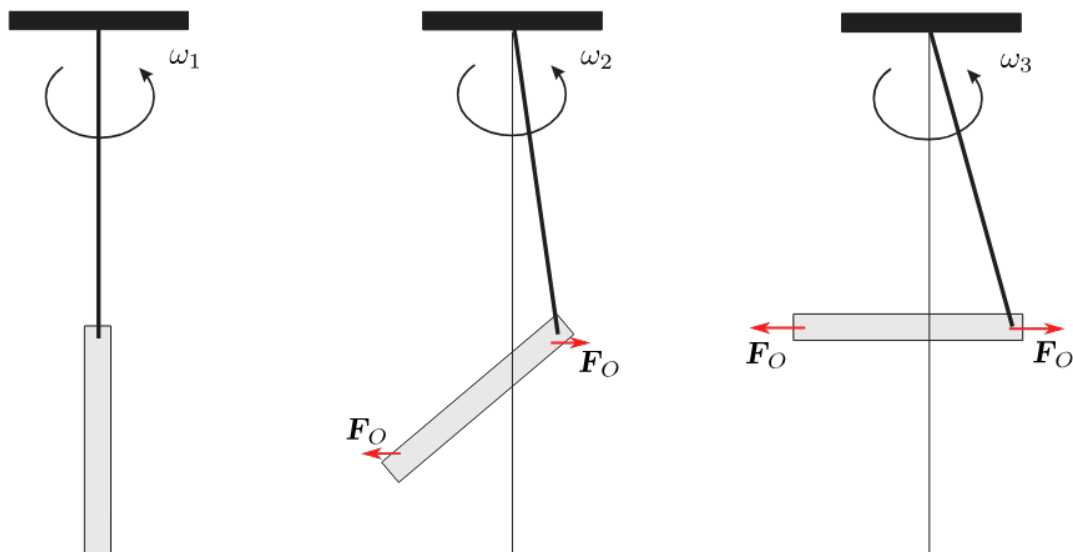
Ze vztahů (16.114) a (16.189) plyne, že

$$M_{O1} = \omega^2 J_{23} , \quad M_{O2} = -\omega^2 J_{13} . \quad (16.190)$$

Budou-li deviační momenty J_{23} a J_{13} nulové, potom bude nulový i klopný moment odstředivých sil vzhledem k ose x_3 . Odtud plyne název deviační momenty, neboť se vyskytují ve vztazích pro momenty, které mají snahu způsobit odklon neboli deviaci, rotační osy. Kdybychom za osu rotace zvolili souřadnicovou osu x_2 , příp. x_1 , pak bychom dosáhli rovněž nulového klopného momentu, jelikož v tomto případě platí, že by byly příslušné deviační momenty rovněž nulové.

Na základě výše uvedeného vyplývá, že existují pro každé těleso osy rotace, pro které je rotační pohyb dokonale vyvážený. Takovéto osy rotace se nazývají **volné osy**. Tedy každé těleso má alespoň tři volné osy rotace a jsou jimi hlavní osy setrvačnosti procházející těžištěm uvažovaného tělesa (hlavní centrální osy setrvačnosti). V případě, že těleso nerotuje kolem volné osy, potom ložiska kompenzují vliv odstředivých sil přídatnými reakcemi, které nejen zvyšují opotřebení ložisek, ale vzhledem k proměnnosti směru svého působení vyvolávají např. neklidný chod strojů.

Na obrázku 16.20 je demonstrován zajímavý případ, který souvisí s klopným momentem odstředivých sil. Ukazuje, že u tělesa, u něhož $J_1 \neq J_2 \neq J_3$, nejsou všechny volné osy v tělese rovnocenné. Bude-li těleso, které je zavěšeno v jediném bodě, postupně roztáčeno, potom narůstající odstředivé síly postupně způsobí, že těleso spontánně zaujme polohu, která odpovídá rotaci s největším momentem setrvačnosti. Na obrázku 16.20 vidíme, že tímto přejde tyč ze své svislé polohy do



Obrázek 16.20: Změna orientace tělesa při různých rychlostech otáčení, $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3$.

polohy vodorovné. Podobně by tomu bylo např. u rotující obruče apod. Stabilně rotuje těleso kolem hlavní centrální osy, vzhledem k níž má největší moment setrvačnosti.

Teoretický rozbor dále ukazuje, že u tělesa, které má pro hlavní momenty setrvačnosti tři různé hodnoty $J_1 > J_2 > J_3$ je stabilní rotace nejen kolem hlavní centrální osy, vzhledem k níž má největší moment J_1 , ale i vzhledem k hlavní centrální ose, vzhledem k níž má nejmenší moment J_3 . Rotace kolem osy, vzhledem k níž má moment J_2 , je labilní.

16.10 Druhy setrvačníků

Setrvačnick je rotující těleso, které slouží k akumulaci kinetické rotační energie. Obecně setrvačnickem budeme rozumět jakékoliv těleso, které rotuje. Bez újmy na obecnosti lze zavést podmínku $J_1 \leq J_2 \leq J_3$. Ze vztahu (16.112) je zřejmé, že hlavní momenty setrvačnosti musí být vždy kladné. Jelikož pro kartézské souřadnicové osy platí trojúhelníková nerovnost, pak platí trojúhelníková nerovnost i pro hlavní momenty setrvačnosti (viz zavedení těchto momentů ve vztahu (16.112))

$$J_1 + J_2 \geq J_3, \quad J_2 + J_3 \geq J_1, \quad J_3 + J_1 \geq J_2. \quad (16.191)$$

Že výše uvedené relace (16.191) jsou pravdivé si ukážeme pomocí vztahu (16.112), ze kterého plynou následující rovnosti

$$J_1 = \int_{(m)} (x_2^2 + x_3^2) dm, \quad J_2 = \int_{(m)} (x_1^2 + x_3^2) dm, \quad J_3 = \int_{(m)} (x_1^2 + x_2^2) dm. \quad (16.192)$$

Pro první nerovnost (16.191) pak ze vztahů pro hlavní momenty setrvačnosti (16.192) plyne, že

$$J_1 + J_2 = \int_{(m)} (x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2) dm \geq \int_{(m)} (x_1^2 + x_2^2) dm = J_3. \quad (16.193)$$

Podobně se dá ukázat platnost zbývajících relací.

Vzhledem k předpokladu $J_1 \leq J_2$ plyne z trojúhelníkové nerovnosti také podmínka, že $J_3 \leq 2J_2$. Obecně můžeme napsat relaci, že

$$J_1 \leq J \leq J_3, \quad (16.194)$$

kteřá nám říká, že nejmenší i největší možný moment setrvačnosti dostaneme rotací kolem jedné z hlavních os setrvačnosti (J je moment setrvačnosti k libovolné ose otáčení procházející daným bodem).

Setrvačníky dělíme podle hlavních momentů setrvačnosti na **symetrické** setrvačníky, což jsou setrvačníky, které mají alespoň dva hlavní momenty setrvačnosti stejné, tj. $J_1 = J_2$, $J_1 = J_3$, $J_2 = J_3$ nebo $J_1 = J_2 = J_3$. Symetrický setrvačník mající všechny hlavní momenty setrvačnosti stejné nazýváme **izotropním** setrvačníkem. Příkladem izotropního setrvačníku je koule, krychle, pravidelný čtyřstěn atd. Elipsoid setrvačnosti bude v tomto případě degenerován na kouli. Příkladem symetrického neizotropního setrvačníku je např. válec a pro neizotropní symetrické setrvačníky se elipsoid setrvačnosti degeneruje na rotační elipsoid. Setrvačníky, pro které platí, že $J_1 < J_2 < J_3$ nazýváme **asymetrickými** setrvačníky. Mezi asymetrické setrvačníky patří. např. kvádr s různě dlouhými stranami. Z trojúhelníkové nerovnosti vyplývá, že je-li jeden z hlavních momentů setrvačnosti nulový, potom se musí zbývajících dva hlavní momenty setrvačnosti rovnat. Takovýto setrvačník nazýváme **rotátor**, který představují např. dva hmotné body rotující kolem jejich těžiště. Pokud na setrvačník nepůsobí žádné vnější síly, nazývá se **volný** (bezsilový⁶) setrvačník, kdežto setrvačník podrobený působení vnějších sil se nazývá **těžký** (silový) setrvačník.

⁶Přesněji bezmomentový.

Kapitola 17

Mechanika kontinua

Při popisu pohybu deformace elastických těles či pohybu tekutin je potřeba vybudovat takový model, který bude co nejvěrněji odrážet realitu a současně musí být tento model natolik jednoduchý, aby ho bylo možné bez větších obtíží matematicky popsat. Takovýmto modelem je model **kontinua** (spojitého prostředí), tj. tělesa, resp. prostředí, v němž je látka spojitě rozložena, a které je současně poddajné, tj. deformuje se působením vnějších sil. Spojité rozložení látky je tedy základní charakteristikou kontinua, a tudíž budeme spojitost předpokládat i u veličin, které fyzikální stav kontinua popisují. O něco přesněji můžeme definovat kontinuum jako soustavu složenou z **částic kontinua**, které hustě zaplňují určitý objem V třírozměrného eukleidovského prostoru, takže v každém bodě určeném polohovým vektorem vzhledem k libovolnému počátku se nachází jistá částice kontinua. Je nutné zdůraznit, že částicemi kontinua nejsou míněny atomy či molekuly, které je nutné popisovat z pohledu kvantové mechaniky a není je tedy možné popisovat z pohledu mechaniky klasické. Abychom se mohli ve svém popisu opírat o klasickou mechaniku, je tedy nutné odhlédnout od mikroskopického složení tělesa. Proto částicí kontinua budeme rozumět **fyzikálně nekonečně malou částici**, přičemž počet těchto částic bude na jedné straně dostatečně velký a na druhé straně velmi malý v porovnání s počtem molekul daného tělesa. Částice kontinua musí zaujímat fyzikálně nekonečně malý objem, který je však dostatečně velký k tomu, aby obsahoval větší počet molekul, ale současně dostatečně malý, aby se v jeho rozměrech již neprojevovala závislost makroskopických parametrů tělesa na poloze. Místo částice kontinua se někdy v literatuře můžeme setkat s pojmem **materiálový bod**. My se v textu budeme držet pojmu částice kontinua či zkráceně jen částice.

17.1 Plošné a objemové síly

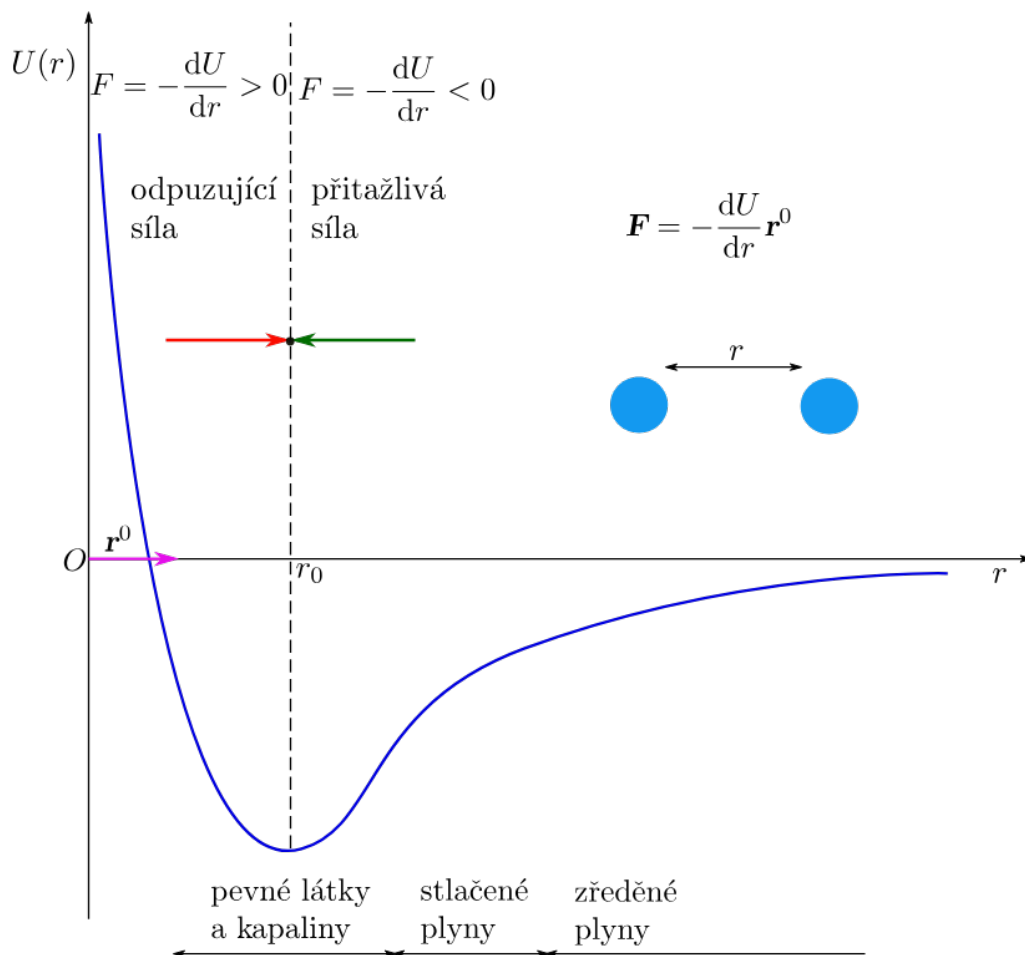
Látky, se kterými budeme v mechanice kontinua pracovat, můžeme rozdělit na látky pevné, kapalně a plynné. Látky se sestávají z atomů či molekul, které na sebe vzájemně silově působí. Na obr. 17.1 je zachycen průběh potenciální energie mezi dvěma molekulami (atomy) v závislosti na jejich vzájemné vzdálenosti. Jedná se o zjednodušený model, který však postačuje k vysvětlení silového působení jedné molekuly na druhou molekulu na základě klasické mechaniky. Protože vzájemné síly jsou síly potenciálové, tak můžeme pro sílu, kterou působí jedna molekula na

druhou psát, že

$$\mathbf{F} = -\frac{dU(r)}{dr} \mathbf{r}^0, \quad (17.1)$$

kde \mathbf{r}^0 je jednotkový polohový vektor.

Z obr. 17.1 je zřejmé, že se orientace síly, kterou působí jedna molekula na dru-



Obrázek 17.1: Průběh potenciální energie mezi dvěma molekulami (atomy) určuje oblast, kde působí přitažlivá a odpuzivá síla.

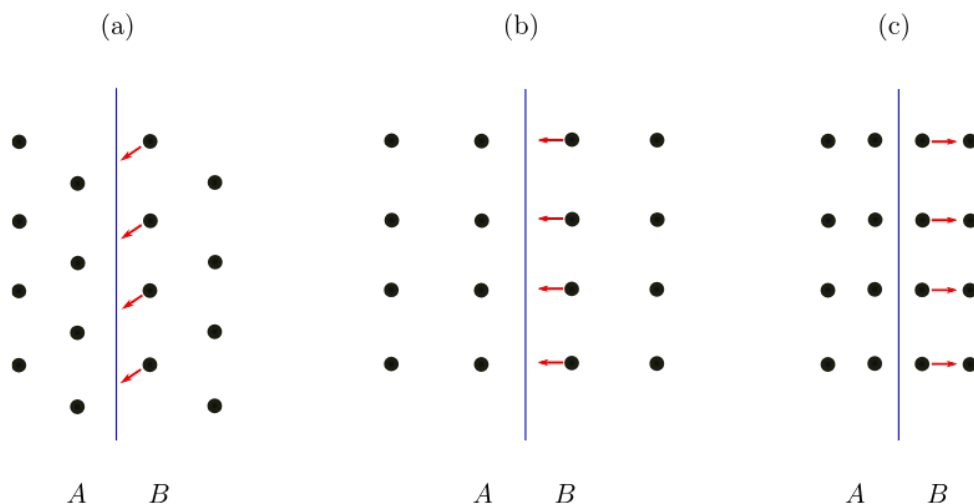
hou (**vnitřní síly**) závisí na jejich vzájemné vzdálenosti. Ve vzdálenosti r_0 má potenciální energie nulovou derivaci, což znamená, že v této vzdálenosti na sebe uvažované dvě molekuly silově nepůsobí. Pro vzdálenost $r < r_0$ síla má orientaci shodnou s jednotkovým vektorem \mathbf{r}^0 , takže se jedná o sílu odpuzující (repulzivní). Je-li vzdálenost $r > r_0$, pak síla má orientaci opačnou než jednotkový vektor \mathbf{r}^0 a tedy se jedná o sílu přitažlivou. Střední vzdálenost mezi molekulami zředěného plynu je na tolik velká, že můžeme zpravidla vzájemné působení mezi molekulami zanedbat (ideální plyn) a uvažujeme jen jejich kinetickou energii. Pro stlačené plyny již vzájemné silové působení mezi molekulami je nutné brát v úvahu, i když jsou poměrně malé (reálný plyn) a kinetická energie molekul hraje dominantní roli. Avšak pro kapaliny a pevné látky hrají vzájemné síly již významnou roli, podílí se na jejich soudržnosti.

U pevných látek je vzdálenost mezi jejich molekulami poměrně malá a pro poten-

ciální energii mezi molekulami je důležitá nejen jejich vzdálenost, ale i prostorové uspořádání. Obvykle se pevné látky uspořádávají do krystalové struktury, protože tehdy je jejich potenciální energie nejnižší. Pevné látky, které nekystalizují (guma, sklo, plastické hmoty), utvářejí místo toho velké molekuly, které se do sebe zapletou, a na pokusy vnútit jim jiné uspořádání odpovídají opět silami, které se pokoušejí je vrátit do původní polohy.

Rozložení molekul v nedeformovaném tělese odpovídá stavu jeho tepelné rovnováhy. Při tom se jeho všechny části nacházejí navzájem v mechanické rovnováze. To znamená, že vydělíme-li uvnitř tělesa libovolný objem, potom výslednice všech sil, působících na tento objem ze strany jiných částí, je rovna nule. Při deformaci se však rozložení molekul mění a těleso je vyvedeno ze stavu rovnováhy, ve kterém se původně nacházelo. V důsledku toho v něm vznikají síly, snažící se vrátit těleso do stavu rovnováhy. Tyto vnitřní síly, vznikající při deformování, se nazývají vnitřními napětími. Jestliže těleso není deformováno, vnitřní napětí v něm neexistují.

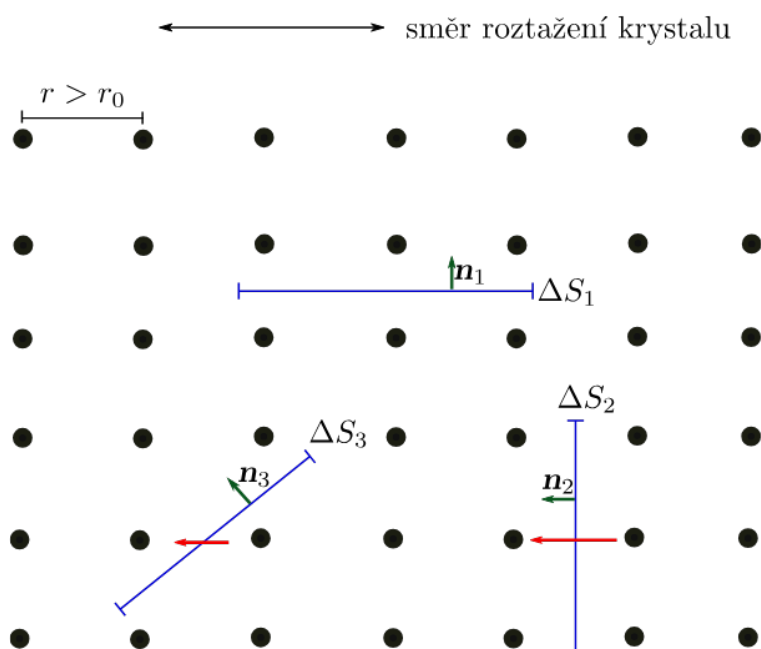
Uvažujme krystal (pevná látka uspořádaná do krystalové struktury), na který silově působíme, což má za následek, že dojde k jeho deformaci. Na obr. 17.2 jsou zachyceny molekuly (atomy) krystalu, které se působením vnějších sil přeuspořádají (deformace). Rozdělme si tento krystal na dvě části *A* a *B* myšlenou rovinou. Tím, že působením vnějších sil dojde přeuspořádání molekul krystalu, tak to způsobí, že molekuly začnou na sebe přes myšlenou plochu silově působit. Orientace těchto sil závisí na způsobu deformace. Na obr. 17.2(a) se molekuly krystalu od sebe vzdálily tím, že se posunuly podél myšlené roviny, což má za následek, že se začnou přitahovat. Na obr. 17.2(b) se roztažením krystalu rovněž molekuly od sebe vzdálily a opět se počnou vzájemně přitahovat. Na obr. 17.2(c) se naopak stlačením k sobě molekuly přiblížili, na což molekuly reagují odpuzujícími silami.



Obrázek 17.2: Rozdělení deformovaného krystalu myšlenou rovinou (modře) na dvě části, *A* a *B*. Celková síla, kterou na sebe atomy části *A* působí na atomy části *B* je naznačena šipkami. (a) Atomy jsou vůči sobě střížnou deformací posunuty podél pomyslné roviny. (b) Atomy jsou roztažením od sebe vzdáleny oproti klidovému stavu (přitažlivá síla). (c) Atomy jsou deformací k sobě přiblíženy oproti klidovému stavu (odpudivá síla).

Na obr. 17.3 jsou opět zachyceny molekuly krystalu, které se díky jeho roztažení od sebe vzdálily, a tudíž na sebe budou působit přitažlivými silami. Opět si v takovémto krystalu ve stavu napjatosti (deformovaný stav) představíme myšlené plošky, které jsou však různě orientovány. Vidíme, že velikost síly, která přes tyto plošky působí, závisí na její orientaci v uvažovaném krystalu. Přes orientovanou plošku ΔS_1 nepůsobí žádné síly (síly mezi molekulami působí jen ve směru roztažení krystalu), kdežto přes orientovanou plošku ΔS_2 dosahuje působící síla mezi molekulami maximální hodnoty, protože přes tuto plošku působí na sebe nejvíce molekul. Kdybychom tuto plošku zvětšovali, tak bude zahrnovat více molekul a síla přes ní působící bude o to větší. Přes plošku ΔS_3 působí na sebe méně molekul než přes plošku ΔS_2 , takže přes tuto plošku působí menší síla. Tedy orientace myšlené plošky ovlivňuje velikost síly, která přes ni působí.

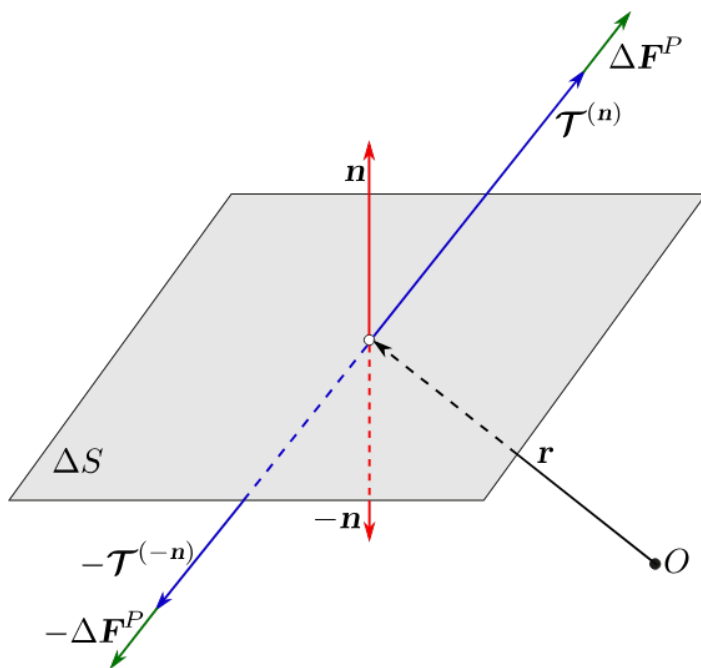
Z výše uvedeného vyplývá, že síly mezi molekulami jsou jen velmi krátkého do-



Obrázek 17.3: Krystal deformován roztažením a jsou v něm zakresleny tři pomyslné orientované plošky (modře). Přes plošku ΔS_1 je síla působící mezi atomy nulová, síla (červená šipka) přes plošku ΔS_2 orientovanou ve směru roztažení je maximální a síla přes plošku ΔS_3 je nenulová, ale menší než přes plošku ΔS_2 .

sahu. Zvolíme-li si nějakou myšlenou plochu v deformovaném tělese, pak na sebe působí jen ty molekuly nacházející se těsně na opačných stranách této plochy. Z tohoto důvodu tyto síly nazýváme **plošné síly** a budeme značit \mathbf{F}^P . Tyto síly hrají zásadní roli v mechanice kontinua. Označme si plošnou sílu působící přes orientovanou plošku $\Delta \mathbf{S} = \Delta S \mathbf{n}$ umístěnou v místě o polohovým vektorem \mathbf{r} jako $\Delta \mathbf{F}^P(\mathbf{r})$. Předpokládejme, že přes plošku ΔS ve zvoleném bodě o polohovém vektoru \mathbf{r} působí rovnoměrně rozložená plošná síla $\Delta \mathbf{F}^P$ mezi molekulami. Zavedeme si veličinu **vektor napětí** $\mathcal{T}^{(n)}$ následujícím způsobem, viz obr. 17.4:

$$\mathcal{T}^{(n)} = \frac{\Delta \mathbf{F}^P}{\Delta S} . \quad (17.2)$$



Obrázek 17.4: Rovnoměrně rozložená plošná síla $\Delta \mathbf{F}^P$ působící přes plošku ΔS s jednotkovým normálovým vektorem \mathbf{n} a odpovídající vektor napětí $\mathcal{T}^{(n)}$.

Abychom vyjádřili, že se vztahuje k plošnému elementu s vnějším normálovým vektorem \mathbf{n} , připojujeme znak normály nad označení vektoru napětí. Vektor napětí představuje sílu působící na jednotku plochy v deformovaném tělese. Není-li působení plošné síly $\Delta \mathbf{F}^P$ přes plošku ΔS rozloženo rovnoměrně (např. ploška nemusí být rovinná nebo se mění s polohou látka tvořící těleso), musíme vektor napětí $\mathcal{T}^{(n)}$ ve zvoleném bodě plošky zavést limitním způsobem:

$$\mathcal{T}^{(n)}(\mathbf{r}) = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}^P(\mathbf{r})}{\Delta S}, \quad (17.3)$$

při kterém plošku zmenšujeme tak, že plocha zvolený bod stále obsahuje a normálový jednotkový vektor \mathbf{n} zůstává stálý. Odtud můžeme psát, že

$$d\mathbf{F}^P = \mathcal{T}^{(n)}(\mathbf{r}) dS. \quad (17.4)$$

Pro výslednou plošnou sílu působící přes plochu S můžeme psát:

$$\mathbf{F}^P(S) = \int_S \mathcal{T}^{(n)}(\mathbf{r}) dS. \quad (17.5)$$

Tento vztah je možné vyjádřit ve složkovém tvaru jako

$$F_i^P(S) = \int_S \mathcal{T}_i^{(n)} dS, \quad i = 1, 2, 3. \quad (17.6)$$

Vektor napětí $\mathcal{T}^{(n)}(\mathbf{r}) = (\mathcal{T}_1^{(n)}, \mathcal{T}_2^{(n)}, \mathcal{T}_3^{(n)})$ charakterizuje stav napjatosti v daném místě kontinua. Vektor napětí charakterizuje rozložení vnitřních sil na myšlené ploše deformovaného tělesa. Vektor napětí je bodovou funkcí na rozdíl od

Plošný integrál budeme kvůli úspornosti značit jen \int_S .

plošné síly (17.5).

Složka vektoru napětí ve směru normálového vektoru se nazývá **normálové napětí**, kdežto složka vektoru napětí, která je kolmá na normálový vektor se nazývá **tečné napětí** nebo **smykové napětí**. Je-li směr normálového napětí souhlasný se směrem vnější normály, hovoříme o **tahovém napětí**, zkráceně o **tahu**. Jestliže působí na povrch těles normálová síla (vektor napětí je shodně orientovaný s uvažovaným normálovým vektorem $\mathcal{T}^{(n)} \uparrow \uparrow \mathbf{n}$), pak hovoříme o **prostém (čistém) tahu**. Je-li orientace normálového napětí opačná vzhledem k orientaci vnější normály $\mathcal{T}^{(n)} \uparrow \downarrow \mathbf{n}$, hovoříme o **tlakovém napětí**, zkráceně o **tlaku**. Jednotkou napětí je **pascal**, který značíme Pa.

Na opačném povrchu plošky, či elementu plochy, působí plošná síla $-\Delta \mathbf{F}^P$ (Zákon akce a reakce) a vektor napětí $-\mathcal{T}^{(-n)}$, pro který platí (viz obr. 17.4), že

$$\mathcal{T}^{(-n)}(\mathbf{r}) = -\mathcal{T}^{(n)}(\mathbf{r}) . \quad (17.7)$$

Plošné síly působící na vnitřních plochách uvažovaného tělesa nazýváme vnitřními; plošné síly, působící zevnějšku na hranici tělesa (např. v důsledku dotyku s jiným tělesem), nazýváme vnějšími.

V mechanice kontinua se kromě plošných sil setkáváme i se silami objemovými. **Síly objemové** \mathbf{F}^O jsou síly, které působí na všechny elementy objemu uvažovaného kontinua. Příkladem těchto sil jsou např. síly gravitační či setrvačné. Můžeme vyjádřit si objemovou sílu ve vektorovém tvaru jako

$$\mathbf{F}^O(V) = \int_V \mathcal{F} dV , \quad (17.8)$$

příp. ve složkovém tvaru:

$$F_i^O(V) = \int_V \mathcal{F}_i dV , \quad i = 1, 2, 3 , \quad (17.9)$$

kde $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3)$ představuje objemovou sílu vztaženou na jednotkový objem kontinua a platí pro ní:

$$\mathcal{F}(\mathbf{r}) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}^O(\mathbf{r})}{\Delta V} , \quad (17.10)$$

kde objem ΔV zmenšujeme tak, že stále obsahuje bod o polohovém vektoru \mathbf{r} , ve kterém \mathcal{F} určujeme.

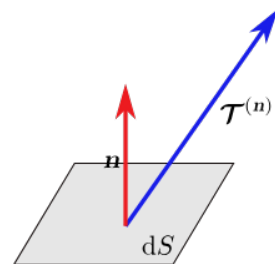
Odtud dostáváme, že

$$d\mathbf{F}^O = \mathcal{F}(\mathbf{r}) dV . \quad (17.11)$$

17.2 Tenzor napětí

Z předchozí části textu již víme, že vektor napětí $\mathcal{T}^{(n)}(\mathbf{r}) = (\mathcal{T}_1^{(n)}, \mathcal{T}_2^{(n)}, \mathcal{T}_3^{(n)})$ a jednotkový normálový vektor $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ k elementární ploše dS mají obecně rozdílné orientace. Jak již dříve bylo uvedeno (viz vztah (2.4)), tak v takovémto případě lze dát do vztahu jednotlivé složky obou vektorů pomocí složek tenzoru

Objemový integrál budeme kvůli úspornosti značit jen \int_V .



druhého řádu. Tímto tenzorem je tzv. **tenzor napětí** (Cauchyho tenzor napětí) $\overleftrightarrow{\sigma}$:

$$\overleftrightarrow{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}. \quad (17.12)$$

Tedy složku vektoru napětí si lze vyjádřit pomocí složky jednotkového normálového vektoru jako

$$\mathcal{T}_i^{(n)} = \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij} n_j, \quad i = 1, 2, 3. \quad (17.13)$$

Tedy např. $\mathcal{T}^{(e_1)}$ je vektor napětí v souřadnicové rovině, které přísluší normálový vektor $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$, takže můžeme pro jeho složky psát

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^{(e_1)} &= (\mathcal{T}_1^{(e_1)}, \mathcal{T}_2^{(e_1)}, \mathcal{T}_3^{(e_1)}) = \mathcal{T}_1^{(e_1)} \mathbf{e}_1 + \mathcal{T}_2^{(e_1)} \mathbf{e}_2 + \mathcal{T}_3^{(e_1)} \mathbf{e}_3 = \\ &= \sigma_{11} \mathbf{e}_1 + \sigma_{21} \mathbf{e}_2 + \sigma_{31} \mathbf{e}_3 = (\sigma_{11}, \sigma_{21}, \sigma_{31}). \end{aligned} \quad (17.14)$$

Podobně dostaneme vektory napětí ke zbývajícím souřadnicovým rovinám:

$$\mathcal{T}^{(e_2)} = (\sigma_{12}, \sigma_{22}, \sigma_{32}), \quad (17.15)$$

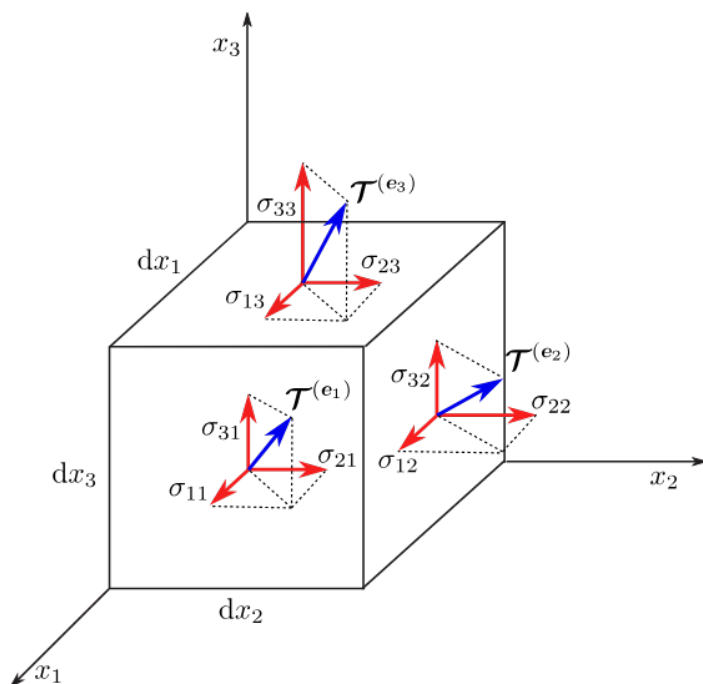
$$\mathcal{T}^{(e_3)} = (\sigma_{13}, \sigma_{23}, \sigma_{33}). \quad (17.16)$$

Složky vektorů napětí (17.14), (17.15) a (17.16) odpovídají složkám v jednotlivých sloupcích matice (17.12).

V každém bodě kontinua můžeme tedy stanovit nekonečně mnoho vektorů napětí pro všechny možné orientace normálových vektorů \mathbf{n} . Odtud vyplývá, že každému bodu kontinua přísluší nekonečně mnoho vektorů napětí. Jak jsme si ukázali, nepotřebujeme pro každou možnou orientaci plošky znát odpovídající vektor napětí, ale stačí za tímto účelem znát vektor napětí pouze pro plošky ležící ve třech základních souřadnicových rovinách. Pak pomocí těchto vektorů napětí můžeme učit vektor napětí pro libovolně orientovanou plošku, resp. její jednotkový normálový vektor \mathbf{n} , podle vztahu (17.13). Složky tenzoru napětí mající stejné indexy (ležící na diagonále matice tenzoru napětí (17.12)) reprezentují normálové napětí, kdežto složky tenzoru napětí nestejných indexů představují tečná (smyková) napětí. Ze značení výše uvedených složek vektorů napětí, resp. tenzoru napětí, vyplývá, že druhý index odpovídá indexu normálového vektoru příslušné souřadnicové roviny (směr normály k ploše, k níž je složka tenzoru napětí vztažena) a první indexy odpovídají indexům odpovídajících souřadnicových vektorů (označují směr složky, který odpovídá kladnému směru příslušné souhlasně orientované souřadnicové osy). Náznorně mohou být složky tenzoru napětí zachyceny např. způsobem uvedeným na obrázku 17.5.

17.2.1 Obecná rovnice rovnováhy kontinua

Rovnováha tuhého tělesa nastane tehdy, bude-li výslednice všech působících vnějších sil a jejich momentů rovna nulovému vektoru, viz kap. 16.5. V případě kontinua rovnováha rovněž nastane, bude-li výslednice všech vnějších sil (plošných



Obrázek 17.5: Složky tenzoru napětí a odpovídající vektory napětí.

i objemových) a jejich momentů nulová. Je-li v rovnováze uvažované kontinuum jako celek, pak musí být v rovnováze i jeho dílčí objemy. Kdybychom však postupovali při vyšetřování rovnováhy kontinua jako v případě tuhých těles, tak by nám vypadla vnitřní napětí, která jsou pro nás předmětem zájmu. Proto v případě kontinua postupujeme tak, že vyčleníme z uvažovaného kontinua libovolnou část o objemu V , která je ohraničena plochou S . Má-li být výslednice sil působících na zvolenou část kontinua nulová, pak musí platit, že

$$F_i^O + F_i^P = \int_V \mathcal{F}_i dV + \int_S \mathcal{T}_i^{(n)} dS = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (17.17)$$

Rovnost můžeme dále upravit pomocí vztahu (17.13), čímž dostaneme:

$$\int_V \mathcal{F}_i dV + \int_S \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij} n_j dS = \int_V \mathcal{F}_i dV + \int_S \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij} dS_j = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (17.18)$$

Plošný integrál v rovnosti (17.18) převedeme na integrál objemový pomocí Gaussovy věty (12.56) vyjádřenou ve složkovém tvaru, takže dostáváme rovnici:

$$\int_V \mathcal{F}_i dV + \int_V \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} dV = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (17.19)$$

kterou dále upravíme do následujícího tvaru:

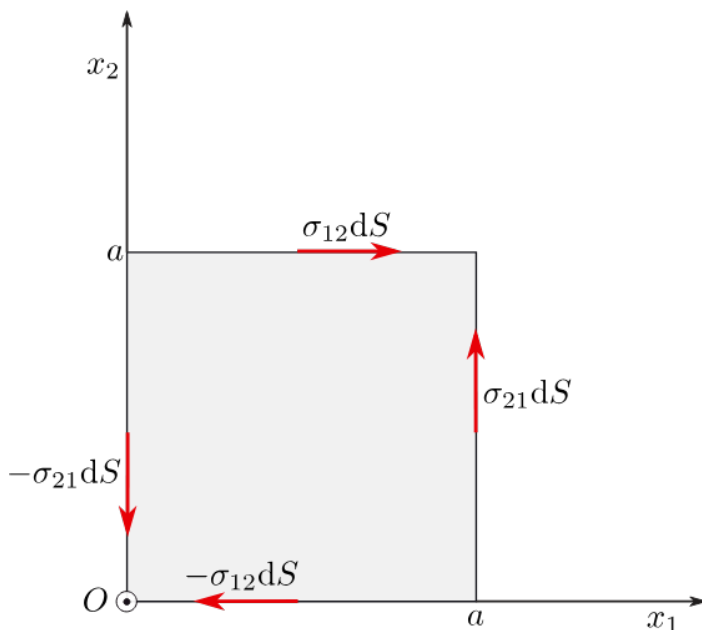
$$\int_V \left(\mathcal{F}_i + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \right) dV = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (17.20)$$

Jelikož objem uvažovaného kontinua byl zvolen obecně, bude podmínka (17.20) splněna, když bude platit:

$$\mathcal{F}_i + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (17.21)$$

Rovnice (17.21) představuje 1. podmínku rovnováhy kontinua.

Druhá podmínka rovnováhy bezprostředně vyplývá z podmínky, že výsledný moment sil působících na vyčleněný objem kontinua musí být roven nulovému vektoru. Jako příklad vyčleněného objemu kontinua vezměme elementární krychličku o rozměrech $dx_1 = dx_2 = dx_3 = a \rightarrow 0$ orientovanou svými stěnami rovnoběžně se souřadnicovými osami x_1 , x_2 a x_3 , viz obr. 17.5. Na elementárních plochách $dS = a^2$ elementární krychle jsou plošné síly konstantní. Ve stavu mechanické rovnováhy musí mít plošné síly opačnou orientaci. Tečná složka plošné síly ve směru osy x_1 je $\sigma_{12}dS$ a tečná složka plošné síly ve směru osy x_2 je $\sigma_{21}dS$, viz obr. 17.5 a 17.6. Podmínka rovnováhy otáčivých momentů plošných sil vzhledem k ose x_3 má tvar:



Obrázek 17.6: Tečné složky plošné síly působící na stěnách elementární krychle (bokorys).

$$M_3 \mathbf{e}_3 = (a, 0, 0) \times (0, \sigma_{21}dS, 0) + (0, a, 0) \times (\sigma_{12}dS, 0, 0) = \\ a(\sigma_{21} - \sigma_{12})dS \mathbf{e}_3 = (\sigma_{21} - \sigma_{12})a^3 \mathbf{e}_3 = \mathbf{0}, \quad (17.22)$$

protože $a \neq 0$, pak $\sigma_{21} = \sigma_{12}$. Pokud by nebyla podmínka symetrie složek tenzoru napětí splněna, elementární krychlička by se musela začít otáčet. Podobně bychom dostali i zbývající dvě podmínky symetrie $\sigma_{31} = \sigma_{13}$ a $\sigma_{32} = \sigma_{23}$ z podmínek rovnováhy momentu sil ke zbývajícím osám x_2 a x_1 .

Tedy můžeme napsat 2. podmínku rovnováhy kontinua:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (17.23)$$

Kdybychom chtěli 2. podmínku rovnováhy kontinua odvodit podobným přístupem jako v případě odvození 1. podmínky rovnováhy kontinua, tak bychom momenty objemových a plošných sil ve složkovém tvaru počítali pomocí Levi-Civita tenzoru, s jehož pomocí si lze vyjádřit složky vektoru (v našem případě momentu síly) vzniklého vektorovým součinem dvou vektorů (v našem případě polohového vektoru a objemové, resp. plošné síly, vztažené na jednotku objemu, resp. plochy), viz (4.31).

Opět bychom vyšli z podmínky, že výslednice momentů sil působících na zvolený objem kontinua musí být nulová. Potom pro i -tou složku výslednice momentů objemových a plošných sil musí platit

$$\int_V \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} x_j \mathcal{F}_k dV + \int_S \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} x_j \mathcal{T}_k^{(n)} dS = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (17.24)$$

Plošný integrál v rovnici (17.24) převedeme pomocí Gaussovy věty s použitím vztahu (12.56) na integrál objemový následujícím způsobem

$$\begin{aligned} \int_S \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} x_j \mathcal{T}_k^{(n)} dS &= \int_S \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} x_j \sum_l \sigma_{lk} n_l dS = \int_S \sum_{j,k,l} \varepsilon_{ijk} x_j \sigma_{lk} n_l dS = \\ &= \int_V \sum_{j,k,l} \frac{\partial}{\partial x_l} (\varepsilon_{ijk} x_j \sigma_{lk}) dV = \int_V \sum_{j,k,l} \varepsilon_{ijk} \left(\delta_{jl} \sigma_{lk} + x_j \frac{\partial \sigma_{lk}}{\partial x_l} \right) dV = \\ &= \int_V \sum_{j,k,l} \varepsilon_{ijk} \left(\sigma_{jk} + x_j \frac{\partial \sigma_{lk}}{\partial x_l} \right) dV. \end{aligned} \quad (17.25)$$

Ze vztahu (17.21) dostáváme, že

$$\mathcal{F}_k = - \frac{\partial \sigma_{lk}}{\partial x_l} = 0. \quad (17.26)$$

Do rovnice (17.24) dosadíme ze vztahů (17.25) a (17.26), takže dostaneme

$$\int_V \sum_{j,k,l} -\varepsilon_{ijk} x_j \frac{\partial \sigma_{lk}}{\partial x_l} dV + \int_V \sum_{j,k,l} \varepsilon_{ijk} \left(\sigma_{jk} + x_j \frac{\partial \sigma_{lk}}{\partial x_l} \right) dV = 0. \quad (17.27)$$

Sloučením integrálů na levé straně rovnice (17.27) dostaneme

$$\int_V \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} \sigma_{jk} dV = 0. \quad (17.28)$$

Vzhledem k tomu, že integrál (17.28) je roven nule pro libovolný objem, musí platit, že

$$\sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} \sigma_{jk} = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (17.29)$$

Vztah (17.29) představuje druhou podmínku rovnováhy kontinua.

Vzhledem k tomu, že Levi-Civita symbol, viz (4.30), je nenulový, jsou-li indexy i, j, k navzájem různé, je nutné, má-li být splněna rovnost (17.29), aby platilo, že

$$\sigma_{12} = \sigma_{21}, \quad \sigma_{13} = \sigma_{31}, \quad \sigma_{23} = \sigma_{32} \quad (17.30)$$

neboli zkráceně

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (17.31)$$

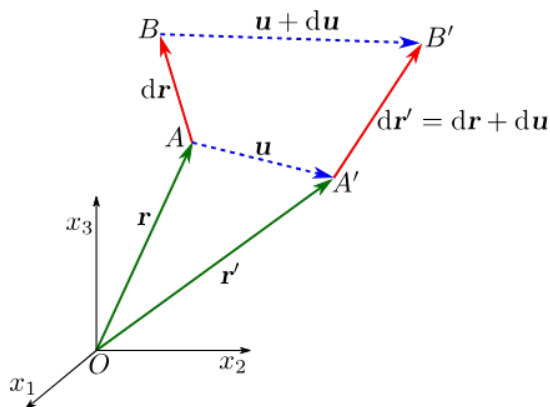
Z 2. podmínky rovnováhy kontinua (17.23) vyplývá, že tenzor napětí je tenzorem symetrickým, a tudíž ho můžeme vhodnou volbou souřadnicového systému diagonalizovat, tj. $\sigma_{ij} = 0$ pro $i \neq j$

$$\overleftrightarrow{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}. \quad (17.32)$$

Souřadnicové osy, pro které dochází k diagonalizaci tenzoru napětí se nazývají **hlavní osy napětí** a složky $\sigma_{11} \equiv \sigma_1$, $\sigma_{22} \equiv \sigma_2$, $\sigma_{33} \equiv \sigma_3$ se nazývají **hlavní napětí**. Je-li napětí v kontinuu homogenní, potom $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma$.

17.3 Tenzor deformace

V případě tuhých těles jsme předpokládali, že tato tělesa mohou konat pouze posuvný a otáčivý pohyb. Tuhá tělesa jsou však idealizací reálných těles, u kterých kromě dvou výše zmíněných pohybů, dochází i k pohybu **deformačnímu**. Deformační pohyb vede k deformaci neboli změně tvaru tělesa, obecně kontinua. Deformace souvisí se skutečností, že se mění vzájemná vzdálenost jednotlivých bodů kontinua. Abychom postihli deformaci kontinua, budeme předpokládat ně-



Obrázek 17.7: Posunutí bodů kontinua vlivem deformace.

jaký bod kontinua A , v jehož blízkosti se nachází bod kontinua B . Poloha bodu A je určena polohovým vektorem \mathbf{r} , kterému přísluší složky x_i , kde $i = 1, 2, 3$. Bodu B odpovídá polohový vektor $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$, viz obr. 17.7. Ve složkovém tvaru můžeme polohu bodu B vyjádřit jako $x_i + dx_i$. Vlivem silového působení bod kontinua A přejde do nové polohy o polohovém vektoru \mathbf{r}' , který ukazuje na bod A' , tedy

dojde k posunutí $A \rightarrow A'$. Posunutí bodu A do bodu A' je dáno **vektorem posunutí** \mathbf{u} , tedy platí, že $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{u}(\mathbf{r})$ neboli ve složkovém tvaru¹ $x'_i = x_i + u_i(x_j)$ ($i, j = 1, 2, 3$). Vlivem silového působení rovněž i bod B se posune do místa, které je označeno bodem B' ($B \rightarrow B'$). Tomuto bodu odpovídá polohový vektor $\mathbf{r}' + d\mathbf{r}' = \mathbf{r} + d\mathbf{r} + \mathbf{u} + d\mathbf{u}$. Element vektoru $d\mathbf{r}'$ odpovídá, viz obrázek 17.7, rozdílu polohových vektorů ukazujících na bod B' a bod A' , tj.

$$d\mathbf{r}' = \mathbf{r} + d\mathbf{r} + \mathbf{u} + d\mathbf{u} - (\mathbf{r} + \mathbf{u}) = d\mathbf{r} + d\mathbf{u}, \quad (17.33)$$

kde element vektoru posunutí $d\mathbf{u}$ reprezentuje deformaci kontinua.

Ve složkovém tvaru je možné vztah (17.33) vyjádřit následujícím způsobem

$$dx'_i = dx_i + du_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (17.34)$$

Diferenciál vektoru posunutí je dán vztahem²

$$du_i = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j, \quad i = 1, 2, 3,$$

což nám umožňuje přepsat vztah (17.34) do následujícího tvaru

$$dx'_i = dx_i + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j = \sum_{j=1}^3 \left(\delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) dx_j, \quad i = 1, 2, 3. \quad (17.35)$$

Pro lepší představu můžeme vyjádřit rovnost (17.35) např. pro index $i = 1$

$$dx'_1 = dx_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} dx_3. \quad (17.36)$$

Pomocí rovnosti (17.35) můžeme psát, že

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 dx'_i dx'_i &= \sum_{i=1}^3 \left[\sum_{j=1}^3 \left(\delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) dx_j \sum_{k=1}^3 \left(\delta_{ik} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) dx_k \right] = \\ &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \delta_{ij} \delta_{ik} dx_j dx_k + \delta_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_j dx_k + \delta_{ik} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j dx_k + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_j dx_k = \\ &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \delta_{ij} \delta_{ik} dx_j dx_k + \frac{\partial u_j}{\partial x_k} dx_j dx_k + \frac{\partial u_k}{\partial x_j} dx_j dx_k + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_j dx_k = \\ &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \delta_{ij} \delta_{ik} dx_j dx_k + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) dx_j dx_k = \\ &= \sum_{i=1}^3 dx_i dx_i + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) dx_j dx_k. \quad (17.37) \end{aligned}$$

¹Je třeba si uvědomit, že každá složka vektoru posunutí je funkcí souřadnic x_1, x_2 a x_3 , tj.

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) \equiv \mathbf{u}(x_1, x_2, x_3) = (u_1(x_1, x_2, x_3), u_2(x_1, x_2, x_3), u_3(x_1, x_2, x_3)).$$

²Z důvodu úspornějšího zápisu autoři odborné literatury věnované mechanice kontinua využívají Einsteinovu sumační konvenci. Vzhledem k tomu, že se toto skriptum věnuje mechanice kontinua jen okrajově, budeme se držet zápisů pomocí symbolů sumace.

Za míru deformace považujeme rozdíl čtverců délek vzájemně si odpovídající vektorů $d\mathbf{r}'$ a $d\mathbf{r}$, tedy veličinu:

$$|d\mathbf{r}'|^2 - |d\mathbf{r}|^2 = \sum_{i=1}^3 dx'_i dx'_i - \sum_{i=1}^3 dx_i dx_i, \quad (17.38)$$

kam dosadíme ze vztahu (17.37), čímž dostaneme, že

$$\begin{aligned} |d\mathbf{r}'|^2 - |d\mathbf{r}|^2 &= \\ &= \sum_{i=1}^3 dx_i dx_i + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) dx_j dx_k - \sum_{i=1}^3 dx_i dx_i = \\ &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) dx_j dx_k = \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 2e_{jk} dx_j dx_k, \end{aligned} \quad (17.39)$$

kde e_{jk} jsou složky **Greenova tenzoru**, resp. **tenzoru velkých deformací**, \overleftrightarrow{e} :

$$e_{jk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right), \quad j, k = 1, 2, 3. \quad (17.40)$$

Složky tenzoru deformací jsou bezrozměrné.

Výsledek (17.39) můžeme dále upravit do následujícího tvaru:

$$|d\mathbf{r}'|^2 - |d\mathbf{r}|^2 = \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 2e_{jk} dx_j dx_k = |d\mathbf{r}|^2 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 2e_{jk} s_j s_k, \quad (17.41)$$

kde s_j jsou složky jednotkového vektoru $\mathbf{s} = d\mathbf{r}/|d\mathbf{r}| = (s_1, s_2, s_3)$.

Odtud

$$\frac{|d\mathbf{r}'|^2 - |d\mathbf{r}|^2}{|d\mathbf{r}|^2} = \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 2e_{jk} s_j s_k. \quad (17.42)$$

Levou stranu tohoto vztahu dále upravíme:

$$\frac{|d\mathbf{r}'|^2 - |d\mathbf{r}|^2}{2|d\mathbf{r}|^2} = \frac{|d\mathbf{r}'| - |d\mathbf{r}|}{|d\mathbf{r}|} \frac{|d\mathbf{r}'| + |d\mathbf{r}|}{|d\mathbf{r}|} = \frac{|d\mathbf{r}'| - |d\mathbf{r}|}{|d\mathbf{r}|} \left(\frac{|d\mathbf{r}'|}{|d\mathbf{r}|} + 1 \right) = \delta(\delta + 2), \quad (17.43)$$

kde

$$\delta = \frac{|d\mathbf{r}'| - |d\mathbf{r}|}{|d\mathbf{r}|} = \frac{|d\mathbf{r}'|}{|d\mathbf{r}|} - 1 \quad (17.44)$$

představuje relativní prodloužení úsečky \overline{AB} , viz obr. 17.7.

Výsledek (17.43) dosadíme na levou stranu rovnosti (17.42), čímž dostaneme:

$$\delta(\delta + 2) = \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 2e_{jk} s_j s_k. \quad (17.45)$$

Jestliže se omezíme pouze na **malé deformace**, potom můžeme zanedbat kvadratický člen ve vztahu (17.40), čímž dostaneme složky tzv. **Cauchyho tenzoru**, resp. **tenzoru malých deformací**, $\overleftrightarrow{\epsilon}$, tj.

$$\epsilon_{jk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right), \quad j, k = 1, 2, 3. \quad (17.46)$$

Tedy

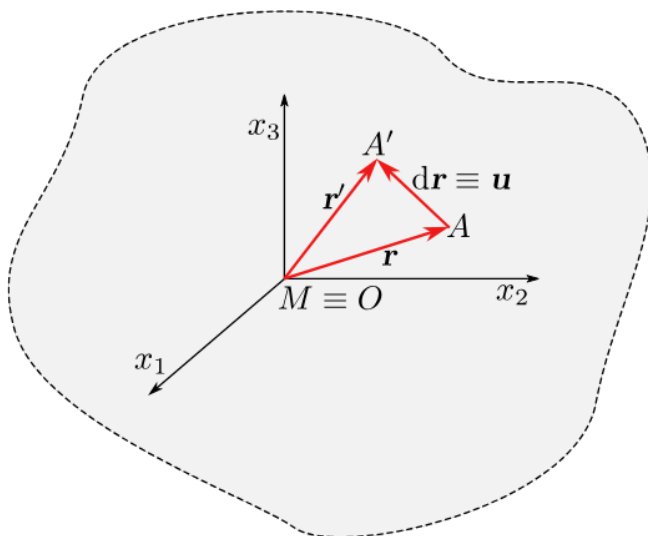
$$\overleftrightarrow{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{pmatrix}. \quad (17.47)$$

Ze vztahu pro prvky tenzoru malých deformací (17.46) je vidět, že se jedná o symetrický tenzor, tedy $\epsilon_{jk} = \epsilon_{kj}$. Jako symetrickému tenzoru mu přísluší kvadratická plocha nazvaná **elipsoid deformace**. Osy tohoto elipsoidu nazýváme hlavní osy (směry) deformace.

Pozn.: Není-li kontinuum homogenní, pak je tenzor deformace závislý na vyšetřovaném místě, tj. je funkcí souřadnic. Tvoří tak tenzorové pole. Podobně je tomu tak i v případě tenzoru napětí.

17.3.1 Posunutí bodu při malých deformacích

Vybereme si libovolný bod vyšetřovaného kontinua M a ten ztotožníme s počátkem souřadnicové soustavy O, x_1, x_2, x_3 , viz obr. 17.8. Do této soustavy umístíme



Obrázek 17.8: Uvažovaná geometrická situace.

bod A o polohovém vektoru $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)$, který reprezentuje sledovanou úsečku \overline{MA} . Polohový vektor \mathbf{r} si můžeme vyjádřit pomocí jeho jednotkového vektoru jako

$$\mathbf{r} = r\mathbf{s}, \quad \mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3). \quad (17.48)$$

V důsledku deformace kontinua přejde vektor \mathbf{r} ve vektor \mathbf{r}' o velikosti r' a prodělá přitom změnu $d\mathbf{r} = (dx_1, dx_2, dx_3)$. Změna vektoru \mathbf{r} ovšem představuje posunutí bodu A , pro které zavedeme vektor posunutí $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$. Zřejmě potom platí, že

$$d\mathbf{r} = \mathbf{u}. \quad (17.49)$$

Relativní prodloužení vektoru \mathbf{r} (úsečky \overline{MA}) je

$$\delta = \frac{|\mathbf{r}'| - |\mathbf{r}|}{|\mathbf{r}|} = \frac{r' - r}{r} = \frac{dr}{r} . \quad (17.50)$$

Abychom mohli relativní prodloužení vektoru \mathbf{r} dále upravit, tak si jeho velikost vyjádříme pomocí skalárního součinu:

$$r = \sqrt{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}} = \sqrt{\sum_{i=1}^3 x_i x_i} . \quad (17.51)$$

Diferencováním této rovnice dostaneme:

$$dr = \frac{\sum_{i=1}^3 x_i dx_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^3 x_i x_i}} = \frac{\sum_{i=1}^3 x_i dx_i}{r} . \quad (17.52)$$

Dosazením tohoto výsledku do vztahu pro relativní prodloužení (17.50) dostaneme:

$$\delta = \frac{\sum_{i=1}^3 x_i dx_i}{r^2} . \quad (17.53)$$

Pro relativní prodloužení můžeme použít i vztah (17.45), kde při uvažování malých deformací zanedbáme relativní prodloužení oproti dvojce a nahradíme složky tenzoru deformací e_{ij} za složky tenzoru malých deformací ϵ_{ij} , takže můžeme psát:

$$\delta = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \epsilon_{ij} s_i s_j = \frac{\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \epsilon_{ij} x_i x_j}{r^2} , \quad (17.54)$$

kde jsme k úpravě použili, že složky jednotkového vektoru \mathbf{s} jsou dány vztahem $s_i = x_i/r$ ($i = 1, 2, 3$).

Porovnáním tohoto výsledku se vztahem (17.53) dospějeme k následující podmínce:

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{i=1}^3 x_i dx_i}{r^2} &= \frac{\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \epsilon_{ij} x_i x_j}{r^2} \Rightarrow \sum_{i=1}^3 x_i dx_i = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \epsilon_{ij} x_i x_j \Rightarrow \\ &\sum_{i=1}^3 \left(\sum_{j=1}^3 \epsilon_{ij} x_i x_j - x_i dx_i \right) = \sum_{i=1}^3 x_i \left(\sum_{j=1}^3 \epsilon_{ij} x_j - dx_i \right) = 0 . \end{aligned} \quad (17.55)$$

protože vektor \mathbf{r} musí být nenulový, aby se dalo o jeho změně hovořit, musí být alespoň jedna jeho složka x_i různá od nuly. Potom aby byla splněna podmínka (17.55) musí být rovna nule závorka v poslední rovnosti, tj.

$$dx_i = \sum_{j=1}^3 \epsilon_{ij} x_j . \quad (17.56)$$

S ohledem na rovnost (17.49) musí platit:

$$dx_i = u_i , \quad i = 1, 2, 3 , \quad (17.57)$$

Místo velikosti vektorů $|\mathbf{dr}|$ a $|\mathbf{dr}'|$ používáme velikosti vektorů \mathbf{r} a \mathbf{r}' .

což dosadíme do rovnice (17.56) a dospějeme k následujícímu závěru:

Posunutí bodu při malých deformacích

Malá deformace kontinua způsobuje posunutí koncového bodu vektoru $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)$ vycházejícího z počátku souřadnicové soustavy, o vektor $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, jehož souřadnice jsou

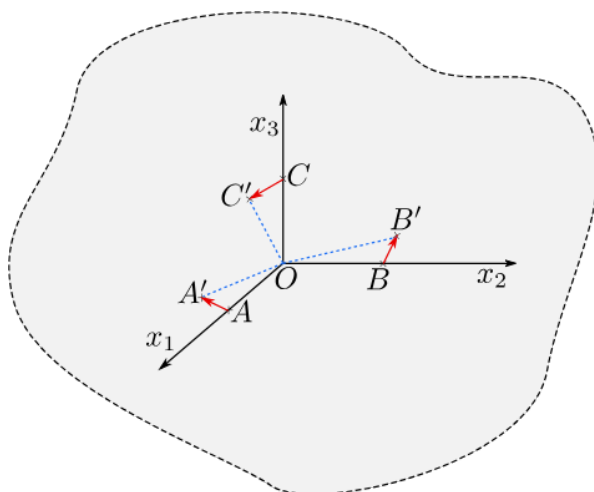
$$u_i = \sum_{j=1}^3 \epsilon_{ij} x_j, \quad i = 1, 2, 3. \quad (17.58)$$

Vyjádříme-li si souřadnice x_1, x_2, x_3 polohového vektoru \mathbf{r} pomocí souřadnic jeho jednotkového vektoru ($x_j = r s_j$), pak lze upravit vztah (17.58) s ohledem na vztah (17.31) do tvaru:

$$u_i = r \sum_{j=1}^3 \epsilon_{ij} s_j = r \sum_{j=1}^3 \epsilon_{ji} s_j, \quad i = 1, 2, 3. \quad (17.59)$$

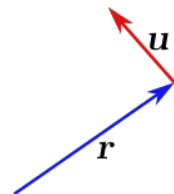
17.3.2 Geometrický význam složek tenzoru malých deformací

V každém bodu tělesa si můžeme zvolit malé okolí bodu (obecně se deformace těles může v různých místech projevovat jinak, proto se omezíme na malé okolí). Nechť je tímto bodem bod O , který současně bude reprezentovat počátek kartézské souřadnicové soustavy. Na osách, v rámci uvažovaného okolí, si zvolíme body A , B a C , které vymezují úsečky \overline{OA} , \overline{OB} a \overline{OC} , viz obr. 17.9. Po deformaci tělesa



Obrázek 17.9: Posunutí zvolených třech bodů při deformaci tělesa.

se úsečky změní na $\overline{OA'}$, $\overline{OB'}$ a $\overline{OC'}$, vlivem posunutí $A \rightarrow A'$, $B \rightarrow B'$, $C \rightarrow C'$ (předpokládáme malé okolí a malé deformace, takže můžeme předpokládat, že se úsečky nedeformují a zůstanou úsečkami), čímž vzniknou tři vektory posunutí $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$, $\overrightarrow{CC'}$, viz obr. 17.9. Můžeme zavést vektory: $\overrightarrow{OA} = (|OA|, 0, 0)$, $\overrightarrow{OB} =$



$(0, |OB|, 0)$ a $\vec{OC} = (0, 0, |OC|)$, kde $|OA|$, $|OB|$, $|OC|$ jsou délky úseček. Na základě vztahu (17.59) budou vzniklé vektory posunutí mít následující složky:

$$\vec{AA'} = |OA|(\epsilon_{11}, \epsilon_{12}, \epsilon_{13}), \quad \vec{BB'} = |OB|(\epsilon_{21}, \epsilon_{22}, \epsilon_{23}), \quad \vec{CC'} = |OC|(\epsilon_{31}, \epsilon_{32}, \epsilon_{33}). \quad (17.60)$$

Odtud je vidět, že např. při působení čistého tahu ve směru osy x_1 na vetknutou homogenní tyč, jejíž podstava leží v rovině $x_1 = 0$, budou body A' , B' a C' ležet na souřadnicových osách, takže vektory posunutí budou mít následující složky:

$$\vec{AA'} = |OA|(\epsilon_{11}, 0, 0), \quad \vec{BB'} = |OB|(0, \epsilon_{22}, 0), \quad \vec{CC'} = |OC|(0, 0, \epsilon_{33}). \quad (17.61)$$

Označíme-li délku tyče a a její příčné rozměry b a c , potom po deformaci čistým tahem označíme její rozměry a' , b' a c' . Relativní prodloužení, neboli prodloužení na jednotku délky, ve směrech os x_1 , x_2 a x_3 vyplývá přímo ze vztahů (17.61):

$$\delta_{x_1} = \frac{|\vec{AA'}|}{|OA|} = \epsilon_{11}, \quad \delta_{x_2} = \frac{|\vec{BB'}|}{|OB|} = \epsilon_{22}, \quad \delta_{x_3} = \frac{|\vec{CC'}|}{|OC|} = \epsilon_{33}. \quad (17.62)$$

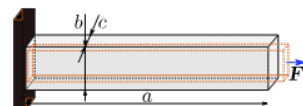
Potom pro rozměry po deformaci čistým tahem můžeme psát:

$$a' = a + \Delta a = a + a\delta_{x_1} = a + a\epsilon_{11} = a(1 + \epsilon_{11}), \quad b' = b(1 + \epsilon_{22}), \quad c' = c(1 + \epsilon_{33}), \quad (17.63)$$

Tedy délka podél osy x_1 se změní $(1 + \epsilon_{11})$ -krát, délka podél osy x_2 se změní $(1 + \epsilon_{22})$ -krát a délka podél osy x_3 se změní $(1 + \epsilon_{33})$ -krát.

Je zřejmé, že v našem případě je $\epsilon_{11} > 0$, $\epsilon_{22} < 0$ a $\epsilon_{33} < 0$, tedy ve směru osy x_1 dojde k prodloužení tyče, kdežto ve směrech os x_2 a x_3 dojde k jejímu zkrácení. Tedy složky ϵ_{11} , ϵ_{22} a ϵ_{33} souvisí s posuny bodů kontinua podél os x_1 , x_2 a x_3 .

Abychom si mohli snadněji interpretovat vztah (17.58), tak budeme předpokládat, že body na osách mají následující souřadnice: $A = [1, 0, 0]$, $B = [0, 1, 0]$, $C = [0, 0, 1]$. Po obecné deformaci se tyto body posunou, tj. $A \rightarrow A'$, $B \rightarrow B'$, $C \rightarrow C'$, a budou mít na základě vztahu (17.58) souřadnice: $A' = [1 + \epsilon_{11}, \epsilon_{12}, \epsilon_{13}]$, $B' = [\epsilon_{21}, 1 + \epsilon_{22}, \epsilon_{23}]$, $C' = [\epsilon_{31}, \epsilon_{32}, 1 + \epsilon_{33}]$. Vidíme, že situace je složitější oproti čistému tahu, protože při deformaci se mění všechny tři souřadnice uvažovaných bodů. Kdybychom uvažovali krychli ležící na osách x_1 , x_2 a x_3 , tak by při obecné deformaci nedošlo jen ke změně velikosti jejích stran, ale došlo by i k jejich zkosení, jejichž velikost určují nediagonální složky tenzoru malých deformací.



17.3.3 První invariant tenzoru malé deformace a objemová dilatace

V souřadnicové soustavě hlavních os deformace vymizí (jsou nulové) nediagonální složky tenzoru malé deformace, takže je možné konstatovat, že při deformaci podél hlavních os deformace se si tyto osy zachovávají svůj směr, a tedy i po deformaci jsou vzájemně kolmé, jelikož smykové úhly jsou nulové. Každou deformaci okolí určitého bodu lze popsat jako smrštění nebo roztahení podél tří hlavních os deformace, které jsou na sebe vzájemně kolmé.

V maticovém vyjádření můžeme zapsat tenzor malých deformací v souřadnicové soustavě hlavních os jako

$$\overleftrightarrow{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{pmatrix}, \quad (17.64)$$

kde $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ jsou řešení následující charakteristické kubické rovnice³

$$\begin{vmatrix} (\epsilon_{11} - \epsilon) & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & (\epsilon_{22} - \epsilon) & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & (\epsilon_{33} - \epsilon) \end{vmatrix} = 0, \quad (17.65)$$

kterou je možné přepsat do tvaru:

$$\epsilon^3 - \vartheta_1 \epsilon^2 + \vartheta_2 \epsilon - \vartheta_3 = 0, \quad (17.66)$$

kde ϑ_1, ϑ_2 a ϑ_3 jsou tzv. **skalární invarianty** tenzoru malých deformací, tj. jedná se o veličiny, které se nemění při transformacích souřadnic. Důležitý je především **první invariant** tenzoru malých deformací ϑ_1 , který má největší uplatnění v teorii pružnosti a je dán následujícím vztahem:

$$\vartheta_1 = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 = \text{konst.} \quad (17.67)$$

Předpokládejme kvádr o hranách a, b, c , které jsou rovnoběžné s hlavními osami deformace. Objem tohoto kváдру je

$$V_0 = a b c, \quad (17.68)$$

Po deformaci tohoto kváдру dostaneme opět kvádr s hranami a', b', c' , jelikož, jak bylo výše uvedeno, hlavní osy deformace si při deformaci podél těchto os zachovávají svůj směr. Protože $\epsilon_1 = \epsilon_{11}, \epsilon_2 = \epsilon_{22}, \epsilon_3 = \epsilon_{33}$ odpovídají relativním prodloužením ve směru hlavních os deformace, je možné pro hrany deformovaného kváдру psát:

$$\begin{aligned} a' &= a + \Delta a = a + a \epsilon_1 = a(1 + \epsilon_1), \\ b' &= b + \Delta b = b + b \epsilon_2 = b(1 + \epsilon_2), \\ c' &= c + \Delta c = c + c \epsilon_3 = c(1 + \epsilon_3). \end{aligned} \quad (17.69)$$

Objem kváдру po deformaci bude

$$V = a' b' c' = a b c (1 + \epsilon_1)(1 + \epsilon_2)(1 + \epsilon_3) \cong a b c (1 + \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3). \quad (17.70)$$

³Jedná se vlastně o hledání vlastních čísel matice, přičemž maticí je v tomto případě maticový zápis tenzoru malých deformací (17.47). V našem případě jsou vlastními čísly $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$. Vlastní vektory odpovídající nalezeným vlastním číslům jsou navzájem kolmé a jejich jednotkové vektory jsou souřadnicovými vektory souřadnicové soustavy hlavních os deformace.

Pomocí vztahů (17.68), (17.70) a (17.67) můžeme vyjádřit **objemovou (kubickou) dilataci** jako

$$\mathcal{K} = \frac{V - V_0}{V_0} = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 = \epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33} = \vartheta_1. \quad (17.71)$$

Výsledek (17.71) nám říká, že první invariant vyjadřuje změnu jednotkového objemu po malé deformaci.

Z definičního vztahu pro složky tenzoru malých deformací (17.46) vyplývá, že

$$\mathcal{K} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \nabla \cdot \mathbf{u}, \quad (17.72)$$

kde u_1 , u_2 a u_3 jsou složky vektoru posunutí \mathbf{u} .

17.4 Zobecněný Hookův zákon

Předpokládejme, že je kontinuum podrobena působení časově neproměnných vnějších sil, takže dochází k jeho deformaci. Přestanou-li tyto vnější síly působit, kontinuum (těleso) se vrátí do původního stavu. Takovéto těleso pak nazýváme **tělesem pružným (elastickým)**⁴. Zmíněná deformace vlivem vnějších sil má za následek vznik napětí, které kompenzuje ve všech bodech kontinua vlivy zmíněných vnějších sil (dochází k rovnováze, tj. v tělese jsou vnitřní síly se silami vnějšími v rovnováze). Odtud vyplývá, že v ustáleném stavu je tenzor napětí nějakou funkcí složek tenzoru deformace. V následujícím textu se budeme věnovat pouze případu, kdy tenzor napětí bude lineární funkcí složek tenzoru deformace. Tímto předpokladem se omezíme na tzv. **lineární teorii pružnosti**. Obecná lineární závislost mezi napětím a deformací je dána **zobecněným Hookovým zákonem**, který můžeme zapsat v následujícím tvaru

$$\sigma_{ij} = \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 C_{ijkl} \epsilon_{kl}, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (17.73)$$

Zobecněný Hookův zákon je dán tenzorovou rovnicí, která nám ukazuje, jak každá ze šesti složek tenzoru napětí (symetrický tenzor) závisí na šesti složkách tenzoru malých deformací. Tenzor čtvrtého řádu $\{\mathbf{C}\}$ nazýváme **tenzorem elastických koeficientů**. Složky tenzoru elastických koeficientů jsou obecně funkcí polohy, avšak my se omezíme pouze na případ homogenních elastických těles, pro která složky tohoto tenzoru na poloze nezávisí. Plný počet těchto nezávislých složek je využit pouze v případě látek z velkým stupněm anizotropie. Tenzor elastických koeficientů $\{\mathbf{C}\}$, jakožto tenzor čtvrtého řádu má $3^4 = 81$ složek. Díky symetrii tenzoru napětí $\overleftrightarrow{\boldsymbol{\sigma}}$ a tenzoru malých deformací $\overleftrightarrow{\boldsymbol{\epsilon}}$ platí, že $C_{ijkl} = C_{jikl}$ a $C_{ijkl} = C_{ijlk}$, čímž se tedy počet nezávislých složek tenzoru $\{\mathbf{C}\}$ redukuje na $36 = 6 \cdot 6$. Avšak z energetických úvah vyplývá, že tenzor $\{\mathbf{C}\}$ je symetrický i při záměně první dvojice indexů s dvojicí druhou, a proto platí, že $C_{ijkl} = C_{klij}$. Tímto se dále

⁴Nutno poznamenat, že reálná tělesa se do původního stavu nevrací, a tudíž u nich pozorujeme tzv. **zbytkovou deformaci**. Tedy těleso bez zbytkové deformace je tělesem dokonale pružným. Opakem dokonale pružných těles jsou tělesa (dokonale) **plastická**, tj. tělesa, která zůstávají ve výsledném zdeformovaném stavu i v případě, že vnější síly přestanou působit.

redukuje počet nezávislých složek tenzoru elastických koeficientů na výsledných 21 nezávislých složek. S tímto počtem složek tenzoru $\{\mathbf{C}\}$ se setkáváme pouze u látek s vysokým stupněm anizotropie⁵. Při přechodu k látkám méně anizotropním se tento počet dále výrazně redukuje⁶. Pro izotropní elastické těleso⁷ se počet nezávislých elastických koeficientů redukuje na 2.

Izotropnímu elastickému tělesu musí příslušet izotropní tenzor elastických koeficientů $\{\mathbf{C}\}$. Obecně pro izotropní tenzor platí, že se jeho složky při ortogonální transformaci souřadnic nemění neboli izotropní tenzor má stejné složky v každé ortonormální bázi⁸. Pomocí Kroneckerova symbolu, jakožto izotropního tenzoru druhého řádu, je možné vytvořit následující tři izotropní tenzory čtvrtého řádu

$$A_{ijkl} = \delta_{ij}\delta_{kl}, \quad B_{ijkl} = \delta_{ik}\delta_{jl}, \quad H_{ijkl} = \delta_{il}\delta_{jk}. \quad (17.74)$$

Dá se dokázat, že jakýkoliv izotropní tenzor čtvrtého řádu může být vyjádřen jako lineární kombinace výše uvedených izotropních tenzorů čtvrtého řádu (17.74), tedy i izotropní tenzor elastických koeficientů $\{\mathbf{C}\}$

$$C_{ijkl} = \lambda A_{ijkl} + \alpha B_{ijkl} + \beta H_{ijkl}, \quad i, j, k, l = 1, 2, 3, \quad (17.75)$$

kde λ, α, β jsou konstanty.

Pomocí vztahů (17.74) a rovnosti (17.75) je možné vyjádřit zobecněný Hookův zákon (17.73) jako

$$\sigma_{ij} = \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 C_{ijkl} \epsilon_{kl} = \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} \epsilon_{kl} + \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 \alpha \delta_{ik} \delta_{jl} \epsilon_{kl} + \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 \beta \delta_{il} \delta_{jk} \epsilon_{kl}, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (17.76)$$

Odtud úpravou dostaneme, že

$$\sigma_{ij} = \lambda \sum_{k=1}^3 \epsilon_{kk} \delta_{ij} + (\alpha + \beta) \epsilon_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (17.77)$$

S ohledem na vztah (17.67) a zavedením označení 2μ za $\alpha + \beta$ můžeme přepsat rovnici (17.77) do následujícího tvaru:

$$\sigma_{ij} = \lambda \vartheta_1 \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (17.78)$$

Vztah (17.78) vyjadřuje **zobecněný Hookův zákon pro izotropní těleso**. První člen na pravé straně rovnice (17.78) popisuje objemovou deformaci a druhý deformaci tvarovou. Konstanty λ, μ se nazývají **Laméovy koeficienty**. Protože složky tenzoru deformace jsou bezrozměrné, mají Laméovy koeficienty stejný fyzikální rozměr jako složky tenzoru napětí, tj. $\text{N/m}^2 \equiv \text{Pa}$. Budeme dále předpokládat, že

⁵Připomeňme, že anizotropní těleso má v různých směrech rozdílné mechanické vlastnosti.

⁶Příkladem mohou být krystalové struktury (krychlová, hexagonální atd.), u kterých se uplatní další symetrie, čímž se počet nezávislých složek tenzoru $\{\mathbf{C}\}$ dále sníží.

⁷Izotropním elastickým tělesem chápeme těleso, které má ve všech směrech stejné mechanické vlastnosti. Příkladem mohou být látky s polykrystalickou strukturou, např. kovy.

⁸Dá se ukázat, že tenzor nultého řádu (skalár) je izotropním tenzorem, izotropní tenzor prvního řádu neexistuje, jediným izotropním tenzorem druhého řádu je Kroneckerův symbol a jediným izotropním tenzorem třetího řádu je Levi-Civitaův symbol.

kontinuum bude izotropní a homogenní, takže Laméovy koeficienty budou představovat konstanty charakterizující elastické vlastnosti vyšetřovaného kontinua. Pro konkrétní materiály musí být Laméovy konstanty určeny pomocí vhodně navržených experimentů.

Stejně jako jsme si zavedli první invariant pro tenzor malých deformací (17.67), tak si lze analogickým způsobem zavést první invariant tenzoru napětí:

$$\Theta_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = \text{konst.} , \quad (17.79)$$

kde $\sigma_1 = \sigma_{11}$, $\sigma_2 = \sigma_{22}$ a $\sigma_3 = \sigma_{33}$ jsou vlastní čísla odpovídající charakteristické kubické rovnice, která se rovnají složkám tenzoru napětí pro hlavní osy napětí.

Z Hookova zákona pro izotropní tělesa (17.78) můžeme psát:

$$\Theta_1 = \sum_{i=1}^3 \sigma_{ii} = \lambda \vartheta_1 \underbrace{\sum_{i=1}^3 \delta_{ii}}_{=3} + 2\mu \underbrace{\sum_{i=1}^3 \epsilon_{ii}}_{=\vartheta_1} = (3\lambda + 2\mu)\vartheta_1 . \quad (17.80)$$

Tento výsledek udává vztah mezi prvním invariantem napětí Θ_1 a prvním invariantem malých deformací ϑ_1 .

Ze vztahu (17.80) také můžeme psát, že

$$\vartheta_1 = \frac{\Theta_1}{3\lambda + 2\mu} . \quad (17.81)$$

Vztáhneme-li tenzor malých deformací k hlavním osám deformace, pak

$$\epsilon_{11} = \epsilon_1 , \quad \epsilon_{22} = \epsilon_2 , \quad \epsilon_{33} = \epsilon_3 , \quad \epsilon_{12} = \epsilon_{13} = \epsilon_{23} = 0 . \quad (17.82)$$

Pro tyto hodnoty složek tenzoru malých deformací vychází ze zobecněného Hookova zákona pro izotropní kontinuum (17.78) pro složky tenzoru napětí:

$$\sigma_{11} , \sigma_{22} , \sigma_{33} \neq 0 , \quad \text{zatímco} \quad \sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0 . \quad (17.83)$$

Odtud plyne důležitý závěr:

Hlavní osy

V homogenním a izotropním prostředí splývají hlavní směry deformace se směry hlavních napětí.

Na základě rovnice (17.78) můžeme napsat inverzní Hookův zákon pro izotropní tělesa přepsat jako

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu} \sigma_{ij} - \frac{\lambda}{2\mu} \delta_{ij} \vartheta_1 . \quad (17.84)$$

Dosazením za ϑ_1 ze vztahu (17.81) do rovnice (17.84) po úpravě dostaneme následující tvar inverzního Hookova zákona pro izotropní kontinuum:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu} \left(\sigma_{ij} - \delta_{ij} \frac{\Theta_1}{3\lambda + 2\mu} \lambda \right) . \quad (17.85)$$

17.4.1 Elementární Hookův zákon

Uvažujme nyní případ, kdy je izotropní těleso podrobena **čistému tahu** (vektor napětí má stejný směr jako jednotkový normálový vektor) ve směru osy x_1 , pak $\sigma_{11} \neq 0$ a ostatní složky tenzoru napětí jsou **nulové** ($\Theta_1 = \sigma_{11}$). Za těchto okolností z rovnosti (17.85) plyne:

$$\epsilon_{11} = \frac{1}{2\mu} \left(\sigma_{11} - \delta_{11} \frac{\Theta_1}{3\lambda + 2\mu} \lambda \right) = \frac{1}{2\mu} \left(\sigma_{11} - \frac{\sigma_{11}}{3\lambda + 2\mu} \lambda \right) = \frac{1}{2\mu} \left(1 - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} \right) \sigma_{11} = \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)} \sigma_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E}, \quad (17.86)$$

kde konstanta

$$E = \frac{\sigma_{11}}{\epsilon_{11}} = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \quad (17.87)$$

představuje **Youngův modul pružnosti**.

Dále pro čistý tah z inverzního Hookova zákona (17.85) můžeme psát:

$$\epsilon_{22} = \epsilon_{33} = -\frac{\lambda}{2\mu} \frac{\sigma_{11}}{3\lambda + 2\mu}, \quad \epsilon_{ij} = 0 \quad \text{pro } i \neq j. \quad (17.88)$$

Ze vztahů (17.86) a (17.88) je zřejmé, že je-li podrobena izotropní těleso čistému tahu, potom u něho **nedochází** ke smykovým deformacím, takže se jeho deformace projeví pouze jeho relativním prodloužením, resp. zkrácením, ve směru souřadnicových os.

Přímo ze vztahu (17.87) je možné napsat **elementární Hookův zákon v podélném směru** v matematické vyjádření jako

$$\epsilon_{11} = \frac{1}{E} \sigma_{11} \quad (17.89)$$

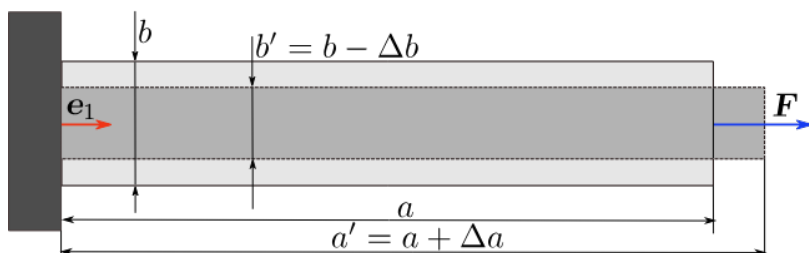
neboli

$$\epsilon_{11} = \frac{a' - a}{a} = \frac{\Delta a}{a} = \frac{1}{E} \frac{F}{S}, \quad (17.90)$$

kde a je původní délka tyče⁹, a' je nastalá délka tyče vlivem silového působení, S je její průřez a F je velikost síly, kterou namáháme tyč v tahu ve směru osy x_1 (podélná síla), viz obr. 17.10.

Přímá úměrnost mezi deformací a napětím, jak je popisována vztahem (17.89), platí jen pro malé deformace. Pro větší hodnoty deformace přestává být vztah mezi napětím a deformací lineární. Na obrázku 17.11 je zachycen tzv. **tahový (napěťový) diagram** tenké tyče. Na tahovém diagramu jsou vyznačeny čtyři významné body. Bod A je bodem, za kterým přestává elementární Hookův zákon (17.89) platit, neboli od tohoto bodu přestává platit předpokládaný lineární vztah mezi napětím a deformací. Tento bod nazýváme **mez úměrnosti**. Za tímto bodem začíná napětí růst pomaleji. Dalším bodem je bod B , který nazýváme **mezí pružnosti**. Do tohoto bodu je deformace ještě vratná. Za mezí pružnosti dochází k plastické deformaci. V oblasti plastické deformace se dále nachází bod C , který nazýváme **mez kluzu**. Od tohoto bodu dochází k další deformaci, avšak prakticky

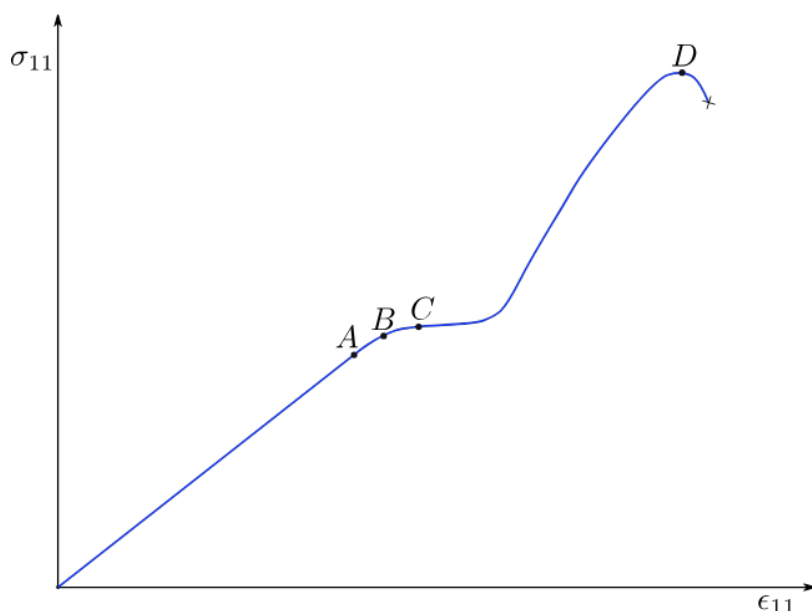
⁹Zde hovoříme o tyči s ohledem na experimentální sestavu sloužící k určování Youngova modulu pro daný materiál.



Obrázek 17.10: Působení čistého tahu na vetknutou tyč obdélníkového průřezu ve směru osy x_1 . Z obrázku je patrné podélné prodloužení a příčné zkrácení tyče, mající rozměry před deformací $a \times b \times c$.

při konstantním napětí, takže říkáme, že materiál teče. V této fázi dochází ke změně některých fyzikálních vlastností zkoumaného materiálu. Posledním bodem je bod D , který nazýváme **mez pevnosti**. Za tímto bodem dochází ke zmenšování příčného průřezu uvažované tyče, až se nakonec tato tyč přetrhne.

Další významnou konstantou je tzv. **Poissonova konstanta** (součinitel příčného



Obrázek 17.11: Tahový (napěťový) diagram tyče.

zkrácení), která je definována jako poměr příčného zkrácení k relativnímu prodloužení, tedy podíl vztahů (17.88) a (17.86):

$$\nu = \left| \frac{\epsilon_{22}}{\epsilon_{11}} \right| = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} . \quad (17.91)$$

Z definičního vztahu pro Poissonovu konstantu (17.91) je zřejmé, že tato konstanta je bezrozměrná.

Ze vztahu (17.86) si vyjádříme složku tenzoru napětí σ_{11} :

$$\sigma_{11} = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \epsilon_{11} , \quad (17.92)$$

za kterou dosadíme do vztahu (17.88), čímž po úpravě dostaneme matematické vyjádření **elementárního Hookova zákona v příčném směru**:

$$\epsilon_{22} = -\nu\epsilon_{11} \quad (17.93)$$

neboli (viz obr. 17.10)

$$\frac{\Delta b}{b} = -\nu \frac{\Delta a}{a} , \quad (17.94)$$

resp.

$$\epsilon_{33} = -\nu\epsilon_{11} \quad (17.95)$$

neboli

$$\frac{\Delta c}{c} = -\nu \frac{\Delta a}{a} . \quad (17.96)$$

Pomocí vztahů (17.87) a (17.91) můžeme dospět k následujícím vztahům pro Laméovy koeficienty vyjádřené pomocí Youngova modulu a Poissonovy konstanty:

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} , \quad (17.97)$$

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} . \quad (17.98)$$

Uvažíme-li, že pro tyč obdélníkového průřezu platí, že $\epsilon_{11} = \Delta a/a \ll 1$ a $\epsilon_{22} = \epsilon_{33} = \Delta b/b = \Delta c/c \ll 1$, potom s ohledem na vztahy (17.93) a (17.96) můžeme objemovou dilataci (17.71) vyjádřit následujícím způsobem:

$$\mathcal{K} = \epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33} = \epsilon_{11} + 2\epsilon_{22} = \epsilon_{11}(1-2\nu) . \quad (17.99)$$

Jelikož objem tyče tahovým působením vždy roste, musí platit, že $0 \leq \nu \leq 0,5$. Pro materiály, jejichž Poissonova konstanta se blíží hodnotě 0,5, se objem tyče téměř nemění, takovým materiálem je např. guma.

Pomocí konstant E a ν je možné přepsat inverzní Hookův zákon pro izotropní materiály jako

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{E} [(1+\nu)\sigma_{ij} - \delta_{ij}\nu\Theta] . \quad (17.100)$$

Podobně můžeme přepsat i Hookův zákon pro izotropní materiály

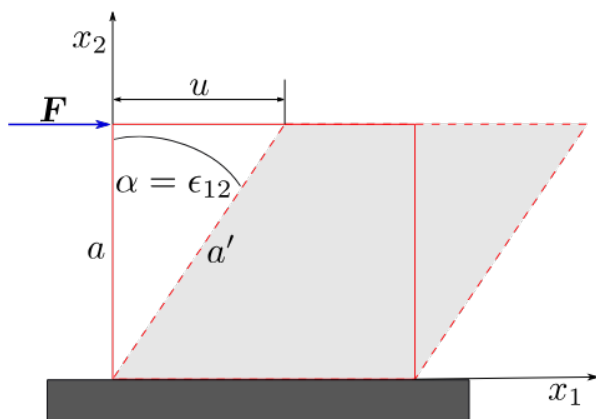
$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \left(\epsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \vartheta_1 \delta_{ij} \right) . \quad (17.101)$$

Dále uvažujme případ, kdy je izotropní těleso podrobena **čistému (prostému) smyku**. Čistý smyk nastává v případě, kdy pouze jeden nediagonální pár složek tenzoru deformace je nenulový. Nechť je tímto párem pár $\epsilon_{12} = \epsilon_{21} \neq 0$, takže $\epsilon_{11} = \epsilon_{22} = \epsilon_{33} = \epsilon_{13} = \epsilon_{31} = \epsilon_{23} = \epsilon_{32} = 0$, viz obr. 17.12. Z tohoto obrázku lze vidět, že nedošlo k prodloužení ve směru souřadnicových os. Na základě Hookova zákona pro izotropní tělesa (17.78) pak můžeme psát, že

$$\sigma_{12} = 2\mu\epsilon_{12} . \quad (17.102)$$

Ze vztahu (17.59) dostaneme pro velikost posunutí vrcholu uvažované krychle o souřadnicích $[0, a, 0]$, že $u = a\epsilon_{12}$. Pro úhel zkosení α je na základě obr. 17.12 možné psát

$$\tan \alpha = \frac{u}{a} = \frac{\mu\epsilon_{12}}{\mu} = \epsilon_{12} . \quad (17.103)$$



Obrázek 17.12: Čistá smyková deformace izotropního kvádrů. Plnou čarou je zachycen stav před deformací, čarou přerušovanou stav po deformaci.

V případě malých deformací jsou úhly zkosení velmi malé, takže můžeme psát, že $\tan \alpha \approx \alpha$, čímž můžeme výsledek (17.103) zapsat (v rámci aproximace malých deformací) jako

$$\alpha = \epsilon_{12} . \quad (17.104)$$

Odtud vidíme, že jak nediagonální složky tenzoru malých deformací určují míru zkosení po deformaci tělesa.

Protože úhel zkosení je velmi malý při malých deformacích, tak můžeme psát pomocí výsledku (17.104), že

$$\sin \alpha \approx \alpha = \frac{u}{a'} \Rightarrow a' = \frac{u}{\alpha} = \frac{a \epsilon_{12}}{\epsilon_{12}} = a . \quad (17.105)$$

Odtud vyplývá, že při malých deformacích se v tomto případě nezmění délka strany krychle, tj. $a = a'$, ale dojde jen ke změně tvaru krychle.

Vztah (17.102) můžeme přepsat do tvaru:

$$\epsilon_{12} = \frac{1}{2\mu} \sigma_{12} . \quad (17.106)$$

Vztah (17.106) představuje elementární Hookův zákon pro prostý smyk, kde Laméův koeficient μ nazýváme také modul torze (modul pružnosti ve smyku), který však v tomto případě zpravidla značíme G , takže se častěji setkáváme s matematickým vyjádřením Hookova zákona pro prostý smyk v následujícím tvaru:

$$\epsilon_{12} = \frac{1}{2G} \sigma_{12} . \quad (17.107)$$

17.5 Pohybové rovnice kontinua

Doposud jsme se zabývali statikou kontinua (spojitého prostředí). Ve staticce nás zajímal pouze výsledný stav, do něhož kontinuum dospělo, a nikoliv proces, který k němu vedl. Změna polohy bodů (částic) kontinua byla udávána jen vektorem posunutí závislejícím jen od původních poloh těchto bodů. Zajímáme-li se o celý časový průběh posunutí bodů kontinua, musíme přejít od úloh statických k úlohám

dynamickým.

Síly, které urychlují element objemu kontinua dV , jehož hmotnost je $dm = \rho dV$, jsou rovny objemovým a povrchovým silám na tento element působících, viz levá strana rovnice (17.21). Dle vztahu (17.20), resp. (17.21), můžeme na základě 2. Newtonova pohybového zákona (7.11) psát:

$$\mathcal{F}_i dV + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} dV = \rho \underbrace{\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}}_{=a_i} dV, \quad i = 1, 2, 3, \quad (17.108)$$

odtud

$$\mathcal{F}_i + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (17.109)$$

kde ρ je hustota uvažovaného kontinua, a_i jsou složky vektoru zrychlení a u_i jsou složky vektoru posunutí.

Parciální diferenciální rovnice (17.109) představuje **základní pohybovou rovnici kontinua**, ze které se vychází při studiu konkrétních dynamických problémů.

Předpokládejme, že kontinuum je homogenní a izotropní. V tomto případě dosadíme za složky tenzoru napětí v rovnici (17.109) ze vztahu (17.78), čímž dostaneme

$$\sum_{j=1}^3 \left[\lambda \frac{\partial}{\partial x_j} (\vartheta_1 \delta_{ij}) + 2\mu \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial x_j} \right] + \mathcal{F}_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (17.110)$$

Pomocí vztahů (17.46) a (17.71) je možné dále upravit rovnici (17.110) jako

$$\sum_{j=1}^3 \left\{ \lambda \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\delta_{ij} \sum_{k=1}^3 \epsilon_{kk} \right) + 2\mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] \right\} + \mathcal{F}_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (17.111)$$

Uvážíme-li, že $\epsilon_{kk} = \partial u_k / \partial x_k$, je možné dále upravit předchozí rovnici do následujícího tvaru

$$(\lambda + \mu) \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} + \mu \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \mathcal{F}_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (17.112)$$

Rovnici (17.112) je možné přepsat do vektorového tvaru

$$(\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathcal{F} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}. \quad (17.113)$$

Rovnice (17.112), resp. (17.113) se nazývá **Navierova-Laméov rovnice**.

Řešením této rovnice dostaneme výchylky jednotlivých bodů jako funkce souřadnic a času. Aby řešení odpovídalo dané úloze, musí být u dynamických úloh zadány okrajové a počáteční podmínky.

Vlnová rovnice pro homogenní izotropní kontinuum

V další části této kapitoly budeme předpokládat, že lze zanedbat objemové síly působící na kontinuum, tedy $\mathcal{F}_i = 0$ pro $i = 1, 2, 3$. Rovnici (17.113) podělíme hustotou uvažovaného izotropního kontinua a zavedeme následující konstanty:

$$c_T = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}, \quad (17.114)$$

$$c_L = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad (17.115)$$

tedy $\mu = \rho c_T^2$, $\lambda = \rho(c_L^2 - 2c_T^2)$.

Dostaneme následující tvar pohybové rovnice:

$$(c_L^2 - c_T^2)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + c_T^2 \nabla^2 \mathbf{u} = \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}. \quad (17.116)$$

Pro další úpravy použijeme tzv. **Helmholtzovu větu**.

Helmholtzova věta

Každou vektorovou funkci (vektor) \mathbf{u} lze rozložit na součet dvou vektorových funkcí (vektorů)

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_T + \mathbf{u}_L, \quad (17.117)$$

pro něž platí

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_T = 0, \quad (17.118)$$

$$\nabla \times \mathbf{u}_L = \mathbf{0}. \quad (17.119)$$

Do rovnice (17.116) dosadíme za vektor posunutí ze vztahu (17.117), kdy využijeme rovnosti (17.118), takže dostaneme:

$$(c_L^2 - c_T^2)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}_L) + c_T^2 \nabla^2(\mathbf{u}_T + \mathbf{u}_L) = \frac{\partial^2 \mathbf{u}_T}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}_L}{\partial t^2}. \quad (17.120)$$

Nyní na celou rovnici (17.120) budeme aplikovat operaci divergence $\nabla \cdot$, čímž dostaneme, s ohledem na rovnost (17.118), následující rovnici:

$$(c_L^2 - c_T^2)\nabla^2(\nabla \cdot \mathbf{u}_L) + c_T^2 \nabla^2(\nabla \cdot \mathbf{u}_L) = \nabla \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{u}_L}{\partial t^2}, \quad (17.121)$$

kterou dále upravíme do následujícího tvaru:

$$\nabla \cdot \left(c_L^2 \nabla^2 \mathbf{u}_L - \frac{\partial^2 \mathbf{u}_L}{\partial t^2} \right) = 0. \quad (17.122)$$

Aby byla splněna rovnice (17.122) v celém uvažovaném prostoru, potom musí platit, že

$$c_L^2 \nabla^2 \mathbf{u}_L - \frac{\partial^2 \mathbf{u}_L}{\partial t^2} = \mathbf{0}. \quad (17.123)$$

Podobně provedeme operaci rotace $\nabla \times$ celé rovnice (17.120), čímž dospějeme, s využitím vztahu (17.119), k následující rovnosti:

$$c_T^2 \nabla^2(\nabla \times \mathbf{u}_T) = \nabla \times \frac{\partial^2 \mathbf{u}_T}{\partial t^2}, \quad (17.124)$$

kterou dále upravíme

$$\nabla \times \left(c_T^2 \nabla^2 \mathbf{u}_T - \frac{\partial^2 \mathbf{u}_T}{\partial t^2} \right) = \mathbf{0}. \quad (17.125)$$

Opět má-li být splněna rovnice (17.125) v celém uvažovaném prostoru, musí platit, že

$$c_T^2 \nabla^2 \mathbf{u}_T - \frac{\partial^2 \mathbf{u}_T}{\partial t^2} = 0 . \quad (17.126)$$

Rovnice (17.123) představuje vlnovou rovnici pro podélné (longitudiální) vlny, které se šíří rychlostí c_L . Rovnice (17.126) představuje vlnovou rovnici pro příčné (transversální) vlny, které se šíří rychlostí c_T . Vlny, resp. vlnění, popisované uvedenými vlnovými rovnicemi představují mechanické elastické vlny.

Pomocí vztahů pro Laméovy koeficienty (17.97) a (17.98) je možné upravit vztahy pro rychlosti šíření (17.114) a (17.115)

$$c_T = \sqrt{\frac{E}{2\rho(1+\nu)}} , \quad (17.127)$$

$$c_L = \sqrt{\frac{E(1-\nu)}{\rho(1+\nu)(1-2\nu)}} . \quad (17.128)$$

17.6 Mechanika tekutin

Tekutiny chápeme jako kontinuum, takže základní vztahy a rovnice odvozené v předchozích kapitolách věnovaných mechanice kontinua platí i pro tekutiny. Název **tekutina** je společné označení pro kapalinu a plyn, které mají společnou vlastnost a tou je **tekutost**, tj. mohou téci. Mechanické chování kapalin a plynů je natolik podobné, že je výhodné jejich obecný popis dělat současně, a pouze zvlášť diskutovat případy, které vedou k odlišným závěrům z důvodu odlišnosti obou druhů látek.

Na rozdíl od pevných látek jsou molekuly tekutin vzájemně vázány velmi volně a jsou schopny se libovolně přemisťovat. Velkou pohyblivost molekul tekutin umožňuje povaha vnitřních sil mezi molekulami, tzv. **kohézní síly**, které nenutí molekuly vracet se zpět. Vnitřní síly působící mezi molekulami jistým způsobem omezují jejich pohyblivost a pak mluvíme o vnitřním tření (viskozitě) v tekutinách.

Současně s pohybem tekutiny jako celku konají molekuly vždy i neuspořádaný tepelný (termický) pohyb. To má za následek, že rychlost každé molekuly se skládá ze dvou komponent, z rychlosti související s teplotou kontinua a z rychlosti uspořádaného pohybu, který určují vnější a vnitřní síly v tekutině. Při popisu pohybu tekutin v mechanice tekutin se omezujeme výhradně na rychlosti uspořádaného pohybu, protože termická složka má vzhledem ke své chaotičnosti v daném místě vždy nulovou střední hodnotu a tedy pohyb tekutiny jako celku neovlivňuje.

Další společnou vlastností tekutin je, že nemají svůj vlastní tvar a přizpůsobují se vždy geometrickému uspořádání pevných těles soustavy, v níž se nacházejí.

Kapaliny mají svůj vlastní objem, který je jen málo závislý na vnějších podmínkách, teplotě a tlaku. Proto kapaliny zaujímají vždy určitou část nádoby, odpovídající jejich objemu a na rozdíl od plynů vytváří volnou hladinu, která je v přítomnosti homogenního tíhového pole vodorovná. V případě, že se kapalina nachází v beztížném stavu, tak zaujímá kulový tvar vlivem působení povrchového napětí, čímž dosáhne daný objem kapaliny stabilního stavu, který souvisí s jeho minimální energií. U kapalin se projevuje, stejně jako u pevných látek, stlačitelnost, která je však o řád větší než u pevných látek. Kapaliny, u nichž musíme brát do úvahy jejich stlačitelnost a vnitřní tření, nazýváme **reálnými kapalinami**. Jsou však situace, při kterých můžeme obě tyto vlastnosti zanedbat a vytvořit tak idealizovaný model kapaliny, který nazýváme **ideální kapalinou**.

Ideální kapalina

Ideální kapalina nemá vnitřní tření a je dokonale nestlačitelná ($\rho = \text{konst.}$).

Plyny jsou tekutiny, které nemají svůj stálý objem. Plyny zaujímají vždy celý objem uzavřené nádoby, v níž se nacházejí a vyznačují se vysokou stlačitelností. Vnitřní tření u plynů je mnohem menší než v kapalinách, ale v některých případech může mít zcela podstatný vliv na jejich proudění. U plynů zavádíme také idealizovaný model, jímž je **ideální plyn**.

Ideální plyn

Ideální plyn nemá vnitřní tření a je dokonale stlačitelný a chování ideálního popíše stavová rovnice ideálního plynu..

Model ideálního plynu se hodí zejména pro řídké plyny, jejichž teplota není nízká. Reálné plyny mají tedy vnitřní tření a omezenou stlačitelnost. K popisu jejich chování je nutné stavovou rovnici modifikovat. I když plyny se vyznačují vysokou stlačitelností, jsou režimy proudění, při kterých jejich stlačitelnost můžeme zanedbat a proudění řešit jako proudění ideální kapaliny. Tato aproximace je možná při malých rychlostech proudění, např. pro vzduch je to přibližně do rychlosti proudění 25 ms^{-1} .

Průnikem zavedených modelů ideální kapalina a plynu můžeme zavést model ideální tekutiny.

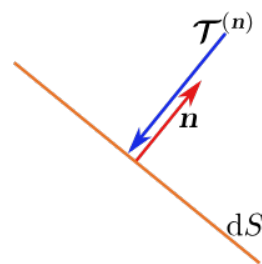
Ideální tekutina

Ideální tekutina nemá vnitřní tření (nemohou vznikat smyková napětí) a tlak v ideální tekutině působí na libovolně orientovanou plochu vždy kolmo.

Na základě výše uvedeného je možné konstatovat, že pro rovnováhu tekutin platí stejná podmínka rovnováhy jako pro obecné kontinuum (17.21). Pro tenzor napětí ideální tekutiny můžeme napsat, že

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (17.129)$$

kde $p \geq 0$ je tzv. tlak tekutiny a záporné znaménko volíme z důvodu, že tlak má opačný směr než vnější normála uvažované (uzavřené) plochy elementu kontinua. Vztah (17.129) nám říká, že napětí je čistý tlak velikosti p , který je stejný ve všech rovinách proložených daným bodem tekutiny. Jelikož jsou u ideálních tekutin tečné složky tenzoru napětí (smyková napětí) nulové ($\sigma_{ij} = 0$ pro $i \neq j$), ideální tekutina neklade odpor změně tvaru. Podmínka $p \geq 0$ nám říká, že v ideální tekutině nelze realizovat tahové napětí.



17.6.1 Statika tekutin

Statika tekutin je ta část mechaniky tekutin, která předpokládá, že vyšetřovaná tekutina se nepohybuje, proto ve statice tekutin nerozlišujeme ideální a reálné tekutiny, tj. všechny zákony statiky tekutin platí v obou druzích tekutin stejně. Vzhledem k tomu, že se tečné složky tenzoru napětí u tekutiny, která je v rovnováze, neuplatní, budeme při zkoumání statiky tekutin předpokládat, že tenzor napětí je dán vztahem (17.129), čímž je možné upravit rovnici vyjadřující podmínku rovnováhy kontinua (17.21) jako

$$\mathcal{F}_i - \sum_{j=1}^3 \frac{\partial(p \delta_{ij})}{\partial x_j} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (17.130)$$

tedy

$$\mathcal{F}_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (17.131)$$

Rovnici (17.131) je možné snadno přepsat do vektorového tvaru:

$$\mathcal{F} - \nabla p = \mathbf{0}. \quad (17.132)$$

Jestliže rovnici (17.132) skalárně vynásobíme výrazem $d\mathbf{r}$, tak po drobné úpravě dostaneme, že

$$\mathcal{F} \cdot d\mathbf{r} = \nabla p \cdot d\mathbf{r} = dp. \quad (17.133)$$

Pravá strana rovnice (17.133) představuje úplný diferenciál tlaku. Aby jím byla i levá strana této rovnice, potom musí platit, že

$$\mathcal{F} = -\nabla \mathcal{U}, \quad (17.134)$$

kde \mathcal{U} je potenciální energie vztažená na jednotku objemu tekutiny (objemová hustota potenciální energie tekutiny). Odtud je vidět, že objemové síly musí být síly potenciálové.

Z pravé strany rovnice (17.133) tedy dostáváme, že

$$dp = \nabla p \cdot d\mathbf{r}, \quad (17.135)$$

odkud vyplývá, že existují tlakové plochy, na kterých nabývá tlak konstantní hodnoty a tyto plochy nazýváme **izobary**, jejichž rovnice, podobně jako pro ekvipotenciální plochy v gravitačním poli (12.19), je:

$$p(\mathbf{r}) = \text{konst.} \quad (17.136)$$

Podobně můžeme napsat, na základě vztahu (17.134), plochy, kde potenciální energie \mathcal{U} nabývá konstantní hodnoty:

$$\mathcal{U}(\mathbf{r}) = \text{konst.}, \quad (17.137)$$

které nazýváme ekvipotenciální plochy objemových sil vztažených na jednotku objemu.

Protože $d\mathcal{U} = -\nabla \mathcal{U} \cdot d\mathbf{r}$, tak ze vztahu (17.133) dostáváme:

$$dp = -d\mathcal{U}. \quad (17.138)$$

Odtud integrací vychází, že

$$p = -\mathcal{U} + C, \quad (17.139)$$

kde C je integrační konstanta. Volíme-li pak jednu stranu této rovnice za konstantní, musí být konstantní pak i strana druhá a vyplývají odtud rovnice (17.136) a (17.137), které jsou rovnicemi ploch (hladin) tlaku a potenciální energie. Rovnice (17.138) má tedy jednoduchou interpretaci, že hladiny tlaku p a potenciální energie \mathcal{U} v tekutině za rovnováhy splývají. Tímto můžeme konstatovat, že za rovnováhy tlak v tekutině vzrůstá ve směru siločár pole objemových sil \mathcal{F} .

Provedeme-li integraci rovnice (17.133) mezi body o polohových vektorech \mathbf{r}_0 a \mathbf{r} , tak dospějeme k následujícímu vztahu:

$$p - p_0 = \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathcal{F} \cdot d\mathbf{r}, \quad (17.140)$$

kde $p_0 = p(\mathbf{r}_0)$ a $p = p(\mathbf{r})$.

Odtud lze konstatovat, že tlak v libovolném bodě tekutiny v rovnováze je roven tlaku p_0 ve výchozím bodě, zvětšenému o práci objemových sil \mathcal{F} po libovolné křivce spojující oba body.

Pascalův zákon

Jestliže předpokládáme, že na tekutinu nepůsobí žádné objemové síly ($\mathcal{F} = \mathbf{0}$ neboli $\mathcal{U}(\mathbf{r}) = \text{konst.}$), potom ze vztahu (17.133) dostáváme, že

$$dp = 0. \quad (17.141)$$

Odtud integrací dospějeme k výsledku:

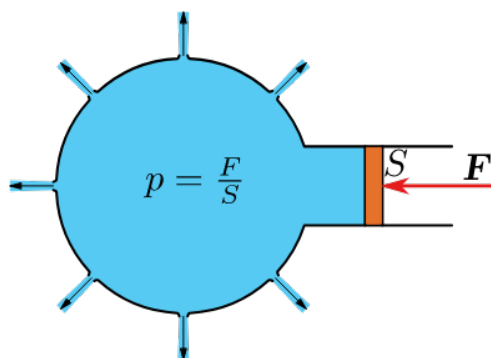
$$p = \text{konst.}, \quad (17.142)$$

který vyjadřuje **Pascalův zákon při absenci objemových sil**, viz obr. 17.13.

Pascalův zákon při absenci objemových sil

Nepůsobí-li v tekutině objemové síly, je za rovnováhy tlak ve všech bodech tekutiny stejný ($p(\mathbf{r}) = \text{konst.}$).

Pozn.: Platnost Pascalova zákona v tomto tvaru často používáme i v případech, že $\mathcal{U}(\mathbf{r}) \approx \text{konst.}$ Základním zařízením, které využívá Pascalův zákon, je



Obrázek 17.13: Demonstrace Pascalova zákona. Voda vytéká všemi otvory kolmo a se stejnou rychlostí.

hydraulické zařízení, které slouží k převodu sil. Mezi hydraulická zařízení patří hydraulické lisys, hydraulické brzdy, hydraulické zvedáky, ovládací zařízení těžké techniky apod. V principu jde o zařízení, které tvoří nádoba s kapalinou (nejčastěji se jedná o olej). Nádoba je opatřena dvěma písty o různých velikostech

ploch, přičemž platí relace, že $S_1 < S_2$, viz obr. 17.14. Předpokládáme-li, že podle Pascalova zákona je tlak v kapalině všude stejný, stejný je tedy i tlak působící na oba písty $p_1 = p_2$, pak musí platit, že

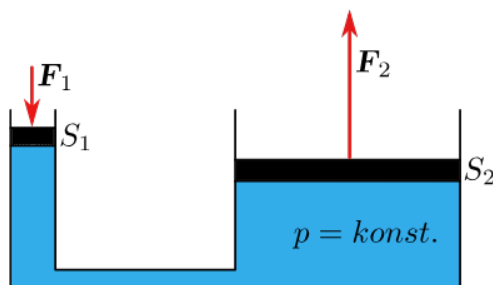
$$\frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2} , \quad (17.143)$$

odtud dostaneme převodní poměr pro síly, tedy

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{S_2}{S_1} . \quad (17.144)$$

Ze vztahu (17.144) vyplývá, že malou silou \mathbf{F}_1 působící na malý píst o ploše S_1 vyvoláme v kapalině tlak p a ten působí velkou silou \mathbf{F}_2 na velký píst mající plochu S_2 .

Předpokládejme nyní přítomnost objemových sil působících na nestlačitelnou



Obrázek 17.14: Situační obrázek k vysvětlení principu hydraulického zařízení (hydraulický lis).

kapalinu ($\rho = konst.$). Integrací rovnice (17.138) dostaneme:

$$\int_{p_0}^p dp = -(\mathcal{U} - \mathcal{U}_0) , \quad (17.145)$$

kde p , p_0 jsou hodnoty tlaku ve dvou různých místech o polohových vektorech \mathbf{r}_0 a \mathbf{r} a $\mathcal{U} = \mathcal{U}(\mathbf{r})$, $\mathcal{U}_0 = \mathcal{U}(\mathbf{r}_0)$ jsou hodnoty objemové hustoty potenciální energie tekutiny ve stejných místech jako v případě tlaku. Dále budeme předpokládat, že se jedná o nestlačitelnou kapalinu. Nechť v uvažovaných místech tekutiny se změni hodnota tlaku tekutiny na hodnoty $p + \delta p$, $p_0 + \delta p_0$, přitom při stejných vnějších (objemových) silách bude platit¹⁰

$$\int_{p_0 + \delta p_0}^{p + \delta p} dp = -(\mathcal{U} - \mathcal{U}_0) . \quad (17.146)$$

Jestliže mezi sebou odečteme rovnice (17.146) a (17.145), tak dostaneme

$$\int_{p_0 + \delta p_0}^{p + \delta p} dp - \int_{p_0}^p dp = 0 . \quad (17.147)$$

Řešením integrálů v rovnici (17.147) dospějeme k následujícímu výsledku

$$\delta p = \delta p_0 , \quad (17.148)$$

¹⁰Avšak plošné síly nejsou neměnné.

který představuje matematické vyjádření Pascalova zákona pro nestlačitelné kapaliny za přítomnosti objemových sil.

Pascalův zákon za přítomnosti objemových sil pro nestlačitelnou kapalinu

Tlak ve všech místech nestlačitelné kapaliny se mění o stejnou hodnotu a tlak se v nestlačitelné kapalině šíří všemi směry stejně.

Síla působící na plochu v tekutině

Uvažujme nějakou plochu S , libovolného tvaru. V místě o polohovém vektoru \mathbf{r} bude působit vektor napětí $\mathcal{T}^{(n)}(\mathbf{r})$ jehož složky spočítáme podle vztahu (17.13), kam dosadíme ze složky tenzoru napětí ze vztahu (17.129):

$$\mathcal{T}_i^{(n)} = \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij} n_j = \sum_{j=1}^3 -p \delta_{ij} n_j = -p \sum_{j=1}^3 \delta_{ij} n_j = -p n_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (17.149)$$

Odtud pro vektor napětí dostáváme:

$$\mathcal{T}^{(n)}(\mathbf{r}) = -p \mathbf{n}, \quad (17.150)$$

kde \mathbf{n} je jednotkový normálový vektor k uvažované ploše v místě o polohovém vektoru \mathbf{r} .

Potom na základě vztahu (17.5) můžeme pro plošnou sílu působící na uvažovanou plochu psát:

$$\mathbf{F}^P(S) = \int_S \mathcal{T}^{(n)}(\mathbf{r}) dS = - \int_S p \mathbf{n} dS. \quad (17.151)$$

Abychom mohli tuto plošnou sílu spočítat, musíme předem znát rozložení tlaku podél uvedené plochy, tj. znát tlakové pole $p(\mathbf{r})$ podél uvažované plochy S .

Síla působící na uzavřenou plochu v tekutině vystavené působení tíhové síly, Archimédův zákon

Předpokládejme uzavřenou plochu S v tekutině, na kterou působí objemová síla reprezentovaná homogenní tíhovou silou, viz obr. 17.15. Objem tekutiny, který tato plocha uzavírá označíme V . Hmotnost tekutiny v objemu V je:

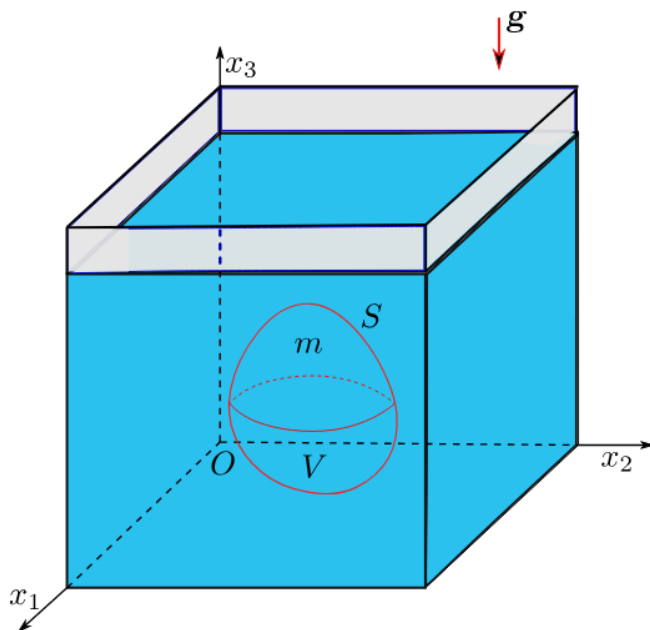
$$m = \iiint_V \rho(\mathbf{r}) dV. \quad (17.152)$$

Objemová síla působící na tekutinu vymezenou uzavřenou plochou S je dána vztahem (17.8):

$$\mathbf{F}^O(V) = \iiint_V \mathcal{F} dV = \iiint_V \mathbf{g} \rho(\mathbf{r}) dV. \quad (17.153)$$

S ohledem na volbu souřadnic, viz obr. 17.15, má vektor tíhového zrychlení následující složky:

$$\mathbf{g} = (0, 0, -g), \quad (17.154)$$



Obrázek 17.15: Plocha S uzavírající tekutinu o objemu V .

takže můžeme vztah pro objemovou sílu vyjádřit jako

$$\mathbf{F}^O(V) = \iiint_V \mathcal{F} dV = \iiint_V \mathbf{g} \rho(\mathbf{r}) dV = \iiint_V (0, 0, -g) \rho(\mathbf{r}) dV . \quad (17.155)$$

Pro plošnou sílu působící na uzavřenou plochu S základě vztahu (17.151) můžeme psát:

$$\mathbf{F}^P(S) = - \oint_S p \mathbf{n} dS . \quad (17.156)$$

Aby byla splněna podmínka rovnováhy tak musí platit:

$$\mathbf{F}^O(V) + \mathbf{F}^P(S) = \mathbf{0} , \quad \text{tedy} \quad \mathbf{F}^P(S) = -\mathbf{F}^O(V) \quad \Rightarrow \\ (F_1^P(S), F_2^P(S), F_3^P(S)) = - (F_1^O(V), F_2^O(V), F_3^O(V)) . \quad (17.157)$$

Dosazením vztahu (17.155) dostáváme:

$$(F_1^P(S), F_2^P(S), F_3^P(S)) = - \iiint_V (0, 0, -g) \rho(\mathbf{r}) dV . \quad (17.158)$$

Znaménka se vyruší.

Porovnáním jednotlivých složek v rovnici (17.158) dostaneme:

$$F_1^P(S) = F_2^P(S) = 0 \quad (17.159)$$

a

$$F_3^P(S) = g \underbrace{\iiint_V \rho(\mathbf{r}) dV}_{=m} = mg . \quad (17.160)$$

Vztah (17.160) nám říká, že přes plochu S působí na kontinuum nacházející se v homogenním tíhovém poli, a který je v rovnováze, síla, která míří vzhůru a je rovna tíze kontinua mg majícího objem V . Kdybychom předpokládali, že plocha S uzavírající objem V může být vyplněna pevným tělesem, pak od tekutiny působí přes hraniční plochu S stejné síly, jako kdyby byl objem vyplněn tekutinou. Tedy na pevné těleso ponořené do tekutiny v homogenním tíhovém poli, působí síla, která je dána vztahem (17.160) a tuto sílu nazýváme **vztlačková síla** (vztlak) a míří svisle vzhůru (v opačném smyslu než síla tíhová) a je rovna tíze tekutiny mající stejný objem V . Tímto jsme dospěli tzv. **Archimédovu zákonu**, který může být formulován následujícím způsobem:

Archimédův zákon

Těleso ponořené celým svým povrchem do tekutiny je nadlehčováno vztlačkovou silou, jejíž velikost je rovna tíze tekutiny stejného objemu, jako je objem ponořeného tělesa.

Tlak v tekutině nacházející se v homogenním tíhovém poli Země

Nejdříve budeme předpokládat nestlačitelnou kapalinu, tj. $\rho = \text{konst.}$ a v této kapalině určíme hodnotu tlaku v závislosti na hloubce pod její volnou hladinou. Přímo ze vztahu (17.155) vyplývá, že

$$\mathcal{F} = (0, 0, -g\rho) . \quad (17.161)$$

Tuto objemovou sílu vztaženou na jednotkový objem dosadíme do vztahu (17.133), takže dostaneme:

$$dp = \mathcal{F} \cdot d\mathbf{r} = (0, 0, -g\rho) \cdot (dx_1, dx_2, dx_3) = -\rho g dx_3 . \quad (17.162)$$

Integrací rovnosti (17.162) dospějeme k vyjádření:

$$p = -\rho g x_3 + C , \quad (17.163)$$

kde C je integrační konstanta, kterou určíme z podmínky, že na volnou hladinu uvažované kapaliny působí barometrický (atmosferický) tlak p_b , přičemž výšku volné hladiny kapaliny označíme x_{30} , viz obr. 17.16. Potom dosazením do vztahu (17.163) dostaneme:

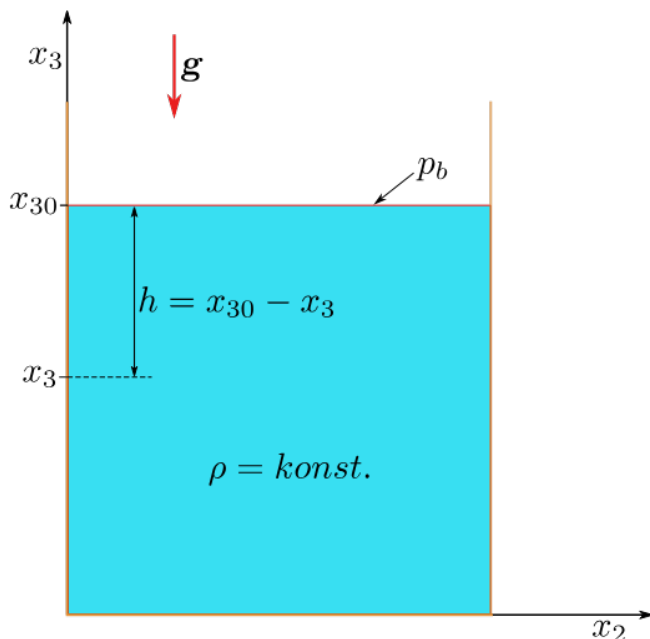
$$C = p_b + \rho g x_{30} . \quad (17.164)$$

Dosadíme-li za integrační konstantu v rovnici (17.163) ze vztahu (17.164), pak pro tlak v nestlačitelné kapalině můžeme psát, že

$$p = p_b + \rho g (x_{30} - x_3) = p_b + \rho g h , \quad (17.165)$$

kde h představuje hloubku pod volnou hladinou v kapalině. Takže můžeme konstatovat, že tlak v hloubce h pod hladinou nestlačitelné kapaliny je dán součtem barometrického tlaku p_b a tzv. **tlaku hydrostatického** p_h , kde

$$p_h = \rho g h . \quad (17.166)$$



Obrázek 17.16: Situační obrázek k odvození vztahu pro hydrostatický tlak.

Nyní budeme předpokládat, že tekutinou je ideální plyn, u kterého jeho hustota je funkcí jenom tlaku (barotropní plyn) a vztah mezi nimi je dán **Boylovým-Mariottovým zákonem**:

$$\rho = kp, \quad (17.167)$$

kde k je konstanta úměrnosti.

Dosazením ze vztahu (17.167) do vztahu pro diferenciál tlaku (17.162) dostaneme rovnici

$$dp = -k g p dx_3, \quad (17.168)$$

kterou snadno vyřešíme metodou separace proměnných, čímž dostaneme

$$\ln p = -kg x_3 + C', \quad (17.169)$$

kde C' je integrační konstanta. Provedeme-li odlogaritmování výrazu (17.169), tak dostaneme, že

$$p = \exp(-kg x_3 + C') = \exp(C') \exp(-kg x_3) = C \exp(-kg x_3), \quad (17.170)$$

kde C je konstanta.

Umístíme-li počátek souřadnicového systému např. na zemský povrch a tlak a hustotu na zemském povrchu ($x_3 = 0$) označíme p_0, ρ_0 , potom dosazením této okrajové podmínky do vztahu (17.170) můžeme určit konstantu $C = p_0$ a konstantu úměrnosti k ze vztahu (17.167) jako $k = \rho_0/p_0$, takže můžeme přepsat vztah (17.170) jako

$$p = p_0 \exp\left(-\frac{\rho_0}{p_0} g x_3\right). \quad (17.171)$$

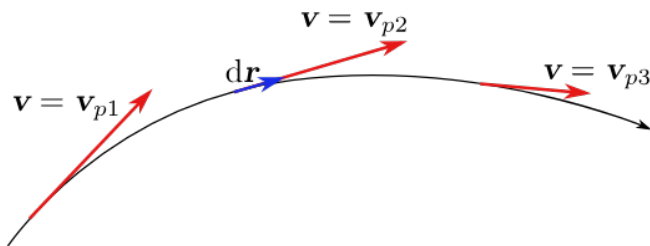
Vztah (17.171) se nazývá **barometrická formule** nebo **barometrický vzorec**.

17.7 Kinematika tekutin

Pohyb tekutiny můžeme pozorovat dvojím způsobem. První způsob se nazývá **Lagrangeova metoda** a spočívá v tom, že si v tekutině zvolíme libovolnou částici kontinua, resp. tekutiny, kterou pak sledujeme po celou dobu, po kterou nás zajímá. Tato metoda se hodí spíše pro studium deformačního pohybu pružných těles, kdy se částice příliš nevzdalují ze svých poloh. Pro zkoumání pohybu tekutin je výhodnější **Eulerova metoda**, při které sledujeme změny veličin, jež charakterizují pohyb tekutiny, v určitém libovolně zvoleném bodě prostoru tekutinou zaplněného. Lagrangeův popis vypadá jednoduše, ale studium proudění tekutin z hlediska jednotlivých částic je problematikou spíše speciální než obecně používanou, a proto se budeme dále zabývat pouze Eulerovou metodou popisu proudění založenou na sledování změn **proudového pole** (rychlostní pole) jako pole vektoru rychlosti, tj. $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$. Rychlost proudového pole je tak funkcí prostoru a času, tedy

$$v_i = v_i(x_1, x_2, x_3, t) \equiv v_i(\mathbf{r}, t), \quad i = 1, 2, 3. \quad (17.172)$$

Abychom získali lepší představu o geometrickém tvaru proudového pole, tak zavádíme tzv. **proudové čáry**, což jsou orientované křivky, které mají v každém bodě za tečnu vektor rychlosti tekutiny, viz obr. 17.17. Podle definice musí být kterýkoliv



Obrázek 17.17: Proudová čára pro daný časový okamžik. V různých místech na proudové čáře je rychlost proudového pole \mathbf{v} rovna rychlosti částice \mathbf{v}_p nacházející se v daný časový okamžik v místě ležícím na proudové čáře.

element proudové čáry

$$d\mathbf{r} = (dx_1, dx_2, dx_3) \quad (17.173)$$

rovnoběžný s vektorem rychlosti $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ v daném časovém okamžiku. Z rovnoběžnosti vektorů \mathbf{v} a $d\mathbf{r}$ plyne úměrnost rovnosti souřadnic:

$$\frac{dx_1}{v_1(x_1, x_2, x_3, t)} = \frac{dx_2}{v_2(x_1, x_2, x_3, t)} = \frac{dx_3}{v_3(x_1, x_2, x_3, t)} = konst. \quad (17.174)$$

V rovnicích (17.174) je čas t konstantním parametrem.

Chceme-li najít skutečný průběh proudové čáry, je třeba soustavu diferenciálních rovnic (17.174) integrovat a to podle souřadnic (čas je parametr). Takže výsledek integrace se vztahuje vždy k určitému časovému okamžiku. Tedy v nestacionárním proudovém poli se poloha i tvar proudových čar mění.

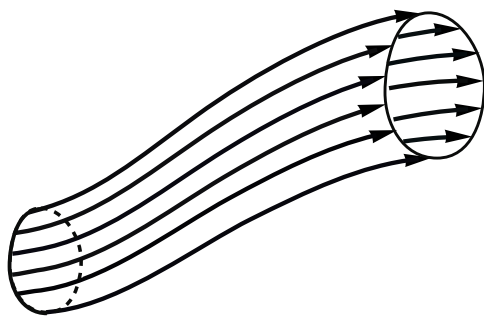
Částice během svého přemísťování prochází v průběhu času body prostoru, jež tvoří nehybnou orientovanou čáru v prostoru, které říkáme **trajektorie**. Rychlost částice je tečná k její trajektorii, jak již víme z kinematiky hmotného bodu. Tedy rozdíl mezi proudnicemi a trajektoriemi spočívá v tom, že proudnice jsou určeny

rychlostmi různých částic tekutiny \mathbf{v}_p ve stejném čase, které se nachází v místě proudové čáry, viz obr. 17.17, zatímco trajektorie je určena rychlostí částice v po sobě jdoucích časových okamžicích. Proudnice jsou vytvořeny různými částicemi tekutiny. Proudnice se navzájem neprotínají, což je dáno skutečností, že v daný okamžik se může nacházet v jednom bodě prostoru pouze jedna částice. Při nestacionárním proudění se kinematický stav tekutiny v libovolném bodě prostoru mění s časem. Proto je obraz proudnic, jak bylo již zmíněno výše, v každém okamžiku jiný. Naproti tomu jsou trajektorie neproměnnými křivkami. Toto má za následek, že při nestacionárním proudění proudnice a trajektorie částic nejsou obecně totožné.

Proudnice jsou totožné s trajektoriemi částic pouze v případě **stacionárního (ustáleného) proudění**, kdy

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \mathbf{0}. \quad (17.175)$$

V určitém okamžiku v proudovém poli zvolíme uzavřenou křivku. Každým jejím bodem vedeme příslušnou proudovou čáru. Množina vybraných proudových čar vytvoří plochu, kterou nazýváme **proudovou trubicí**, viz obr. 17.18. Protože každá



Obrázek 17.18: Proudnice vytváří proudovou trubici.

proudová čára tvořící proudovou trubici s časem mění svůj tvar i polohu, tak i proudová trubice bude s časem měnit svoji polohu a tvar. Jelikož vektor rychlosti je vždy tečný k proudové čáře, nemůže se žádná částice, která se nachází uvnitř proudové trubice, dostat ven a naopak, částice, které jsou vně proudové trubice, nemohou do ní vstoupit. Tato skutečnost má za následek, že proudová trubice obsahuje stále tytéž částice tekutiny.

Eulerův pohled (popis) nevychází z dráhy částic, jak je tomu u Lagrangeova popisu, nýbrž z pole vektoru rychlosti \mathbf{v} a z ní se odvozují obě zbývající veličiny, dráha a zrychlení.

Nechť vektor

$$d\mathbf{r} = (dx_1, dx_2, dx_3) \quad (17.176)$$

je skutečné posunutí částice v důsledku jejího pohybu. Přemístění částice probíhá v čase dt , a proto musí splňovat následující vektorovou rovnici

$$d\mathbf{r} = \mathbf{v} dt, \quad (17.177)$$

kde \mathbf{v} je rychlost v bodě pole, kde se částice právě nachází, tj. $\mathbf{v} = \mathbf{v}_p$. Ve velmi krátkém časovém intervalu se částice pohybuje ve směru vektoru rychlosti. Proto

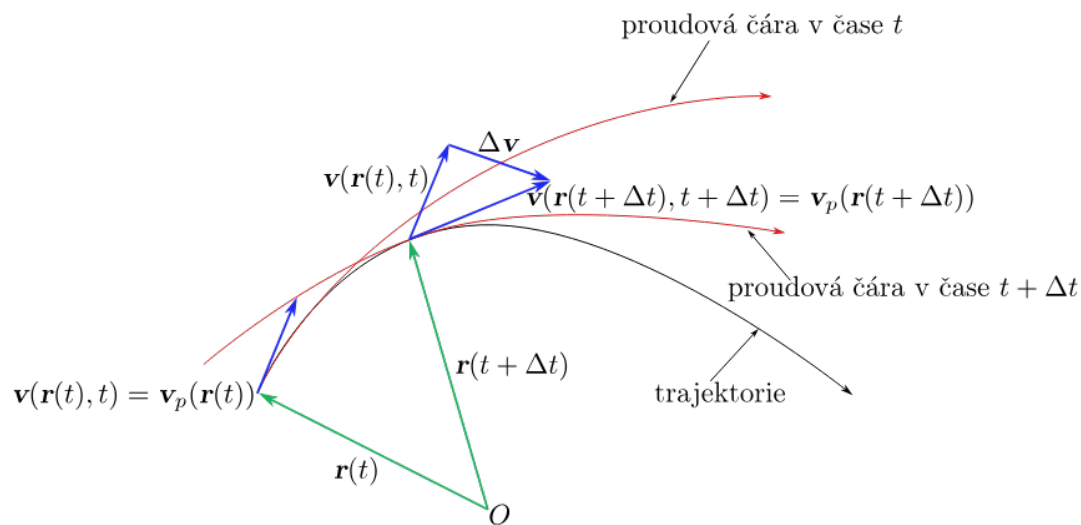
vektor posunutí (17.176) a vektor rychlosti částice musí být rovnoběžné. Rovnoběžné vektory musí mít úměrné souřadnice, čímž docházíme k rovnici analogické s rovnicí (17.174), kde ovšem pravá strana již není konstanta, nýbrž s ohledem na rovnici (17.177) se bude rovnat dt , tj.

$$\frac{dx_1}{v_1(x_1, x_2, x_3, t)} = \frac{dx_2}{v_2(x_1, x_2, x_3, t)} = \frac{dx_3}{v_3(x_1, x_2, x_3, t)} = dt. \quad (17.178)$$

Odtud je trajektorie částice popsána těmito rovnicemi:

$$dx_i = v_i(x_1, x_2, x_3, t)dt, \quad i = 1, 2, 3. \quad (17.179)$$

Je třeba si uvědomit, že když budeme měřit rychlost v nějakém místě proudící tekutiny, tak v různých časových okamžicích naměříme rychlosti různých částic tekutiny. Na obr. 17.19 je zachycen pohyb jedné zvolené částice po své trajektorii ve dvou časových okamžicích t a $t + \Delta t$. Rychlost zvolené částice je označena jako \mathbf{v}_p a ve zvoleném časovém okamžiku musí být rovna rychlosti proudového pole \mathbf{v} . Jak rychlost částice \mathbf{v}_p , tak ovšem i rychlost proudového pole \mathbf{v} musí být tečné v daném místě, jak k aktuální proudové čáře, tak ke trajektorii. Trajektorie částice v nestacionárním proudění je tedy obalovou křivkou proudových čar. Okamžité zrychlení částice je pak dáno podle definice, viz obr. 17.19:



Obrázek 17.19: Rychlost částice ve dvou časových okamžicích t a $t + \Delta t$. V daném časovém okamžiku a místě rychlost částice \mathbf{v}_p je totožná s rychlostí proudového pole \mathbf{v} , která je tímto v daném okamžiku tečná jak ke trajektorii částice, tak k proudové čáře.

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{v}(\mathbf{r}(t + \Delta t), t + \Delta t) - \mathbf{v}(\mathbf{r}(t), t)}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}. \quad (17.180)$$

Rozepsáním této rovnice do složek dostáváme pro jednotlivé složky zrychlení výrazy:

$$a_i = \frac{dv_i(x_1, x_2, x_3, t)}{dt}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (17.181)$$

Podle pravidla derivování složených funkcí dostáváme:

$$a_i = \frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial v_i}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial v_i}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} + \frac{\partial v_i}{\partial x_3} \frac{dx_3}{dt} =$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial v_i}{\partial x_1} v_1 + \frac{\partial v_i}{\partial x_2} v_2 + \frac{\partial v_i}{\partial x_3} v_3 \quad i = 1, 2, 3. \quad (17.182)$$

Vztah pro složky zrychlení částice je možné přepsat do vektorového tvaru následujícím způsobem

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}. \quad (17.183)$$

Ze vztahu (17.183) je vidět, že zrychlení částice je dáno tzv. **totální** (substancio-nální) **derivací** rychlosti částice podle času. Totální derivace rychlosti je dle vztahu (17.183) dána součtem **lokální derivace** rychlosti podle času $\partial \mathbf{v} / \partial t$, která vyjadřuje změnu rychlosti v daném místě pole v důsledku jeho časové proměnlivosti, a tzv. **konvektivní** (proudové) derivace rychlosti $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$, která je spojena s přenosem částice.

Vztah (17.183) neplatí pouze pro změnu rychlosti, ale pro změnu každé veličiny, jejíž přenos je vázán na částice jako svého nositele. Jako příklad můžeme zmínit hustotu, teplotu a pod. Označíme-li takovou veličinu jako $U(\mathbf{r}, t)$, pak její změnu v proudovém poli udává výraz:

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 v_i \frac{\partial U}{\partial x_i} \quad \text{neboli} \quad \frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla U. \quad (17.184)$$

1. Helmholtzova věta

Nechť $v_i(\mathbf{r}, t)$ a $v_i(\mathbf{r}', t)$ jsou složky rychlosti dvou prostorově blízkých částic ve stejném časovém okamžiku. Potom můžeme pomocí prvních členů Taylorova rozvoje psát, že

$$v_i(\mathbf{r}', t) = v_i(\mathbf{r}, t) + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial v_i}{\partial x_j} (x'_j - x_j), \quad i = 1, 2, 3. \quad (17.185)$$

Obecně nesymetrický tenzor $\partial v_i / \partial x_j$ (relativní změna rychlosti částice ve dvou sousedních bodech způsobená nestejnorodostí proudového pole je tenzorem druhého řádu) je možné rozložit na symetrickou a nesymetrickou část, tedy

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \epsilon_{ij} + \phi_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (17.186)$$

kde složky

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{du_i}{dt} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{du_j}{dt} \right) \right] =$$

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] = \frac{d\epsilon_{ij}}{dt} \quad (17.187)$$

patří symetrickému tenzoru, který nazýváme **tenzor rychlosti deformace** a složky

$$\dot{\varphi}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) = \frac{d}{dt} \left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial t} - \frac{\partial u_j}{\partial t} \right) \right] = \frac{d\varphi_{ij}}{dt} \quad (17.188)$$

patří antisymetrickému tenzoru, který nazýváme **tenzor rychlosti rotace**.

S ohledem na vztah (17.186) je možné vyjádřit rovnost (17.185) jako

$$v_i(\mathbf{r}', t) = v_i(\mathbf{r}, t) + \sum_{j=1}^3 (\dot{\epsilon}_{ij} + \dot{\varphi}_{ij})(x'_j - x_j), \quad i = 1, 2, 3. \quad (17.189)$$

Antisymetrický tenzor rychlosti rotace má diagonální složky nulové a můžeme ho v maticovém tvaru vyjádřit následujícím způsobem:

$$\overleftrightarrow{\omega} = \begin{pmatrix} 0 & \dot{\varphi}_{12} & \dot{\varphi}_{13} \\ -\dot{\varphi}_{12} & 0 & \dot{\varphi}_{23} \\ -\dot{\varphi}_{13} & -\dot{\varphi}_{23} & 0 \end{pmatrix}. \quad (17.190)$$

Zavedeme si vektor úhlové rychlosti rotace jako

$$\boldsymbol{\omega} = (\dot{\varphi}_{32}, \dot{\varphi}_{13}, \dot{\varphi}_{21}), \quad (17.191)$$

pomocí kterého můžeme přepsat rovnici (17.189) jako

$$v_i(\mathbf{r}', t) = v_i(\mathbf{r}, t) + \underbrace{\sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} \omega_j (x'_k - x_k)}_{=(\boldsymbol{\omega} \times d\mathbf{r})_i} + \sum_{j=1}^3 \dot{\epsilon}_{ij} (x'_j - x_j), \quad i = 1, 2, 3. \quad (17.192)$$

První člen na pravé straně rovnice (17.192) reprezentuje rychlost translace, druhý člen rychlost rotace a třetí člen rychlost deformace. Výsledek (17.192) je matematickým vyjádřením tzv. **1. Helmholtzovy věty**.

1. Helmholtzova věta

Každý pohyb tekutiny v okolí určitého bodu můžeme rozložit na pohyb translační, pohyb rotační a pohyb deformační.

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}^{(tr)} + \mathbf{v}^{(r)} + \mathbf{v}^{(d)}$$

Proudění vířivé a nevířivé, potenciál rychlosti

Pomocí vektoru (17.191) zavádíme tzv. **vír rychlosti**

$$\boldsymbol{\Omega} = 2\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v}. \quad (17.193)$$

Platí-li v určité oblasti, že $\nabla \times \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, pak mluvíme o **vírovém proudění tekutiny**, resp. **vířivém proudění tekutiny**, je-li v určité oblasti splněno, že $\nabla \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$, potom mluvíme o **nevírovém proudění tekutiny**.

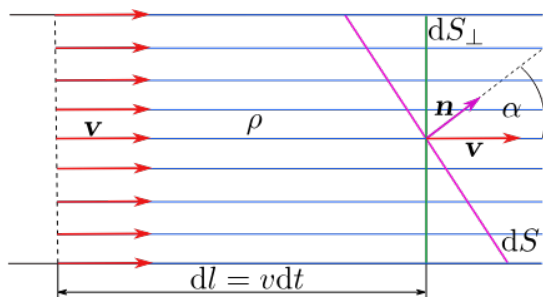
Při nevírovém proudění vždy existuje taková funkce ϕ , kterou nazýváme **rychlostní potenciál**, pro kterou platí, že

$$\mathbf{v} = \nabla \phi . \quad (17.194)$$

Platí-li pro všechny body oblasti, že $\Omega \neq \mathbf{0}$, pak říkáme, že v této oblasti existuje **vírové pole**.

17.7.1 Rovnice kontinuity pro tekutiny

Uvažujme elementární orientovanou plochu $d\mathbf{S} = \mathbf{n}dS$, která se nachází v proudící tekutině. V těsné blízkosti orientované elementární plochy můžeme trajektorie částic tekutiny považovat za rovnoběžné a rychlost těchto částic $\mathbf{v} = v\mathbf{v}^0$ a hustotu tekutiny ρ můžeme v jistém časovém okamžiku t považovat za konstantní, viz obr. 17.20. Poznamenejme, že rychlost částice jsme označili jako rychlost proudového pole, protože jsou ve zvoleném časovém okamžiku totožné. Průmět elementární



Obrázek 17.20: Tok částic tekutiny elementární plochou.

plochy $d\mathbf{S}$ do směru kolmého na trajektorie částic označíme dS_{\perp} a platí pro něj (viz obr. 17.20):

$$dS_{\perp} = dS \cos \alpha = \mathbf{v}^0 \cdot d\mathbf{S} , \quad (17.195)$$

kde \mathbf{v}^0 je jednotkový vektor rychlosti částice v těsné blízkosti orientované elementární plochy.

Z obr. 17.20 vidíme, že si můžeme zavést elementární objem tekutiny jako

$$dV = dl dS_{\perp} = v dS_{\perp} dt . \quad (17.196)$$

Hmotnost tekutiny v tomto elementárním objemu je:

$$dm = \rho dV = \rho v dS_{\perp} dt . \quad (17.197)$$

Za element plochy dS_{\perp} si do tohoto vztahu dosadíme ze vztahu (17.195):

$$dm = \rho \underbrace{v \mathbf{v}^0}_{=\mathbf{v}} \cdot d\mathbf{S} dt = \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} dt . \quad (17.198)$$

Odtud dostaneme vztah pro **hmotnostní průtok** dQ_m určující množství (hmotnost) tekutiny, která proteče orientovanou elementární plochou $d\mathbf{S}$ za jednotku času:

$$dQ_m = \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} , \quad (17.199)$$

kde $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$ nazýváme **proudová hustota tekutiny**, která představuje plošnou hustotu hmotnostního průtoku.

Ze vztahu (17.199) vidíme, že hmotnostní průtok dQ_m může nabývat jak kladné, tak záporné hodnoty v závislosti na vzájemné orientaci vektorů \mathbf{v} a \mathbf{n} .

Na základě vztahu (17.199) je možné vyjádřit hmotnostní průtok otevřenou, resp. uzavřenou plochou S jako

$$Q_m = \iint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}, \quad \text{resp.} \quad Q_m = \oiint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}. \quad (17.200)$$

Zvolíme si **pevnou** kontrolní plochu S , která uzavírá tekutinu o objemu V a hmotnosti:

$$m = \iiint_V \rho dV. \quad (17.201)$$

Vlivem pohybu částic některé částice do kontrolní plochy vstupují, jiné z ní vystupují a na tom, jaký je poměr obou těchto skupin částic závisí i změna hmotnosti tekutiny uvnitř kontrolní plochy. Jestliže uvnitř kontrolní plochy se nenacházejí ani zřídla ani nory, vyjadřuje bilanci hmotnosti následující věta:

Bilance hmotnosti uvnitř pevné uzavřené plochy

Úbytek hmotnosti tekutiny uvnitř kontrolní plochy za jednotku času je roven toku hmotnosti kontrolní plochou.

Matematická formulace této věty je dána následující rovnicí:

$$-\frac{\partial m}{\partial t} = \oiint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}. \quad (17.202)$$

Dosadíme-li do rovnice (17.202) ze vztahu (17.201), tak dostaneme tzv. **rovnici kontinuity pro tekutiny v integrálním tvaru**:

$$-\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho(\mathbf{r}, t) dV = \oiint_{S(V)} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S}, \quad (17.203)$$

kde je zdůrazněno, že jak hustota tekutiny $\rho = \rho(\mathbf{r}, t)$, tak proudová hustota tekutiny $\mathbf{j} = \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t) \mathbf{v}(\mathbf{r})$ jsou jak funkcemi polohy, tak času.

Převědeme-li pravou stranu rovnice kontinuity na objemový integrál pomocí Gaussovy věty (12.56) a zaměníme-li pořadí derivace a integrace u členu na levé straně této rovnice, pak dostaneme:

$$-\iiint_V \frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t} dV = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) dV. \quad (17.204)$$

Přesunem levé strany na pravou stranu této rovnice pod jeden integrál dospějeme k rovnici:

$$\iiint_V \left(\frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \right) dV = 0. \quad (17.205)$$

Vzhledem k tomu, že integraci provádíme přes libovolný objem V , který není ničím specifický, tak aby byla splněna rovnice, tak musí být nulový integrand objemového integrálu, tedy

$$\frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad \text{resp.} \quad \frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho(\mathbf{r}, t) \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)) = 0. \quad (17.206)$$

Tato rovnice představuje rovnici kontinuity pro tekutiny v diferenciálním tvaru. Pro ustálené (stacionární) proudění, kdy hustota tekutiny nezávisí na čase ($\partial \rho / \partial t = 0$), dostaneme rovnici kontinuity v integrálním, resp. diferenciálním tvaru jako

$$\oint_{S(V)} \mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = 0, \quad \text{resp.} \quad \nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}) = 0. \quad (17.207)$$

Na základě integrálního tvaru rovnice kontinuity pro ustálené proudění můžeme říci, že množství tekutiny, které přes uvažovanou uzavřenou plochu vteče a tak současně i vyteče. Dále odtud vyplývá, že proudové pole je solenoidální, tj. proudové čáry (při ustáleném proudění jsou totožné s trajektoriemi částic) představují uzavřené křivky.

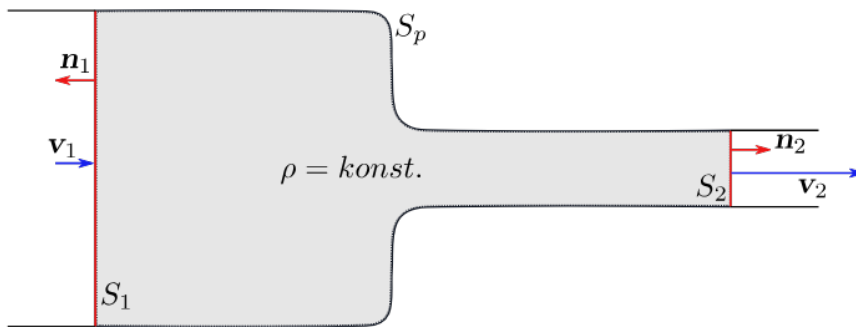
V případě, že uvažujeme nestlačitelnou tekutinu, tj. $\rho = \text{konst.}$, pak se můžeme rovnice kontinuity (17.207) vyjádřit jako

$$\rho \oint_{S(V)} \mathbf{v}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = 0, \quad \text{resp.} \quad \rho \nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}) = 0. \quad (17.208)$$

Podělením rovnic kontinuity jak v integrálním, tak diferenciálním tvaru konstantní hustotou tekutiny dostaneme rovnice kontinuity pro nestlačitelnou tekutinu:

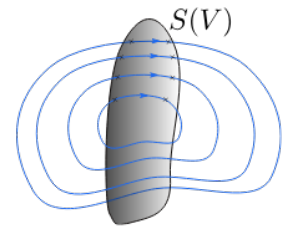
$$\oint_{S(V)} \mathbf{v}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = 0, \quad \text{resp.} \quad \nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}) = 0. \quad (17.209)$$

Uvažujme potrubí proměnného průřezu, kterým protéká ideální kapalina (kon-



Obrázek 17.21: Proudění nestlačitelné kapaliny potrubím proměnného průřezu. Kontrolní plochy jsou naznačeny červeně spolu s vnějšími jednotkovými normálovými vektory.

stantní hustota a bez vnitřního tření), viz obr. 17.21. V místech o průřezích potrubí S_1 a S_2 uvažujme kontrolní plochy o S_1 a S_2 . Částí kontrolní plochy S_1 nechť



protéká ideální kapalina rychlostí \mathbf{v}_1 a a částí kontrolní plochou S_2 nechť protéká rychlostí \mathbf{v}_2 . Protože se jedná o ideální kapalinu, tak je rychlost ve všech bodech příslušných částí kontrolní plochy stejná. Kontrolní plocha $S = S_1 + S_2 + S_p$, kde S_p je plocha potrubí, kterým uvažovaná kapalina neprotéká ($\mathbf{v} = \mathbf{0}$).

Jelikož se jedná o nestlačitelnou kapalinu, tak použijeme rovnici kontinuity v integrálním tvaru (17.209), kde celkovou kontrolní plochu rozdělíme na její dílčí plochy a pro ně spočítáme plošné integrály zvlášť:

$$\oint_{S(V)} \mathbf{v}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_1} \mathbf{v}_1 \cdot d\mathbf{S}_1 + \iint_{S_2} \mathbf{v}_2 \cdot d\mathbf{S}_2 + \underbrace{\iint_{S_p} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}_p}_{=0} = 0. \quad (17.210)$$

S ohledem na orientace elementů částí kontrolní plochy $d\mathbf{S}_1 = \mathbf{n}_1 dS_1$, $d\mathbf{S}_2 = \mathbf{n}_2 dS_2$ a rychlostí \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 (viz obr. 17.21) provedeme skalární součiny v rovnici kontinuity (17.210):

$$-v_1 \underbrace{\iint_{S_1} dS_1}_{=S_1} + v_2 \underbrace{\iint_{S_2} dS_2}_{=S_2} = 0. \quad (17.211)$$

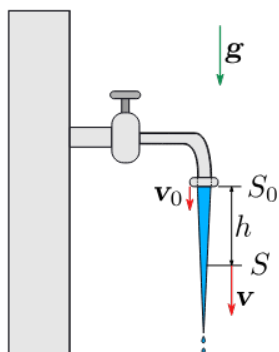
Odtud dostáváme rovnici kontinuity pro námi uvažované potrubí:

$$v_1 S_1 = v_2 S_2. \quad (17.212)$$

Z výsledku vidíme, že má-li být splněna rovnice kontinuity, tak v místech většího průřezu potrubí je rychlost proudění ideální kapaliny menší, než v místech potrubí s menším průřezem.

Příklad 17.7.1

Ze zkušenosti víme, že proud vytékající z vodovodní baterie se postupně zužuje. Spočítejte průřez proudu S ve vzdálenosti h od ústí vodovodní baterie, když víte, že průřez otvoru baterie je S_0 a rychlost vytékajícího proudu z baterie je \mathbf{v}_0 , viz obr. 17.22.



Obrázek 17.22: Voda vytékající z vodovodní baterie.

Řešení:

Protože voda vytéká z vodovodní baterie rychlostí \mathbf{v}_0 , která je orientovaná stejně jako tíhové zrychlení \mathbf{g} , tak pro vzdálenost h musí platit:

$$h = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t . \quad (17.213)$$

Čas t , za který padající voda dosáhne vzdálenosti h spočítáme řešením kvadratické rovnice (17.213) s tím, že musí být splněno, že $t > 0$. Tedy

$$t = \frac{\sqrt{v_0^2 + 2gh} - v_0}{g} . \quad (17.214)$$

Rychlost padající vody v za čas t je:

$$v = gt + v_0 , \quad (17.215)$$

kam dosadíme za čas ze vztahu (17.214), čímž po úpravě dostaneme:

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2gh} . \quad (17.216)$$

Hledaný průřez vodního proudu S ve vzdálenosti h spočítáme pomocí rovnice kontinuity (17.211), která má v našem značení tvar:

$$vS = v_0S_0 . \quad (17.217)$$

Dosadíme do této rovnice kontinuity za rychlost v ze vztahu (17.216) a úpravou dostaneme vztah pro hledaný průřez S :

$$S = \frac{v_0S_0}{v} = \frac{v_0S_0}{\sqrt{v_0^2 + 2gh}} . \quad (17.218)$$

Pozn.: Klesne-li průměr vodního proudu pod 2 mm, počne se proud rozpadat na jednotlivé vodní kapky.

17.8 Dynamika tekutin

17.8.1 Eulerova pohybová rovnice pro ideální tekutiny

V této kapitole si odvodíme pohybovou rovnici ideální tekutiny, tj. tekutiny, pro které mají tenzory napětí, i při pohybu, nulové všechny nediagonální složky.

Je-li výslednice vnějších sil působících na ideální tekutinu nulová, tak se tekutina bude nacházet v rovnováze a platí pro ni rovnice (17.132). Nenachází-li se tekutina v rovnováze, pak výslednice objemových a plošných sil již není rovna nulovému vektoru, a tudíž na základě 2. Newtonova pohybového zákona, s ohledem na rovnost (17.132), můžeme napsat pohybovou rovnici částice tekutiny, jíž odpovídá element hmotnosti $dm = \rho dV$, tedy

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} dV = -\nabla p dV + \mathcal{F} dV. \quad (17.219)$$

Podělíme-li rovnici (17.219) elementem objemu dV a použijeme-li vztahu (17.183) pro vyjádření derivace, potom dostaneme následující pohybovou rovnici

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = -\nabla p + \mathcal{F}. \quad (17.220)$$

Rovnice (17.220) je tzv. **Eulerova pohybová rovnice** platící pro ideální tekutinu. Připomeňme skutečnost, že Eulerova rovnice představuje pohybovou rovnici, jejíž členy jsou vztaženy na jednotku objemu.

17.8.2 Bernoulliho rovnice

Při odvození Bernoulliovy rovnice vyjdeme z Eulerovy pohybové rovnice (17.220). Pro úpravu výrazu $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$ v Eulerově rovnici (17.220) použijeme následující identitu:

Identita pro gradient skalárního součinu dvou vektorových funkcí

$$\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}). \quad (17.221)$$

S ohledem na výraz $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$, který chceme upravit, dosadíme do vektorové identity (17.221), že $\mathbf{A} = \mathbf{B} = \mathbf{v}$, čímž po jednoduché úpravě dostaneme následující vztah:

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \frac{1}{2} \nabla v^2 - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}). \quad (17.222)$$

Při hledání Bernoulliovy rovnice se omezíme na předpoklad, že proudění tekutiny je **nevírové** (potenciálové), tj. $\nabla \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$, viz kapitola 17.7. Díky tomuto omezení se rovnice (17.222) zjednoduší, tedy

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \frac{1}{2} \nabla v^2. \quad (17.223)$$

Bernoulliho rovnice pro barotropní stlačitelnou tekutinu

Dosadíme-li ze vztahu (17.223) do Eulerovy rovnice (17.220), kterou podělíme hustotou tekutiny, tak dostaneme:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla v^2 = -\frac{\nabla p}{\rho} + \frac{\mathcal{F}}{\rho} . \quad (17.224)$$

Předpokládejme, že objemová hustota síly souvisí jen s tíhovou silou Země, pro kterou jsme si v kapitole 9 ukázali, že je silou konzervativní (tedy i potenciálovou) a tudíž bude platit, že

$$\frac{\mathcal{F}}{\rho} = -\nabla \varphi , \quad (17.225)$$

kde φ je odpovídající skalární funkce (potenciál na jednotku hmotnosti), která s odkazem na vztah (17.161) je dána jako

$$\varphi = gx_3 \equiv gz . \quad (17.226)$$

Budeme-li předpokládat, že se jedná o proudění **stacionární** $\partial \mathbf{v} / \partial t = \mathbf{0}$, potom si pomocí vztahu (17.225) můžeme rovnici (17.224) přepsat do následujícího tvaru:

$$\nabla \left(\frac{1}{2} v^2 \right) + \nabla \varphi + \frac{\nabla p}{\rho} = \mathbf{0} . \quad (17.227)$$

Dále skalárně vynásobíme rovnici (17.227) elementem polohového vektoru¹¹ $d\mathbf{r}$:

$$\left[\nabla \left(\frac{1}{2} v^2 \right) \right] \cdot d\mathbf{r} + (\nabla \varphi) \cdot d\mathbf{r} + \frac{(\nabla p) \cdot d\mathbf{r}}{\rho} = 0 . \quad (17.228)$$

S ohledem na definici úplného diferenciálu můžeme rovnici (17.228) přepsat jako

$$d \left(\frac{1}{2} v^2 \right) + d\varphi + \frac{dp}{\rho} = 0 . \quad (17.229)$$

Předpokládejme, že se jedná o **barotropní** tekutinu, pro kterou platí stavová rovnice $\rho = \rho(p)$, pak integrací rovnice (17.229) podél proudové čáry dospějeme k následující rovnici:

$$\frac{1}{2} v^2 + \varphi + P = C = konst. , \quad (17.230)$$

kam dosadíme za potenciálovou funkci φ ze vztahu (17.226) a získáme **Bernoulli-ovu rovnici pro barotropní stlačitelné tekutiny**:

$$\frac{1}{2} v^2 + gz + P = C = konst. , \quad (17.231)$$

Zde

$$P = \int \frac{dp}{\rho(p)} \quad (17.232)$$

¹¹Připomeňme, že $df = (\nabla f) \cdot d\mathbf{r}$.

je tzv. **tlaková funkce** a C je integrační konstanta. Je nutné si uvědomit, že konstanta C je konstantou pro danou proudovou čáru (tedy i trajektorii částice tekutiny, protože uvažujeme stacionární proudění), ale pro různé proudové čáry se může lišit. Pro jinou proudovou čáru má tedy konstanta C přirozeně jinou hodnotu.

Například pro izotermický barotropní plyn platí následující stavová rovnice:

$$\rho(p) = \frac{\rho_0}{p_0} p, \quad (17.233)$$

kde ρ_0 a p_0 jsou hodnoty hustoty a tlaku v referenčním bodě.

Potom tlaková funkce (17.232) pro takovýto plyn se bude rovnat:

$$P = \int \frac{dp}{\rho(p)} = \frac{\rho_0}{p_0} \int \frac{dp}{p} = \frac{\rho_0}{p_0} \ln p. \quad (17.234)$$

Pro dvě různá místa na proudové čáře lze z Bernoulliho rovnice (17.231) psát:

$$\frac{1}{2}v_1^2 + gz_1 + P_1 = \frac{1}{2}v_2^2 + gz_2 + P_2 \quad \text{neboli} \quad \int_{p_2}^{p_1} \frac{dp}{\rho} = \frac{1}{2}(v_2^2 - v_1^2) + g(z_2 - z_1). \quad (17.235)$$

Bernoulliho rovnice pro nestlačitelnou tekutinu

V případě nestlačitelné ideální tekutiny, kdy $\rho = konst.$, je tlaková funkce (17.232) dána následujícím vztahem:

$$P = \int \frac{dp}{\rho(p)} = \frac{1}{\rho} \int dp = \frac{p}{\rho}. \quad (17.236)$$

Dosazením této tlakové funkce do rovnice (17.231) dostaneme:

$$\frac{1}{2}v^2 + gz + \frac{p}{\rho} = C = konst. . \quad (17.237)$$

Vynásobením této rovnice konstantou ρ dostaneme **Bernoulliho rovnici pro nestlačitelné ideální tekutiny**:

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gz + p = konst. , \quad (17.238)$$

resp.

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho gz_1 + p_1 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho gz_2 + p_2. \quad (17.239)$$

Pozn.: Velmi často se setkáváme s případem, kdy při proudění nestlačitelné tekutiny potrubím jsou jak rychlost, tak i tlak stejné ve všech bodech jeho průřezu. Pak konstanta, které se rovná Bernoulliho rovnice, je pro všechny proudové čáry stejná.

Z Bernoulliho rovnice (17.238) je vidět, že všechny rovněž první dva členy musí představovat také tlak. První člen rovnice:

$$\frac{1}{2}\rho v^2 \quad (17.240)$$

nazýváme **dynamický tlak**, druhý člen rovnice:

$$\rho g z \quad (17.241)$$

nazýváme **hydrostatický tlak** a poslední člen p nazýváme **statický tlak**.

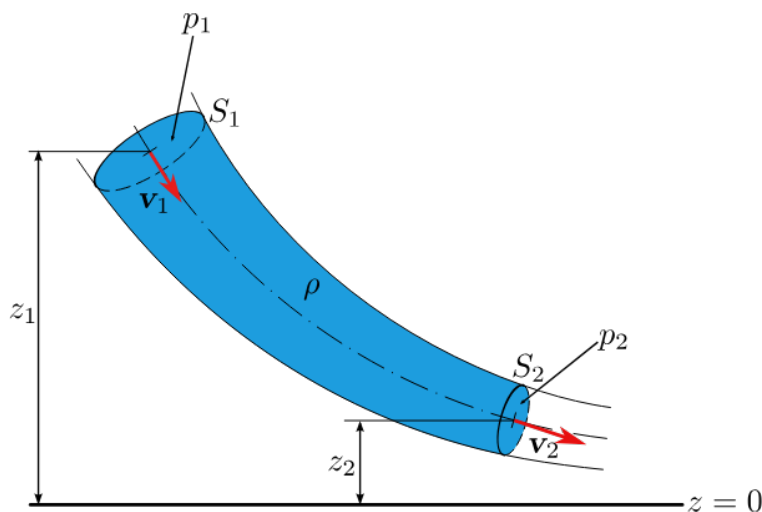
Bernoulliho rovnice pro nestlačitelné tekutiny tedy říká:

Bernoulliho rovnice pro nestlačitelné tekutiny

Při proudění nestlačitelné ideální tekutiny je součet dynamického, hydrostatického a statického tlaku v různých místech potrubí stejný.

Z Bernoulliho rovnice (17.238) vyplývá, že tlak klesá v místech, kde roste rychlost kapaliny, neboli jinými slovy, v užší části trubice, kde kapalina proudí rychleji, má kapalina menší tlak. Fyzikální interpretace tohoto závěru spočívá v tom, že tekutina musí zvýšit rychlost v místě zúžení, aby tak vyhověla rovnici kontinuity, zatímco jí poklesne tlak, aby se zachovala mechanická energie kapaliny. Tedy získaná kinetická energie je vyvážená poklesem tlaku. Tento jev se nazývá **Venturiho jev**.

K Bernoulliho rovnici (17.239) pro nestlačitelné tekutiny může sloužit obr. 17.23.

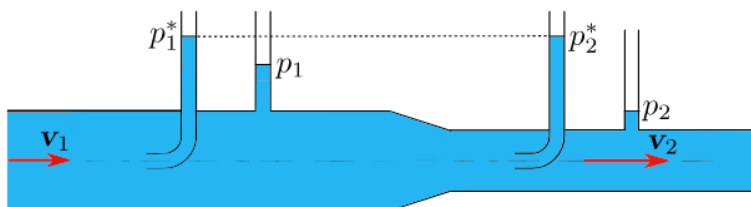


Obrázek 17.23: Proudová trubice pro vysvětlení Bernoulliho rovnice (17.239) pro nestlačitelné tekutiny.

K interpretaci Bernoulliho rovnice může sloužit další obr. 17.24, kde je zachycen případ proudění ideální kapaliny vodorovnou trubicí. Na obrázku je znázorněno, že

se celkový tlak v potrubí nemění, byť se mění tlak dynamický i statický ($v_1 < v_2$). Pro celkový tlak p^* můžeme psát, že

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 + p_1 = p_1^* = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + p_2 = p_2^* .$$



Obrázek 17.24: Ilustrace k Bernoulliho trubici demonstrující skutečnost, že se celkový tlak v potrubí p^* nemění ($v_1 < v_2$).

U skutečných kapalin dochází při proudění v důsledku vnitřního tření k úbytku celkové mechanické energie kapaliny. Projevuje se to tím, že v Bernoulliho rovnici (17.238) již není na pravé straně konstanta. V rovnici (17.238) se tato skutečnost řeší způsobem, že na levou stranu rovnice pro skutečné kapaliny se připojí tzv. **ztrátová výška**, jejímž výpočtem se v rámci našeho výkladu nebudeme zabývat.

Proudění stlačitelného plynu, např. vzduchu, je možné často popisovat jako proudění nestlačitelné tekutiny, pokud tato proudění jsou relativně pomalá.

Uvažujme stlačitelnou tekutinu, která proudí z místa o tlaku p_0 do místa o nižším tlaku p , přičemž uvažujeme, že nedochází ke změně souřadnice z (pro jednoduchost). Zaujímá nás, jak se přitom změní hustota této tekutiny.

Rozdíl tlakových funkcí je dán následujícím integrálem:

$$P_0 - P = \int_p^{p_0} \frac{dp}{\rho} . \quad (17.242)$$

Zavedeme si rychlost zvuku v tekutině jako:

$$c = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} , \quad (17.243)$$

s jejíž pomocí lze přepsat vztah (17.242) jako

$$P_0 - P = \int_p^{p_0} c^2 \frac{d\rho}{\rho} . \quad (17.244)$$

Pokud budeme předpokládat barotropní plyn, pro který platí stavová rovnice (17.233), pak si můžeme spočítat rychlost zvuku podle vztahu (17.243):

$$c^2 = \frac{dp}{d\rho} \approx \frac{p_0}{\rho_0} \frac{d\rho}{d\rho} = \frac{p_0}{\rho_0} = konst. . \quad (17.245)$$

Že např. na vzduch pohlížíme jako na barotropní plyn je jisté zjednodušení.

Tedy, pokud budeme uvažovat jen malé změny tlaku, tak rychlost zvuku bude téměř konstantní, takže můžeme psát:

$$P_0 - P \approx c^2 \int_{\rho}^{\rho_0} \frac{d\rho}{\rho} = c^2 \ln \frac{\rho_0}{\rho} . \quad (17.246)$$

Potom na základě rovnice (17.235) můžeme psát, že

$$c^2 \ln \frac{\rho_0}{\rho} = \frac{1}{2}(v^2 - v_0^2) , \quad (17.247)$$

kde v_0 a v jsou rychlosti proudícího stlačitelného plynu v místech o tlaku p_0 a p . Odtud

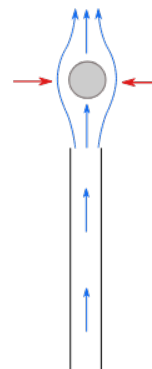
$$\ln \frac{\rho_0}{\rho} = \frac{v^2 - v_0^2}{2c^2} . \quad (17.248)$$

Např. pro vzduch (i když použijeme zjednodušeného vztahu (17.245)) nám rychlost šíření zvuku vychází $c \approx 300 \text{ ms}^{-1}$. Bude-li platit, že $v_0 = 0$, pak i pro rychlosti proudění $v = 50 \text{ ms}^{-1}$ vyjde pravá strana rovnice (17.248) blízka nule (0,014), což znamená, že $\rho_0 \approx \rho \approx \text{konst.}$. Tedy pro rychlosti proudění stlačitelné tekutiny, které jsou dostatečně menší, než je odpovídající rychlost šíření zvuku, je možné pohlížet na tyto tekutiny jako na nestlačitelné a použít Bernoulliho rovnici (17.238).

Na základě Venturiho jevu, jehož interpretace vychází přímo z Bernoulliho rovnice (17.238), již víme, že tlak klesá v místech, kde roste rychlost proudění tekutiny. Není-li tato rychlost příliš vysoká, pak lze na stlačitelnou tekutinu, tedy i na plyn, pohlížet jako na nestlačitelnou tekutinu. Venturiho jev např. vysvětluje, proč průvan přibouchne dveře. Příčinou je pokles tlaku při proudění vzduchu kolem nedovřených dveří.

Stejně povahy je i jev, který budeme pozorovat při foukání mezi dva svislé listy papíru. Navzdory selskému rozumu se nebudou oba listy odpuzovat, ale budou se naopak přitahovat. Venturiho jev lze také např. demonstrovat pomocí pingpongového míčku, který se nachází ve vertikálním proudu vzduchu vycházejícího s úzké trubičky. Míček je nadnášen proudem vzduchu a zároveň je vtahován do středu jeho proudu, kde je menší tlak.

$\ln 1 = 0$



Část II

Úvod do speciální teorie relativity

Kapitola 18

Relativistická kinematika

18.1 Postuláty speciální teorie relativity a Lorentzova transformace

Na konci 19. století byla mechanika (z dnešního pohledu označována jako klasická mechanika) považována za téměř hotovou teorii. Svého vrcholu dosáhla v analytické mechanice, která umožnila opustit vektorový přístup a nahradit ho Lagrangeovým či Hamiltonovým formalismem. Mechanika vycházela z představy absolutního prostoru a času a byla vybudována na Newtonových pohybových zákonech.

Teorie elektromagnetického pole, vycházející ze čtyř Maxwellových rovnic, byla rovněž víceméně hotova. Z Maxwellových rovnic vyplývá, že světlo je elektromagnetické vlnění. Jelikož do té doby byly známy jen různé druhy vlnění v nějakém prostředí, bylo přirozené předpokládat, že i světlo je vlněním nějakého prostředí. Toto hypotetické prostředí dostalo i jméno **éter**. Vzhledem k tomu, že z Galileiho transformace plyne (viz kap. 7.2), že se rychlosti při přechodu mezi inerciálními soustavami sčítají (skládání rychlostí), bylo nutné ze všech možných kandidátů na vztažnou soustavu vyloučit ty vztažné soustavy, ve kterých by rychlost světla byla jiná než ta, která vychází z elektromagnetické teorie. Protože světlo k nám přichází i od Slunce a hvězd, musel éter vyplňovat i meziplanetární a mezihvězdný prostor. Význačnou soustavou by pak byla ta, která by byla vůči éteru v klidu, tedy soustava éteru. V soustavě éteru by platila rychlost světla vycházející z elektromagnetické teorie. V soustavě éteru se světlo ve vakuu šíří všemi směry stejnou rychlostí, podobně jako se v klidném (neproudícím) vzduchu šíří všemi směry stejnou rychlostí zvuk. A. A. Michelson navrhl experiment (Michelsonův interferometr), který měl rychlost Země vůči éteru změřit. Po uskutečnění navrženého experimentu, ani všechny další pokusy tohoto typu prováděné později, nedaly pozitivní výsledek, tj. pohyb Země vůči éteru se nepodařilo naměřit. Odtud vyplývalo, že žádný absolutní pohyb vzhledem k éteru **neexistuje** a že rychlost světla ve vakuu je **ve všech inerciálních soustavách stejná**. Tato rychlost nezávisí na druhu zdroje ani na rychlosti jeho pohybu. Výsledkem experimentů tedy bylo, že nelze určit absolutní pohyb a že všechny vztažné inerciální soustavy jsou naprosto rovnocenné.

„Vadou na kráse“ elektromagnetické teorie byla skutečnost, že Maxwellovy rovnice, které slouží k popisu elektromagnetického pole, nejsou invariantní vůči Ga-

lileiho transformaci, na rozdíl od Newtonových pohybových zákonů mechaniky. Avšak byla nalezena tzv. **Lorentzova transformace**, která uvažuje neměnnost rychlosti šíření světla ve vakuu vycházející z provedených experimentů, vůči které jsou Maxwellovy rovnice invariantní, avšak Newtonovy pohybové zákony pro změnu vůči této transformaci invariantní nebyly. Proto snahou bylo přizpůsobit éterovou teorii tak, aby bylo možné sjednotit mechaniku s teorií elektromagnetického pole. Albert Einstein zavrhl éterovou teorii (existenci éteru), přijal platnost elektromagnetické teorie a zpřesnil mechaniku tak, aby vyhovovala Lorentzově transformaci a tímto se mu podařilo sjednotit elektromagnetickou teorii s mechanikou. Zpřesnění teorie mechaniky je předmětem tzv. **speciální teorie relativity (STR)**, která je vybudována na základě dvou postulátů formulovaných A. Einsteinem.

Postuláty speciální teorie relativity

1. Všechny fyzikální zákony mají ve všech inerciálních vztažných soustavách stejný tvar.
2. Rychlost světla ve vakuu je ve všech inerciálních vztažných soustavách stejná.

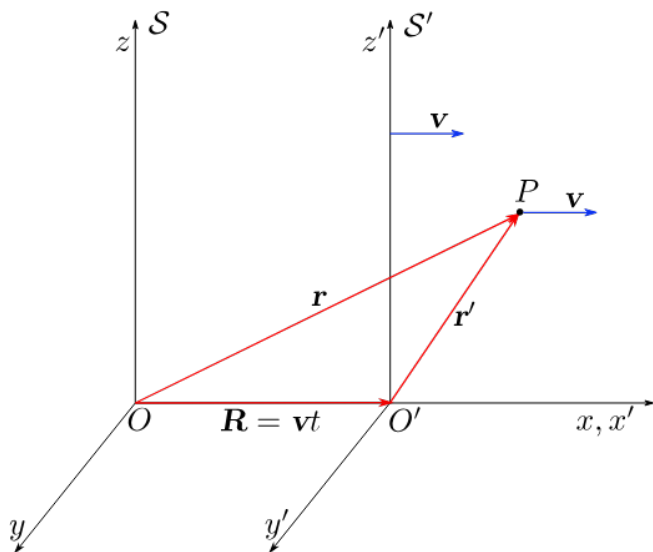
První postulát relativity představuje zobecnění Galileiho principu relativity, který se omezuje jen na mechaniku. Jelikož nic jako čistě mechanický děj neexistuje, představuje Einsteinova formulace principu relativity zohlednění skutečnosti, že není možné oddělit žádný fyzikální děj od jiných fyzikálních dějů.

Protože neměnnost rychlosti světla a Galileiho transformace jsou spolu ve sporu, je nutné tuto transformaci nahradit jinou, která by tento rozpor odstranila, neboli je potřeba nalézt takovou transformaci, aby při převodu souřadnic vycházela rychlost c ve všech soustavách stejná.

18.1.1 Odvození speciální Lorentzovy transformace

Uvažujme dvě inerciální soustavy S a S' , které se vůči sobě pohybují. Předpokládejme jistou událost popsanou ve dvou inerciálních vztažných soustavách \mathcal{S} a \mathcal{S}' . Událostí budeme rozumět určení prostorového a časového údaje, tj. dvojice $[\mathbf{r}, t]$, tj. kde a kdy daný jev nastal, bez ohledu na to, co se vlastně stalo. K plné informaci je samozřejmě nutné určit vztažnou soustavu, v níž polohu a čas určujeme. Prozatím se omezíme na pohyb v jediném směru, přičemž v tomto směru budeme orientovat osy x , x' obou soustav, viz obr. 18.1 (osy x sice x' splývají $x \equiv x'$, avšak to neznamená, že souřadnice x a x' jsou totožné). Rychlost soustavy \mathcal{S}' vůči soustavě \mathcal{S} (unášivá rychlost) budeme značit v . Prostorochasové souřadnice události označíme $[\mathbf{r}, t]$ v soustavě \mathcal{S} , resp. $[\mathbf{r}', t']$ v soustavě \mathcal{S}' . Na základě vzájemné orientace obou soustav je patrné, že $y = y'$ a $z = z'$.

Pro uvažované inerciální soustavy \mathcal{S} a \mathcal{S}' , z pohledu klasické mechaniky, platí



Obrázek 18.1: Pohyb inerciální čárkované vztažné soustavy \mathcal{S}' pohybující se vůči inerciální nečárkované vztažné soustavě \mathcal{S} rychlostí $\mathbf{v} = \text{konst.}$. Bod P je vůči inerciální soustavě \mathcal{S}' v klidu.

následující transformační vztahy (Galileiho transformace):

$$x' = x - vt, \quad (18.1)$$

$$y' = y, \quad (18.2)$$

$$z' = z, \quad (18.3)$$

$$t' = t. \quad (18.4)$$

Vzhledem k tomu, že uvažujeme speciální případ vzájemného pohybu inerciálních soustav \mathcal{S} a \mathcal{S}' , tak odpovídající Lorentzovu transformaci opatřujeme přívlastkem „speciální“.

Aby nepřítomnost výsledné síly (nulové zrychlení) v jedné inerciální vztažné soustavě, znamenala i nepřítomnost výsledné síly v jakékoliv jiné inerciální vztažné soustavě, je nutné se omezit na **lineární** transformace mezi prostorovými souřadnicemi a časem. Tímto se zajistí, že rovnoměrný přímočarý pohyb v jedné inerciální vztažné soustavě, zůstane rovnoměrným přímočarým pohybem i v inerciální vztažné soustavě druhé.

Kromě předpokládané lineárnosti transformačních vztahů je nutné při jejich odvození respektovat Postuláty speciální teorie relativity.

Pro uvažované inerciální souřadnicové soustavy \mathcal{S} a \mathcal{S}' , které v čase $t = 0$ splývají, viz obr. 18.1, uvažujme následující obecné lineární transformační vztahy mezi ($y = y'$ a $z = z'$):

$$x' = \gamma x + Bt, \quad (18.5)$$

$$t' = Cx + Dt, \quad (18.6)$$

kde γ , B , C a D jsou hledané konstanty. Vidíme, že transformační vztah (18.6) odráží skutečnost, že na čas se nepohlíží jako na absolutní, jak je tomu v klasické mechanice.

Pro souřadnici x' počátku O' v soustavě \mathcal{S}' platí, že $x' = 0$ a v soustavě \mathcal{S} je pro

Označení konstanty γ je obvyklé ve STR.

$t \neq 0$ x -ová souřadnice tohoto počátku dána rovností $x = vt$. Dosazením za $x' = 0$ a $x = vt$ do transformačního vztahu (18.5) dostaneme:

$$0 = \gamma vt + Bt \quad \Rightarrow \quad B = -\gamma v . \quad (18.7)$$

Za konstantu $B = -\gamma v$ dosadíme do transformačního vztahu (18.5), čímž po vytknutí konstanty γ dostaneme:

$$x' = \gamma(x - vt) . \quad (18.8)$$

Protože transformace souřadnic představuje rovněž fyzikální zákon, tak na základě 1. postulátu STR musí mít opačná (inverzní) transformace stejný tvar, pouze je nutné si uvědomit, že z pohledu soustavy \mathcal{S}' se soustava \mathcal{S} vůči ní pohybuje stejně velkou rychlostí, ale v opačném směru (změní se znaménko), tj.

$$x = \gamma(x' + vt') . \quad (18.9)$$

Nyní předpokládejme, že v okamžiku kdy soustavy \mathcal{S} a \mathcal{S}' splývají ($O \equiv O'$), vyšleme v kladném směru os x a x' světelný signál, který se šíří rychlostí c . Potom na základě 2. postulátu STR musí platit, že rychlost světla bude v obou soustavách stejná, takže musí platit:

$$x = ct \quad (18.10)$$

a

$$x' = ct' . \quad (18.11)$$

Ze vztahů (18.10) a (18.11) dosadíme do vztahů (18.8) a (18.9), takže dostáváme:

$$ct' = \gamma(ct - vt) = \gamma t(c - v) , \quad (18.12)$$

$$ct = \gamma(ct' + vt') = \gamma t'(c + v) . \quad (18.13)$$

Vynásobíme vztahy (18.12) a (18.13) mezi sebou:

$$c^2 t t' = \gamma^2 t t' (c - v)(c + v) \quad \Rightarrow \quad c^2 = \gamma^2 (c^2 - v^2) . \quad (18.14)$$

Odtud

$$\gamma^2 = \frac{c^2}{c^2 - v^2} = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad \Rightarrow \quad \gamma = \pm \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} . \quad (18.15)$$

Na základě tohoto výsledku pro $v = 0$ platí, že $\gamma = \pm 1$. Jestliže v okamžiku $t = t' = 0$ soustavy \mathcal{S} a \mathcal{S}' splývají, tak musí pro $v = 0$ platit, že $x = x'$ i pro časy následující. Rovnost $x = x'$ pro $v = 0$ musíme dostat i z transformačního vztahu (18.9), kam dosadíme za $\gamma = \pm 1$, tj. $x = \pm x'$. Odtud je vidět, že konstanta γ musí mít kladné znaménko, abychom dostali, že $x = x'$.

Takže ze vztahu (18.15) můžeme psát:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (18.16)$$

a tuto konstantu nazýváme **Lorentzův faktor**. Má-li být Lorentzův faktor reálný a konečný, pak musí platit relace: $v < c$, takže $\gamma \geq 1$.

Dále dosadíme do vztahu (18.9) za souřadnici x' ze vztahu (18.8):

$$x = \gamma [\gamma(x - vt) + vt'] = \gamma^2(x - vt) + \gamma vt' . \quad (18.17)$$

Odtud si vyjádříme čas t' , tedy

$$t' = \frac{x - \gamma^2(x - vt)}{\gamma v} = \frac{(1 - \gamma^2)x + \gamma^2 vt}{\gamma v} = \frac{1 - \gamma^2}{\gamma v} x + \gamma t. \quad (18.18)$$

Pro další úpravu použijeme vztah pro Lorentzův faktor (18.16):

$$t' = \frac{1 - \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{\frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}} x + \gamma t = \frac{1 - \frac{v^2}{c^2} - 1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{v} x + \gamma t =$$

$$\frac{-\frac{v^2}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{v} x + \gamma t = \frac{-\frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \gamma t = -\gamma \frac{vx}{c^2} + \gamma t. \quad (18.19)$$

Odtud po vytknutí Lorentzova faktoru dostáváme:

$$t' = \gamma \left(t - \frac{vx}{c^2} \right). \quad (18.20)$$

Porovnáním s rovnicí (18.6) vidíme, že $C = -v/c^2$ a $D = \gamma$.

Vztahy (18.8) a (18.20) představují hledané transformační vztahy, ve kterých vystupuje Lorentzův faktor (18.16).

Na základě 1. postulátu STR musí mít inverzní transformační vztah pro čas t stejný tvar jako vztah (18.20) s tím rozdílem, že soustava \mathcal{S} se vůči soustavě \mathcal{S}' pohybuje v opačném směru (měníme znaménko u rychlosti pohybu soustavy), tj.

$$t = \gamma \left(t' + \frac{vx'}{c^2} \right). \quad (18.21)$$

Speciální Lorentzova transformace

$$x' = \gamma(x - vt), \quad (18.22)$$

$$y' = y, \quad (18.23)$$

$$z' = z, \quad (18.24)$$

$$t' = \gamma(t - vx/c^2). \quad (18.25)$$

Inverzní speciální Lorentzova transformace

$$x = \gamma(x' + vt'), \quad (18.26)$$

$$y = y', \quad (18.27)$$

$$z = z', \quad (18.28)$$

$$t = \gamma(t' + vx'/c^2). \quad (18.29)$$

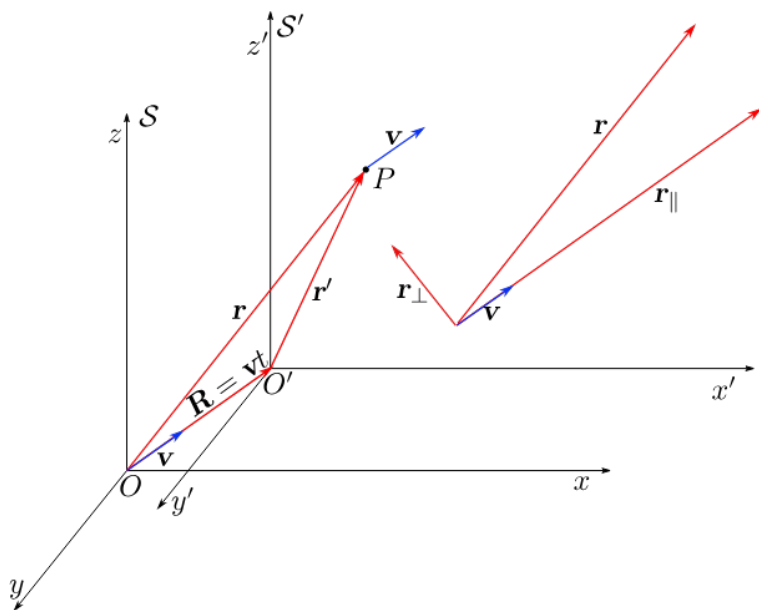
18.1.2 Odvození obecné Lorentzovy transformace

Obecná Lorentzova transformace postihuje obecný přímočarý rovnoměrný vzájemný pohyb dvou inerciálních vtažných soustav \mathcal{S} a \mathcal{S}' , viz obr. 18.2. Chceme-li

odvodit vztahy pro obecnou Lorentzovu transformaci, je k tomuto účelu vhodné rozložit polohový vektor \mathbf{r} na podélnou a příčnou složku k vektoru unášivé rychlosti \mathbf{v} , viz obr. 18.2. Pomocí skalárního součinu můžeme nalézt podélnou složku polohového vektoru ve směru vektoru \mathbf{v} :

$$\mathbf{r}_{\parallel} = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}}{v^2} \mathbf{v}, \quad (18.30)$$

s jejíž pomocí určíme složku příčnou:



Obrázek 18.2: Pohyb inerciální čárkované vztažné soustavy \mathcal{S}' pohybující se vůči inerciální nečárkované vztažné soustavě \mathcal{S} rychlostí $\mathbf{v} = \text{konst.}$. Bod P je vůči inerciální soustavě \mathcal{S}' v klidu.

$$\mathbf{r}_{\perp} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_{\parallel}. \quad (18.31)$$

Z transformačních vztahů pro speciální Lorentzovu transformaci vyplývá, že příčná složka polohového vektoru se při transformaci nemění, tj.

$$\mathbf{r}'_{\perp} = \mathbf{r}_{\perp}, \quad (18.32)$$

kdežto podélná složka se bude měnit analogickým transformačním vztahem ke vztahu (18.22), tedy

$$\mathbf{r}'_{\parallel} = \gamma(\mathbf{r}_{\parallel} - \mathbf{v}t). \quad (18.33)$$

Složením vztahů (18.31) a (18.32) s přihlédnutím ku vztahu (18.33) dostaneme vztah:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r}'_{\perp} + \mathbf{r}'_{\parallel} = \mathbf{r}_{\perp} + \mathbf{r}'_{\parallel} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_{\parallel} + \mathbf{r}'_{\parallel} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_{\parallel} + \gamma(\mathbf{r}_{\parallel} - \mathbf{v}t). \quad (18.34)$$

Dosazením vztahu (18.30) do vztahu (18.34) po úpravě dostaneme, že

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{v} \left[\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}}{v^2} (\gamma - 1) - \gamma t \right]. \quad (18.35)$$

V případě obecného směru unášivé rychlosti \mathbf{v} je možné na základě analogie se vztahem pro transformaci času pro speciální Lorentzovu transformaci (18.25) psát, že

$$t' = \gamma \left(t - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}}{c^2} \right) . \quad (18.36)$$

Vztahy (18.35) a (18.36) představují transformační vztahy pro **obecnou Lorentzovu transformaci**.

Podobným postupem je možné získat i transformační vztahy pro **inverzní obecnou Lorentzovu transformaci**, které formálně získáme záměnou čárkovaných veličin za nečárkované a naopak a náhradou \mathbf{v} za $-\mathbf{v}$ ve vztazích (18.35) a (18.36), tedy

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{v} \left[\frac{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{v}}{v^2} (\gamma - 1) + \gamma t' \right] , \quad (18.37)$$

$$t = \gamma \left(t' + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}'}{c^2} \right) . \quad (18.38)$$

Obecná Lorentzova transformace

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{v} \left[\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}}{v^2} (\gamma - 1) - \gamma t \right] . \quad (18.39)$$

$$t' = \gamma \left(t - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}}{c^2} \right) . \quad (18.40)$$

Inverzní obecná Lorentzova transformace

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{v} \left[\frac{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{v}}{v^2} (\gamma - 1) + \gamma t' \right] , \quad (18.41)$$

$$t = \gamma \left(t' + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}'}{c^2} \right) . \quad (18.42)$$

Zvolíme-li vektor rychlosti $\mathbf{v} = (v, 0, 0)$, pak z transformačních vztahů pro obecnou Lorentzovu transformaci dostaneme transformační vztahy, ke kterým jsme dospěli pro speciální Lorentzovu transformaci.

18.2 Dilatace času

Z Lorentzovy transformace vyplývá relativistický jev zvaný **dilatace (prodloužení) času**. Odvodíme si vztah, který kvantitativně popisuje tento jev.

Z pohledu čárkované souřadnicové soustavy \mathcal{S}' sledujme dvě po sobě následující události, které nastávají ve stejném bodě P (tento bod je vůči soustavě \mathcal{S}' v klidu) o polohovém vektoru $\mathbf{r}' = (x', y', z') = \mathbf{konst.}$ (viz obr. 18.1) v časech t'_1 a t'_2 . Protože obě události nastávají ve stejném místě (bodě P), pak se jedná o souměstné události. V soustavě \mathcal{S}' naměří pozorovatel čas mezi uvažovanými událostmi:

$$\tau \equiv \Delta t' = t'_2 - t'_1 , \quad (18.43)$$

který nazýváme **vlastním časem**.

Stejně události v bodě P o polohovém vektoru $\mathbf{r} = (x, y, z) \neq \mathbf{konst.}$ pozoruje

pozorovatel v nečárkované soustavě \mathcal{S} . Poznamenejme, že se tento bod vůči soustavě \mathcal{S} pohybuje stejnou rychlostí, jakou se pohybuje čárkovaná soustava \mathcal{S}' vůči soustavě nečárkované. Časy mezi oběma událostmi, které naměří pozorovatel v soustavě \mathcal{S} musí souviset s výsledky získanými pozorovatelem \mathcal{S}' pomocí Lorentzova transformačního vztahu (18.29), tj.

$$T \equiv \Delta t = t_2 - t_1 = \gamma \left(t'_2 + \frac{vx'_2}{c^2} \right) - \gamma \left(t'_1 + \frac{vx'_1}{c^2} \right) = \gamma (t'_2 - t'_1) = \gamma \tau . \quad (18.44)$$

Odtud

$$\tau = \frac{T}{\gamma} < T \quad (v \neq 0) . \quad (18.45) \quad \gamma > 1$$

Z výsledku (18.45) je patrné, že čas naměřený mezi událostmi (vlastní čas), které nastávají ve stejném bodě, tj. v bodě, který se vůči soustavě nepohybuje, je kratší než čas naměřený v soustavě, vůči které se místo událostí pohybuje. Neboli čas mezi událostmi měřený v soustavě \mathcal{S} trvá delší dobu než v soustavě \mathcal{S}' , tj.

$$T = \gamma \tau > \tau , \quad (18.46)$$

a proto hovoříme o dilataci (prodloužení) času.

Příklad 18.2.1

Při srážkách primárního kosmického záření s atomy vrchní vrstvy atmosféry vznikají miony. Jsou to nestabilní částice se střední dobou života $\tau = 2,2 \cdot 10^{-6}$ s (měřenou v klidové soustavě mionu). Pozorování pomocí stratosférických balónů a raket ukázala, že miony vznikají ve velkých výškách nad povrchem Země (více než 10 km) a odtud se pohybují k Zemi rychlostí blížíící se rychlosti světla. Za střední dobu života se mion rozpadá na elektron a dvě neutrina.

Předpokládejme, že mion vznikl ve výšce 15 km a pohybuje se k Zemi rychlostí $v = 0,999 c$. Může tento mion doletět na povrch Země?

Řešení:

Tuto úlohu budeme řešit ve vztažné soustavě spojené se Zemí. S ohledem na vysoké rychlosti mionu, je zřejmé, že budeme nuceni vycházet z poznatků speciální teorie relativity.

Dráha, kterou může mion od okamžiku vzniku do okamžiku rozpadu urazit, je

$$l = vT , \quad (18.47)$$

kde dobu života T vzhledem soustavě spojené se Zemí (nečárkovaná soustava) určíme pomocí vztahu (18.46), tedy

$$T = \gamma \tau . \quad (18.48)$$

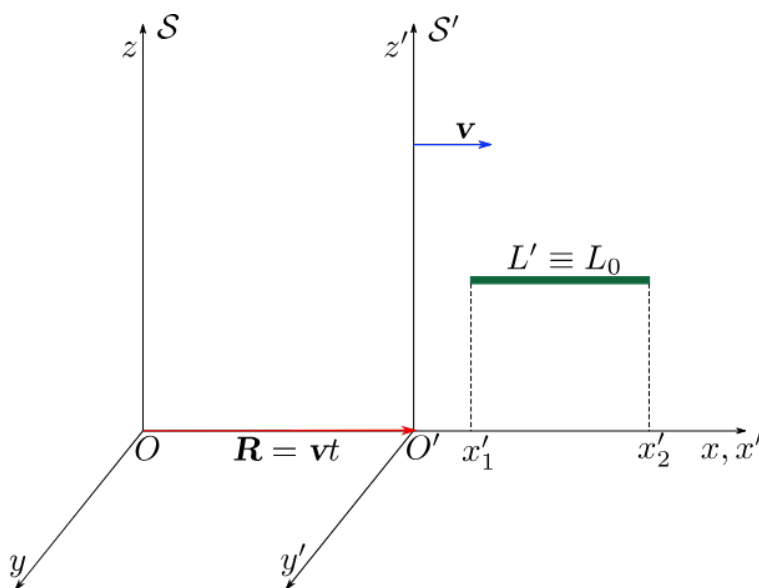
Dosazením z tohoto vztahu do výrazu (18.47) dostaneme

$$l = v\gamma\tau = \frac{0,9998 \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 2,2 \cdot 10^{-6}}{\sqrt{1 - 0,9998^2}} = \frac{0,09998 \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 2,2 \cdot 10^{-6}}{\sqrt{3,9996 \cdot 10^{-4}}} = 0,09998 \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 2,2 \cdot 10^{-6} \cdot 50 = 32995 \text{ m} \doteq 33 \text{ km} . \quad (18.49)$$

Mion tedy urazí za dobu svého života v zemské vztažné soustavě dráhu $l = 33$ km, a proto může být zaregistrován přístroji na Zemi. Kdyby se neprojevila dilatace času a čas byl absolutní veličina ($T = \tau$), pak by nejrychlejší miony mohly od okamžiku svého vzniku do okamžiku rozpadu urazit jen dráhu zhruba 660 m. To znamená, že by se nemohly dostávat na povrch Země. V laboratořích na Zemi však miony vznikající ve velkých výškách registrujeme, čímž je experimentálně prokázán jev dilatace času.

18.3 Kontrakce délky a změna objemu kvádrů

Uvažujme tyč rovnoběžnou s osami x a x' , která je v klidu v čárkované soustavě \mathcal{S}' , jež se vůči nečárkované soustavě \mathcal{S} pohybuje rychlostí v . Jeden její konec nechť má souřadnici x'_1 a druhý konec souřadnici x'_2 , tedy délka tyče $L' \equiv L_0$ je v čárkované soustavě \mathcal{S}' dána rozdílem $L_0 = x'_2 - x'_1$, viz obr. 18.3. Tuto délku nazýváme jako **vlastní (klidová) délka**. Uvažovaná tyč se tedy vůči nečárkované soustavě \mathcal{S} pohybuje rychlostí v . Její délka v soustavě \mathcal{S} je definována rozdílem souřadnic jejích konců, tj. $L = x_2 - x_1$, kde souřadnice x_1 a x_2 jsou souřadnice konců tyče určené současně v libovolném časovém okamžiku¹ t . Z transformačního vztahu (18.22) plynou pro okamžité souřadnice obou konců tyče následující vztahy:



Obrázek 18.3: Výchozí situace pro odvození efektu kontrakce délky.

$$x'_1 = \gamma(x_1 - vt) , \quad (18.50)$$

$$x'_2 = \gamma(x_2 - vt) . \quad (18.51)$$

Odečtením vztahů (18.51) a (18.50) dostaneme:

$$x'_2 - x'_1 = \gamma(x_2 - vt) - \gamma(x_1 - vt) = \gamma(x_2 - x_1) \quad (18.52)$$

¹Obě souřadnice jsou tedy stanoveny ve stejném časovém okamžiku.

neboli s ohledem na výše zavedené značení délky tyče v uvažovaných soustavách:

$$L_0 = \gamma L \geq L. \quad (18.53)$$

Odtud

$$L = \frac{L_0}{\gamma}. \quad (18.54)$$

Délka L , kterou naměříme u pohybující se tyče, je vždy kratší než je vlastní délka tyče L_0 a z tohoto důvodu hovoříme o tzv. **kontrakci (zkrácení) délky** tyče při jejím pohybu.

Je třeba současně uvést, že příčné rozměry se nemění, viz transformační vztahy (18.27) a (18.28). Obhájit toto tvrzení je možné na základě následujícího myšlenkového experimentu. Uvažujme dvě identické souosé trubky, které se proti sobě pohybují. Dále přijmeme předpoklad, že se při pohybu trubek zmenšuje jejich příčný rozměr. Dále je zřejmé, že pro každou z uvažovaných trubek můžeme nalézt soustavu, vůči které se nebude pohybovat. Na základě výše uvedených předpokladů bychom pozorovali v rámci jedné ze soustav spojených s uvažovanou trubkou, že druhá, pohybující se trubka, díky zkrácení příčných rozměrů, projde trubkou, která je vůči dané soustavě v klidu. Naopak v soustavě, vůči které je druhá trubka v klidu, bychom pozorovali jev opačný, tj. trubka, která je procházena druhou trubkou, by byla v té druhé soustavě trubkou procházející. Jelikož nemůže dojít k protichůdným výsledkům experimentu ve dvou zvolených soustavách, můžeme vyslovit tvrzení, že *příčné rozměry těles se při jejich pohybu nemění*. Samozřejmě ke stejnému rozporu bychom dospěli při myšlenkovém experimentu, při kterém by se s pohybem trubky její příčné rozměry zvětšovaly.

Z výše uvedenými závěry souvisí i otázka změny objemu tělesa. Uvažujme nyní nikoliv o tyči, ale o kvádru jako o představiteli tělesa, u kterého již nelze zanedbávat některé rozměry. Nechť je jedna hrana kvádru ve vztažné soustavě \mathcal{S}' rovnoběžná se souřadnicovou osou x' a ostatní hrany jsou pak rovnoběžné s dalšími souřadnicovými osami. Délka jednotlivých hran je v této vztažné soustavě délkou klidovou, tedy objem tělesa $V' \equiv V_0 = x'y'z'$ je též **klidovým objemem**. K vyjádření objemu, který změří pozorovatel spojený s nečárkovanou soustavou \mathcal{S} použijeme vztahu (18.54), podle kterého se pro něj rozměr x tělesa ležící ve směru pohybu zkracuje, zatímco se rozměry tělesa kolmé na směr pohybu nemění ($y = y'$ a $z = z'$). Objem kvádru neměřený ze soustavy \mathcal{S} je pak dán následujícím vztahem:

$$V = xyz = xy'z' = \frac{x'y'z'}{\gamma} = \frac{V_0}{\gamma}. \quad (18.55)$$

Příklad 18.3.1

Na kosmické lodi vzdalující se od Země konstantní rychlostí je umístěna ve směru pohybu tyč o vlastní délce 1 m.

- Jaká je délka této tyče pro pozorovatele na Zemi, jestliže se loď vzdaluje rychlostí $v = 0,1c$?
- Jakou rychlostí by se musela pohybovat kosmická loď, aby tyč, která má na kosmické lodi délku 1 m, měla pro pozorovatele na Zemi délku 10 cm?

Řešení:

- (a) Vlastní délky tyče je $L_0 = 1$ m. Pomocí vztahu (18.54) spočítáme délku tyče L naměřenou pozorovatelem na Zemi:

$$L = \frac{L_0}{\gamma} = L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 1 \cdot \sqrt{1 - \frac{(0,1c)^2}{c^2}} = \sqrt{1 - 0,01} = 0,995 \text{ m} . \quad (18.56)$$

- (b) Ze vztahu (18.54) dostáváme:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{L_0}{L} = \frac{1}{0,995} = 10 . \quad (18.57)$$

Odtud

$$v = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} c = \sqrt{0,99} c \doteq 0,995c . \quad (18.58)$$

18.4 Současnost, minulost a budoucnost z pohledu speciální teorie relativity

Pozorovatel v nečárkované soustavě \mathcal{S} sleduje dvě události \mathcal{U}_1 a \mathcal{U}_2 , přičemž prostoročasové určení první události je $[(x_1, 0, 0), t]$ a prostoročasové určení druhé události je $[(x_2, 0, 0), t]$, tedy události nastaly na různých místech, přitom obě události nastaly současně v čase t . Jinak bude prostoročasové určení uvedených událostí vnímat pozorovatel v čárkované soustavě \mathcal{S}' , která se pohybuje vůči nečárkované soustavě \mathcal{S} rychlostí v . Podle transformačního vztahu (18.25) nastala událost \mathcal{U}_1 pro pozorovatele v čárkované soustavě \mathcal{S}' v okamžiku

$$t'_1 = \gamma \left(t - \frac{v}{c^2} x_1 \right) \quad (18.59)$$

a událost \mathcal{U}_2 v okamžiku

$$t'_2 = \gamma \left(t - \frac{v}{c^2} x_2 \right) . \quad (18.60)$$

Platí-li, že $x_2 \neq x_1$, potom pro pozorovatele v čárkované soustavě nenastaly obě události současně a časový rozdíl mezi uvažovanými událostmi je dán rozdílem časů (18.60) a (18.59), tj.

$$t'_2 - t'_1 = -\gamma \frac{v}{c^2} (x_2 - x_1) . \quad (18.61)$$

Odtud je vidět, že **pojem současnosti ztrácí ve speciální teorii relativity smysl**. O současnosti můžeme mluvit jen tehdy, když obě události nastanou ve stejnou dobu na stejném místě. Události, které nastávají současně v různých místech v jedné soustavě, se jeví v jiných pohybujících se soustavách jako nesoučasné,

přičemž v některých soustavách událost \mathcal{U}_1 nastane dříve než událost \mathcal{U}_2 , v jiných tomu může být právě naopak.

Budeme nyní uvažovat opět dvě události \mathcal{U}_1 a \mathcal{U}_2 , které nastaly pro pozorovatele z nečárkované soustavy \mathcal{S} v různých místech a v různých časech, jejich prostor-časové určení je dáno jako $[(x_1, 0, 0), t_1]$ a $[(x_2, 0, 0), t_2]$, přičemž $t_2 > t_1$. Opět budeme uvažovat čárkovanou soustavu \mathcal{S}' , ve které pozorovatel uvedené události pozoruje dle transformačního vztahu (18.25) v časech

$$t'_1 = \gamma \left(t_1 - \frac{v}{c^2} x_1 \right) , \quad (18.62)$$

$$t'_2 = \gamma \left(t_2 - \frac{v}{c^2} x_2 \right) . \quad (18.63)$$

Tedy mezi uvažovanými událostmi uběhl čas

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1 = \gamma \left[(t_2 - t_1) - \frac{v}{c^2} (x_2 - x_1) \right] . \quad (18.64)$$

Ze vztahu (18.64) plyne, že bude-li platit relace

$$|x_2 - x_1| > c(t_2 - t_1) , \quad (18.65)$$

pak vždy lze nalézt soustavu \mathcal{S}' takovou, že v ní může být $\Delta t'$ jak kladné, tak i záporné, to podle rychlosti v . To znamená, že události \mathcal{U}_1 a \mathcal{U}_2 nemohou mít žádnou příčinou (kauzální) souvislost, protože pro jednoho pozorovatele nastane událost \mathcal{U}_1 před událostí \mathcal{U}_2 , podle jiného naopak, tj. událost \mathcal{U}_2 nastane před událostí \mathcal{U}_1 .

Pouze v případě relace $|x_2 - x_1| < c(t_2 - t_1)$, bude vždy $\Delta t' > 0$ a pro všechny pozorovatele nastává událost \mathcal{U}_1 před událostí \mathcal{U}_2 . Říkáme pak, že mezi takovými událostmi existuje **příčinná (kauzální) souvislost** a událost \mathcal{U}_2 může být následkem události \mathcal{U}_1 .

Výraz

$$v = \frac{|x_2 - x_1|}{t_2 - t_1} \quad (18.66)$$

představuje rychlost, se kterou se šíří příčina od události \mathcal{U}_1 k události \mathcal{U}_2 . Touto příčinou může být např. informace, energie, silová interakce apod., záleží na fyzikální povaze událostí. Nemá-li být porušena příčinná (kauzální) souvislost mezi událostmi \mathcal{U}_1 a \mathcal{U}_2 , musí být splněna podmínka:

$$|x_2 - x_1| \leq c(t_2 - t_1) . \quad (18.67)$$

Použijeme-li tuto podmínku ve vztahu pro rychlost šíření příčiny události (18.66), tak dostaneme, že

$$v \leq c . \quad (18.68)$$

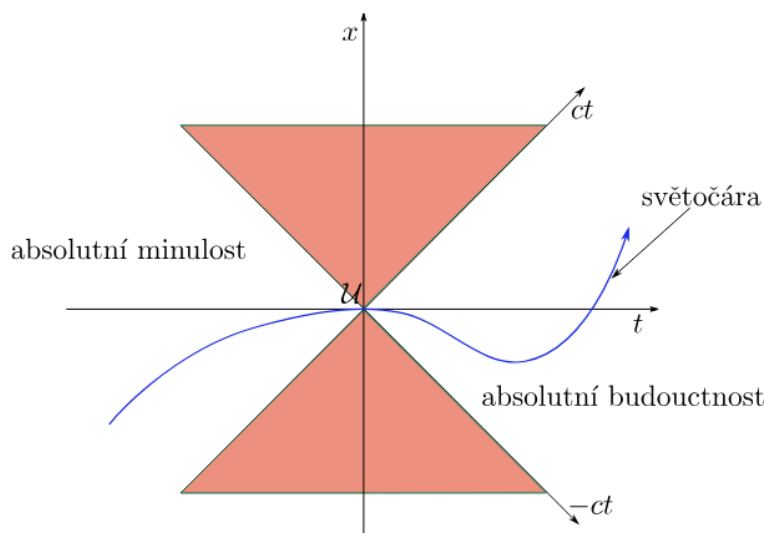
Z podmínky (18.68) plyne, že **jakýkoliv signál se nemůže šířit rychleji než světlo.**

Předpokládejme, že by platila následující relace:

$$|x_2 - x_1| > c(t_2 - t_1) . \quad (18.69)$$

V takovémto případě je vždy možné nalézt čárkovanou soustavu \mathcal{S}' takovou, že v ní časový interval $\Delta t'$ může nabývat jak kladné, tak záporné hodnoty v závislosti na volbě rychlosti jejího pohybu v vůči nečárkované soustavě \mathcal{S} , takže pro jednoho pozorovatele nastane událost \mathcal{U}_1 před událostí \mathcal{U}_2 a pro jiného pozorovatele to může být právě naopak. Díky této skutečnosti můžeme konstatovat, že za předpokladu splnění relace (18.69) **nemůže** mezi uvažovanými událostmi \mathcal{U}_1 a \mathcal{U}_2 být příčinná souvislost.

Obecně události, mezi kterými je příčinná souvislost, vymezuje v prostoru svě-



Obrázek 18.4: Světelný kužel v rovině (x, t) .

telný kužel

$$|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1| \leq c(t_2 - t_1) . \quad (18.70)$$

Platí-li, že $t_2 > t_1$, potom událost \mathcal{U}_2 nastává později než událost \mathcal{U}_1 a všechny události \mathcal{U}_2 tvoří **absolutní budoucnost** vzhledem k události \mathcal{U}_1 , kdežto všechny události \mathcal{U}_1 tvoří **absolutní minulost** vzhledem k události \mathcal{U}_2 . Na obrázku 18.4 je zachycen světelný kužel v rovině (x, t) , který je vymezen přímkami $x = \pm ct$. Události ležící vpravo od události \mathcal{U} , které odpovídá časoprostorové určení $[(0, 0, 0), t]$, představují absolutní budoucnost, kdežto události nacházející se od ní vlevo představují absolutní minulost. Křivka zachycená na obrázku reprezentuje příčinný sled událostí a tato křivka se nazývá **světočára**. Události nacházející se ve vybarvených sektorech nemohou mít příčinnou souvislost se zachycenou událostí \mathcal{U} .

18.5 Časoprostorový interval

Je známo, že v eukleidovském prostoru se při transformacích souřadnic jako je translace, rotace či zrcadlení nemění vzdálenost mezi body. Říkáme, že vzdálenost mezi body je invariantní (neměnná) vůči zmíněným transformacím. Budeme-li uvažovat dva body o polohových vektorech \mathbf{r}_1 a \mathbf{r}_2 , potom druhou mocninu vzdálenosti Δl mezi nimi spočítáme podle Pythagorovy věty jako

$$(\Delta l)^2 = (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 . \quad (18.71)$$

Pro Lorentzovu transformaci existuje jeden velmi důležitý invariant, který nazýváme **časoprostorový interval** (někdy jen stručně **interval**) a značíme ho Δs . Pro dvě události s časoprostorovým určením $[\mathbf{r}_1, t_1]$ a $[\mathbf{r}_2, t_2]$ je tento časoprostorový interval definován jako

$$(\Delta s)^2 = (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)^2 - c_0^2(t_2 - t_1)^2. \quad (18.72)$$

Tedy pro dvě události zůstává časoprostorový interval (18.72) při Lorentzově transformaci invariantní (neměnný), o čemž se dá snadno přesvědčit použitím transformačních vztahů (18.26)-(18.29) v rovnosti (18.72). Na základě výše uvedeného musí platit, že

$$(\Delta s)^2 = (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)^2 - c_0^2(t_2 - t_1)^2 = (\mathbf{r}'_2 - \mathbf{r}'_1)^2 - c_0^2(t'_2 - t'_1)^2 = (\Delta s')^2. \quad (18.73)$$

Jsou-li dvě události v kauzálním vztahu, potom na základě podmínky (18.65) musí platit, že $(\Delta s)^2 < 0$. Odpovídající časoprostorový interval Δs je imaginární a v tomto případě ho nazýváme **časupodobný interval**. Nejsou-li dvě události v kauzálním vztahu (nesouvisející) platí na základě podmínky (18.69), že $(\Delta s)^2 > 0$, takže časoprostorový interval Δs je reálný a v tomto případě ho nazýváme **prostorupodobný interval**. Pro dvě události, které spojuje světelný signál platí, že $(\Delta s)^2 = 0$.

18.6 Skládání rychlostí a transformace rychlosti

Okamžitá rychlost hmotného bodu pohybujícího se podél osy x' v čárkované soustavě \mathcal{S}' , která se vůči soustavě \mathcal{S} pohybuje, je dána vztahem:

$$u' = \frac{dx'}{dt'}. \quad (18.74)$$

Vzhledem k tomu, že okamžitá rychlost je dána podílem infinitesimálně chápaných diferenciálů dx' a dt' , určíme si nejprve tyto diferenciály z transformačních vztahů (18.22) a (18.25):

$$dx'(x, t) = \frac{\partial x'}{\partial x} dx + \frac{\partial x'}{\partial t} dt = \gamma dx - \gamma v dt = \gamma(dx - v dt), \quad (18.75)$$

$$dt'(x, t) = \frac{\partial t'}{\partial x} dx + \frac{\partial t'}{\partial t} dt = \gamma dt - \gamma \frac{v}{c^2} dx = \gamma \left(dt - \frac{v}{c^2} dx \right). \quad (18.76)$$

Dosadíme-li diferenciály (18.75) a (18.76) do vztahu (18.74), tak obdržíme následující výraz:

$$u' = \frac{\gamma(dx - v dt)}{\gamma \left(dt - \frac{v}{c^2} dx \right)}. \quad (18.77)$$

Podělíme-li čitatele a jmenovatele ve výrazu (18.77) faktorem γdt , tak dostaneme:

$$u' = \frac{\frac{dx}{dt} - v}{1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt}}. \quad (18.78)$$

Okamžitá rychlost uvažovaného hmotného bodu je v soustavě nečárkované \mathcal{S} dána výrazem:

$$u = \frac{dx}{dt} . \quad (18.79)$$

S ohledem na vztah (18.79) můžeme upravit rovnost (18.78) jako

$$u' = \frac{u - v}{1 - \frac{v}{c^2}u} . \quad (18.80)$$

Analogickým způsobem můžeme určit i transformační vztah pro okamžitou rychlost hmotného bodu vzhledem k nečárkované soustavě \mathcal{S} . Výraz, který obdržíme, bude shodný s výrazem, který získáme tak, že ve vztahu (18.80) zaměníme čárkované rychlosti za nečárkované a naopak a za unášivou rychlost dosadíme rychlost $-v$, tedy

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{v}{c^2}u'} . \quad (18.81)$$

Výrazy (18.80) a (18.81) představují vzorce pro skládání rychlostí, které vyhovují 2. postulátu STR o stálosti rychlosti světla.

Například je-li u' rychlost světelného paprsku v čárkované soustavě \mathcal{S}' pohybující se rychlostí v vůči soustavě \mathcal{S} , tj. $u' = c$, potom po dosazení do vztahu (18.81) dostaneme:

$$u = \frac{c + v}{1 + \frac{v}{c^2}c} = \frac{c + v}{\frac{c+v}{c}} = c . \quad (18.82)$$

Z tohoto výsledku lze vidět, že postulát 2. postulát speciální teorie relativity je splněn.

Budeme-li předpokládat extrémní případ, kdy čárkovaná soustava \mathcal{S}' se pohybuje vůči nečárkované soustavě rychlostí světla $v = c$ a bude-li se v čárkované soustavě \mathcal{S}' světelný paprsek pohybovat rychlostí $u' = c$, potom jeho rychlost vůči nečárkované soustavě \mathcal{S} získáme dosazením do vztahu (18.81):

$$u = \frac{c + c}{1 + \frac{c}{c^2}c} = \frac{2c}{2} = c . \quad (18.83)$$

Z výsledku je patrné, že i v tomto případě je splněn postulát o neměnnosti rychlosti světla. Navíc z výsledku vyplývá důležitý závěr, že *maximální možnou dosažitelnou rychlostí je právě rychlost světla c .*

Budeme-li uvažovat okamžitou rychlost hmotného bodu vůči čárkované soustavě \mathcal{S}' , který se pohybuje libovolným směrem, potom můžeme psát, že

$$\mathbf{u}' = (u'_x, u'_y, u'_z) = \left(\frac{dx'}{dt'}, \frac{dy'}{dt'}, \frac{dz'}{dt'} \right) . \quad (18.84)$$

Z transformačních vztahů (18.23) a (18.24) vyplývá, že

$$dy' = dy , \quad dz' = dz . \quad (18.85)$$

Dosadíme-li v rovnosti (18.84) za diferenciál dx' ze vztahu (18.75), za diferenciál dt' ze vztahu (18.76) a za diferenciály dy' a dz' rovnosti (18.85), pak po podělení diferenciálem dt' a následné úpravě dostaneme pro jednotlivé složky rychlosti následující transformační vztahy:

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v}{c^2}u_x} , \quad u'_y = \frac{1}{\gamma} \frac{u_y}{1 - \frac{v}{c^2}u_x} , \quad u'_z = \frac{1}{\gamma} \frac{u_z}{1 - \frac{v}{c^2}u_x} , \quad (18.86)$$

u_x , u_y a u_z odpovídají složkám okamžité rychlosti hmotného bodu vůči nečárkované soustavě \mathcal{S} , tj.

$$\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right). \quad (18.87)$$

Inverzní vztahy pro transformaci rychlosti dostaneme, kdy opět zaměníme čárkované složky rychlosti za nečárkované a za unášivou rychlost dosadíme $-v$, tedy

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{v}{c^2} u'_x}, \quad u_y = \frac{1}{\gamma} \frac{u'_y}{1 + \frac{v}{c^2} u'_x}, \quad u_z = \frac{1}{\gamma} \frac{u'_z}{1 + \frac{v}{c^2} u'_x}. \quad (18.88)$$

V případě, že nebudeme uvažovat speciální případ vzájemného pohybu dvou inerciálních soustav \mathcal{S} a \mathcal{S}' , jak je to naznačeno na obr. 18.1, ale budeme uvažovat obecný vzájemný pohyb inerciálních soustav, tak pro nalezení vztahu pro skládání rychlostí vyjdeme z transformačních vztahů pro obecnou Lorentzovu transformaci viz kap. 18.1.2.

Pro rychlosti v uvažovaných inerciálních soustavách \mathcal{S} a \mathcal{S}' musí platit:

$$\mathbf{u} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}, \quad \mathbf{u}' = \frac{d\mathbf{r}'}{dt'}. \quad (18.89)$$

Abychom našli vztahy pro tyto rychlosti, tak použijeme vztah (18.40), který zderivujeme podle času t (poznamenejme, že $\mathbf{v} = \text{konst.}$):

$$\frac{dt'}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\gamma \left(t - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}}{c^2} \right) \right] = \gamma \left(1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}}{c^2} \right) = \gamma \left(1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{c^2} \right). \quad (18.90)$$

Odtud můžeme psát, že

$$\frac{dt}{dt'} = \frac{1}{\gamma \left(1 - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{c^2} \right)}. \quad (18.91)$$

Na základě výsledku (18.91) je možné vyjádřit derivaci podle času t' jako

$$\frac{d}{dt'} = \frac{dt}{dt'} \frac{d}{dt} = \frac{1}{\gamma \left(1 - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{c^2} \right)} \frac{d}{dt}. \quad (18.92)$$

Nyní můžeme při použití vztahů (18.39) a (18.89) psát, že

$$\begin{aligned} \mathbf{u}' &= \frac{d\mathbf{r}'}{dt'} = \frac{d}{dt'} \left\{ \mathbf{r} + \mathbf{v} \left[\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}}{v^2} (\gamma - 1) - \gamma t \right] \right\} = \\ &= \frac{1}{\gamma \left(1 - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{c^2} \right)} \frac{d}{dt} \left\{ \mathbf{r} + \mathbf{v} \left[\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}}{v^2} (\gamma - 1) - \gamma t \right] \right\} = \\ &= \frac{\frac{d\mathbf{r}}{dt} + \mathbf{v} \left[\frac{\frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \mathbf{v}}{v^2} (\gamma - 1) - \gamma \right]}{\gamma \left(1 - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{c^2} \right)} = \frac{\mathbf{u} + \mathbf{v} \left[\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{v^2} (\gamma - 1) - \gamma \right]}{\gamma \left(1 - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{c^2} \right)}. \end{aligned} \quad (18.93)$$

Tento výsledek představuje hledaný transformační vztah mezi rychlostmi \mathbf{u}' a \mathbf{u} a pro přehlednost zapíšeme ještě jednou:

$$\mathbf{u}' = \frac{\mathbf{u} + \mathbf{v} \left[\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{v^2} (\gamma - 1) - \gamma \right]}{\gamma \left(1 - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{c^2} \right)}. \quad (18.94)$$

Kdybychom předpokládali, že se inerciální soustavy \mathcal{S} a \mathcal{S}' pohybují speciálním způsobem, jak je naznačeno na obr. 18.1, tak pro rychlost $\mathbf{v} = (v, 0, 0)$, kterou dosadíme do vztahu (18.94) dostaneme pro jednotlivé složky rychlosti $\mathbf{u}' = (u'_x, u'_y, u'_z)$ přesně vztahy (18.86).

Pro nalezení inverzního transformačního vztahu pro rychlost \mathbf{u} bychom postupovali analogickým způsobem, avšak můžeme formálně tento vztah získat záměnou čárkovaných veličin za nečárkované a naopak a náhradou \mathbf{v} za $-\mathbf{v}$, tedy

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{u}' - \mathbf{v} \left[-\frac{\mathbf{u}' \cdot \mathbf{v}}{v^2} (\gamma - 1) + \gamma \right]}{\gamma \left(1 + \frac{\mathbf{u}' \cdot \mathbf{v}}{c^2} \right)}. \quad (18.95)$$

Opět pro případ, kdybychom předpokládali, že se inerciální soustavy \mathcal{S} a \mathcal{S}' pohybují speciálním způsobem, jak je naznačeno na obr. 18.1, tak pro rychlost $\mathbf{v} = (v, 0, 0)$, kterou dosadíme do vztahu (18.95), bychom dostali pro jednotlivé složky rychlosti $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$ přesně vztahy (18.88).

Kapitola 19

Relativistická dynamika

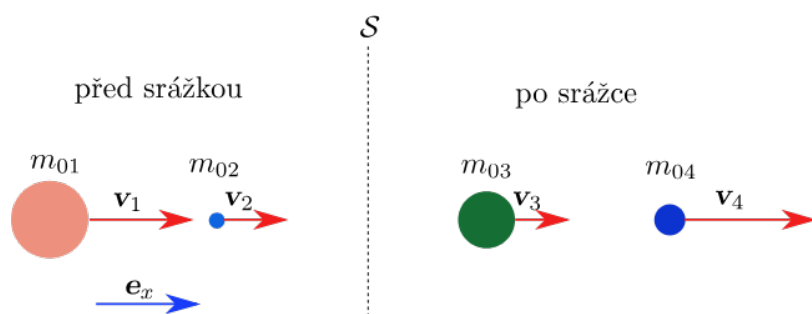
Z klasické dynamiky vyplývá, že působí-li na těleso o hmotnosti m konstantní síla F , pak jeho rychlost je dána vztahem:

$$v = \frac{F}{m}t = at. \quad (19.1)$$

Odtud vyplývá, že po dostatečně dlouhé době t , po kterou bude síla na těleso působit, bude jeho rychlost větší, než je rychlost světla, což je v rozporu se tvrzením vyplývajícím ze STR, že maximální dosažitelnou rychlostí je rychlost světla ve vakuu. To nám dává tušit, že dosáhnout souladu s závěrem o dosažitelné mezní rychlosti, lze, za předpokladu působení konstantní silou na těleso, jen tím, že s rostoucí rychlostí tělesa poroste i jeho hmotnost. Proto je klíčovým úkolem nalezení funkční závislosti hmotnosti tělesa na jeho rychlosti, tj. $m = m(v)$. Hmotnost pro nulovou rychlost tělesa budeme nazývat **klidová hmotnost** a budeme ji značit m_0 a musí pro ni platit, že $m_0 = m(v = 0)$.

19.1 Relativistická hybnost a hmotnost

Abychom dospěli k nalezení funkční závislosti hmotnosti tělesa na jeho rychlosti, tak budeme uvažovat srážku probíhající v jednom směru tak, jak je pozorována z pohledu inerciální nečárkované soustavy \mathcal{S} , viz obr. 19.1. Co se děje během srážky



Obrázek 19.1: Jednorozměrná srážka dvou těles z pohledu nečárkované soustavy \mathcal{S} .

nás nebude zajímat (tělesa si mohou vyměňovat atomy, může dojít k chemické reakci apod.), podstatný je pro nás pozorovaný výsledek srážky.

Analýza srážky z pohledu klasické fyziky

Nejdříve použijeme pohled na srážku z pohledu nečárkované soustavy \mathcal{S} , který nám poskytuje klasická mechanika, kde víme, že musí platit Zákon zachování hybnosti, tj.

$$m_{01}v_1 + m_{02}v_2 = m_{03}v_3 + m_{04}v_4 . \quad (19.2)$$

Z pohledu čárkované inerciální soustavy \mathcal{S}' , která se pohybuje vůči nečárkované soustavě \mathcal{S} rychlostí \mathbf{V} ($\mathbf{V} = V\mathbf{e}_x$), musí rovněž platit Zákon zachování hybnosti, protože víme, že všechny inerciální vztažné soustavy jsou si rovnocenné, tedy

$$m_{01}v'_1 + m_{02}v'_2 = m_{03}v'_3 + m_{04}v'_4 , \quad (19.3)$$

kde

$$v'_i = v_i - V , \quad i = 1, 2, 3, 4 . \quad (19.4)$$

Dosadíme ze vztahu (19.4) do rovnice (19.3), čímž dostaneme:

$$m_{01}v_1 + m_{02}v_2 - (m_{01} + m_{02})V = m_{03}v_3 + m_{04}v_4 - (m_{03} + m_{04})V . \quad (19.5)$$

Odečtením rovnic (19.2) a (19.5) dostaneme:

$$(m_{01} + m_{02})V = (m_{03} + m_{04})V , \quad (19.6)$$

tedy

$$m_{01} + m_{02} = m_{03} + m_{04} . \quad (19.7)$$

Odtud vidíme, že zachovává-li se v inerciálních vztažných soustavách hybnost, pak se zachovává i hmotnost. Tento závěr je v souladu s Galileiho principem relativity, který říká, že pro popis mechanických dějů jsou všechny inerciální vztažné soustavy rovnocenné.

Navíc můžeme konstatovat, že uplatnění zachování hmotnosti po srážkách (19.7) v rovnosti (19.5) vede na rovnici (19.2), to znamená, že Zákon zachování hybnosti je nezávislý na volbě vztažné inerciální soustavy.

Analýza srážky z pohledu STR

Z pohledu nečárkované inerciální soustavy \mathcal{S} musí platit stejná rovnice jako (19.2), tj.

$$m_{01}v_1 + m_{02}v_2 = m_{03}v_3 + m_{04}v_4 . \quad (19.8)$$

Při označení hmotností jsme použili indexu „0“, protože tyto hmotnosti měříme vážením, tudíž se jedná, jak bylo zavedeno výše, o klidové hmotnosti.

Vyjádríme-li si zachování hybnosti z pohledu čárkované inerciální soustavy \mathcal{S}' , která se, jako při analýze srážky z pohledu klasické mechaniky, pohybuje vůči nečárkované soustavě rychlostí \mathbf{V} , tak můžeme psát:

$$m_{01}v'_1 + m_{02}v'_2 = m_{03}v'_3 + m_{04}v'_4 , \quad (19.9)$$

kde na základě vztahu (18.86), kde použijeme značení rychlostí, které je zavedené v této kapitole¹, platí, že

$$v'_i = \frac{v_i - V}{1 - \frac{V}{c^2}v_i} , \quad i = 1, 2, 3, 4 . \quad (19.10)$$

$$v_i \equiv v_{xi} \text{ a } v'_i \equiv v'_{xi}$$

¹ $\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{v}$ a $\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{V}$

Dosadíme ze vztahu (19.10) do rovnice (19.9), čímž dostaneme:

$$m_{01} \frac{v_1 - V}{1 - \frac{V}{c^2} v_1} + m_{02} \frac{v_2 - V}{1 - \frac{V}{c^2} v_2} = m_{03} \frac{v_3 - V}{1 - \frac{V}{c^2} v_3} + m_{04} \frac{v_4 - V}{1 - \frac{V}{c^2} v_4} . \quad (19.11)$$

Z rovnice (19.11) vidíme, že nelze eliminovat veličinu V , vyjadřující velikost rychlosti inerciální vztažné soustavy \mathcal{S}' vůči soustavě \mathcal{S} , což má za následek, že hybnost vyjádřená na základě definice se ve všech inerciálních soustavách nezachovává. Tímto jsme nuceni buď opustit platnost Zákona zachování hybnosti ve všech inerciálních soustavách nebo nalézt jinou definici hybnosti. Zvolíme druhou z možností.

V klasické mechanice byla hybnost zavedena jako

$$\mathbf{p} = m_0 \mathbf{v} = m_0 \frac{d\mathbf{r}}{dt} , \quad (19.12)$$

kde m_0 je hmotnost tělesa či hmotného bodu .

V takto zavedené hybnosti se vyskytuje čas vztahující se k nečárkované inerciální vztažné soustavě \mathcal{S} . Avšak tato soustava není ničím výjimečná. Již víme, že v různých inerciálních vztažných soustavách plyne čas různě, takže pozorovatelé z těchto soustav se neshodnou na tom jaký je ten správný čas. Jedině na čem se shodnou je vlastní čas τ spojený se soustavou, vůči které je pohybující se hmotný bod (těleso) v klidu, tj. vlastní čas uvažovaného hmotného bodu (čas na hodinkách hmotného bodu, částice, tělesa atd.). Z tohoto důvodu se můžeme zavést jinou definici hybnosti jako

$$\mathbf{p} = m_0 \frac{d\mathbf{r}}{d\tau} . \quad (19.13)$$

Na základě vztahu (18.44) můžeme psát, že

$$dt = \frac{d\tau}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow d\tau = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt , \quad (19.14)$$

kde v je rychlost pohybu objektu z pohledu nečárkované inerciální vztažné soustavy \mathcal{S} .

Dosazením za $d\tau$ z tohoto vztahu do vztahu pro nově zavedenou hybnost (19.13) dostaneme:

$$\mathbf{p} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \underbrace{\frac{d\mathbf{r}}{dt}}_{=\mathbf{v}} = \frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} . \quad (19.15)$$

Tedy můžeme psát, že

$$\mathbf{p} = m_0 \frac{d\mathbf{r}}{d\tau} = \frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} . \quad (19.16)$$

Tímto jsme zavedli hybnost, kterou nazveme **relativistická hybnost**.

Na základě relativistické hybnosti, pak můžeme v rovnici (19.8) přepsat jednotlivé hybnosti jako

$$\frac{m_{01} v_1}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}} + \frac{m_{02} v_2}{\sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}}} = \frac{m_{03} v_3}{\sqrt{1 - \frac{v_3^2}{c^2}}} + \frac{m_{04} v_4}{\sqrt{1 - \frac{v_4^2}{c^2}}} . \quad (19.17)$$

Dále přepíšeme hybnosti v rovnici (19.9):

$$\frac{m_{01}v'_1}{\sqrt{1 - \frac{v_1'^2}{c^2}}} + \frac{m_{02}v'_2}{\sqrt{1 - \frac{v_2'^2}{c^2}}} = \frac{m_{03}v'_3}{\sqrt{1 - \frac{v_3'^2}{c^2}}} + \frac{m_{04}v'_4}{\sqrt{1 - \frac{v_4'^2}{c^2}}} . \quad (19.18)$$

Za v'_i je nutné dosadit ze vztahu (19.10), který dále upravíme:

$$v'_i = \frac{v_i - V}{1 - \frac{V}{c^2}v_i} = \frac{(v_i - V)c^2}{c^2 - v_i V} , \quad i = 1, 2, 3, 4 . \quad (19.19)$$

Odtud můžeme psát, že

$$\frac{v_i'^2}{c^2} = \left[\frac{(v_i - V)c}{c^2 - v_i V} \right]^2 . \quad (19.20)$$

Potom hybnosti z pohledu čárkované soustavy \mathcal{S}' lze vyjádřit pomocí vztahů (19.19) a (19.20) následujícím způsobem:

$$\begin{aligned} \frac{m_{0i}v'_i}{\sqrt{1 - \frac{v_i'^2}{c^2}}} &= \frac{m_{0i}(v_i - V)c^2}{(c^2 - v_i V)\sqrt{1 - \left[\frac{(v_i - V)c}{c^2 - v_i V}\right]^2}} = \frac{m_{0i}(v_i - V)c^2}{\sqrt{(c^2 - v_i V)^2 - (v_i - V)^2 c^2}} = \\ &= \frac{m_{0i}(v_i - V)}{\sqrt{\left(\frac{c^2 - v_i V}{c^2}\right)^2 - \left(\frac{v_i - V}{c}\right)^2}} = \frac{m_{0i}(v_i - V)}{\sqrt{\left(1 - \frac{v_i V}{c^2}\right)^2 - \left(\frac{v_i - V}{c}\right)^2}} = \\ &= \frac{m_{0i}(v_i - V)}{\sqrt{1 + \frac{v_i^2 V^2}{c^2} - \frac{2v_i V}{c^2} - \frac{v_i^2}{c^2} - \frac{V^2}{c^2} + \frac{2v_i V}{c^2}}} = \frac{m_{0i}(v_i - V)}{\sqrt{1 + \frac{v_i^2 V^2}{c^2} - \frac{v_i^2}{c^2} - \frac{V^2}{c^2}}} = \\ &= \frac{m_{0i}(v_i - V)}{\sqrt{1 - \frac{v_i^2}{c^2}}\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{m_{0i}v_i}{\sqrt{1 - \frac{v_i^2}{c^2}}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} - \frac{m_{0i}}{\sqrt{1 - \frac{v_i^2}{c^2}}} \frac{V}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} , \quad i = 1, 2, 3, 4 . \end{aligned} \quad (19.21)$$

Dosadíme tento výsledek do rovnice (19.18), čímž dostáváme:

$$\begin{aligned} &\frac{m_{01}v_1}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} - \frac{m_{01}}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}} \frac{V}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} + \frac{m_{02}v_2}{\sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} - \frac{m_{02}}{\sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}}} \frac{V}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \\ &\frac{m_{03}v_3}{\sqrt{1 - \frac{v_3^2}{c^2}}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} - \frac{m_{03}}{\sqrt{1 - \frac{v_3^2}{c^2}}} \frac{V}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} + \frac{m_{04}v_4}{\sqrt{1 - \frac{v_4^2}{c^2}}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} - \frac{m_{04}}{\sqrt{1 - \frac{v_4^2}{c^2}}} \frac{V}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} . \end{aligned} \quad (19.22)$$

Vynásobíme rovnici (19.17) výrazem

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

a odečteme ji od rovnice (19.22), takže dospějeme k následující rovnici:

$$\begin{aligned} &-\frac{m_{01}}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}} \frac{V}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} - \frac{m_{02}}{\sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}}} \frac{V}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \\ &-\frac{m_{03}}{\sqrt{1 - \frac{v_3^2}{c^2}}} \frac{V}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} - \frac{m_{04}}{\sqrt{1 - \frac{v_4^2}{c^2}}} \frac{V}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} , \end{aligned} \quad (19.23)$$

kterou následně upravíme do tvaru:

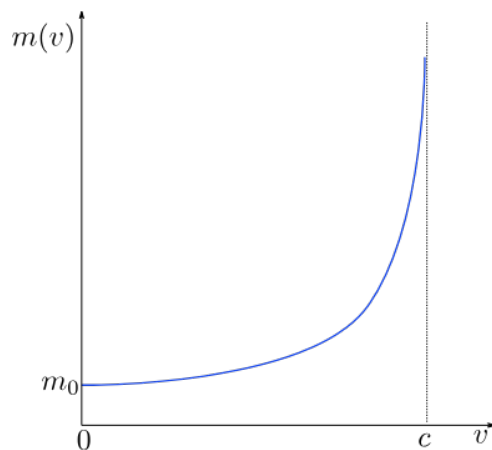
$$\frac{m_{01}}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}} + \frac{m_{02}}{\sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}}} = \frac{m_{03}}{\sqrt{1 - \frac{v_3^2}{c^2}}} + \frac{m_{04}}{\sqrt{1 - \frac{v_4^2}{c^2}}} . \quad (19.24)$$

Tato rovnice představuje zachování hmotnosti. Tímto jsme také dospěli k hledané funkční závislosti hmotnosti tělesa na jeho rychlosti:

$$m = m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma m_0 . \quad (19.25)$$

Takto zavedenou hmotnost nazýváme **relativistická hmotnost**.

Ze vztahu pro relativistickou hmotnost je zřejmé, že s rostoucí rychlostí pohybu objektu o klidové hmotnosti m_0 roste i jeho hmotnost, viz obr. 19.2. Je rovněž patrné, že pro $v \rightarrow c$ roste relativistická hmotnost nadevše meze.



Obrázek 19.2: Závislost relativistické hmotnosti objektu na jeho rychlosti.

Poznamenejme, že pro $v_i \ll c^2$ přechází rovnice (19.24) v rovnici (19.8), která platí z pohledu klasické mechaniky.

Relativistickou hybnost pak můžeme vyjádřit jako:

$$\mathbf{p} = m(v)\mathbf{v} = \gamma m_0 \mathbf{v} . \quad (19.26)$$

Uplatnění zachování hmotnosti při uvažovaných srážkách (19.25) v rovnosti (19.22) vede na rovnici (19.17), to znamená, že Zákon zachování hybnosti je nezávislý na volbě vztažné inerciální soustavy.

19.2 Relativistická energie a ekvivalence hmotnosti a energie

Nic nám nebrání v tom, abychom definovali sílu působící na uvažovaný objekt jako časovou derivaci relativistické hybnosti, tj.

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d(m(v)\mathbf{v})}{dt} = \frac{dm(v)}{dt}\mathbf{v} + m(v)\frac{d\mathbf{v}}{dt} . \quad (19.27)$$

Poznamenejme, že síla ve STR není již obecně přímo úměrná zrychlení $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$, tak jak to známe z klasické mechaniky, tj. $\mathbf{F} = m_0\mathbf{a}$.

Objekt reprezentovaný hmotným bodem se pohybuje rychlostí \mathbf{v} po dané trajektorii (křivce), ke které je tato rychlost vždy tečná, tedy $\mathbf{v} = v\boldsymbol{\tau}$, kde $\boldsymbol{\tau}$ je jednotkový tečný vektor k této trajektorii v daném místě.

Nejdříve si vyjádříme časovou derivaci relativistické hmotnosti:

$$\frac{dm(v)}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = \frac{m_0}{(1 - \frac{v^2}{c^2})^{\frac{3}{2}}} \frac{v}{c^2} \frac{dv}{dt} = \frac{m(v)}{c^2} \frac{v}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \frac{dv}{dt} . \quad (19.28)$$

Dále na základě vztahu (6.108) můžeme psát, že

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dv}{dt} \boldsymbol{\tau} + \frac{v^2}{R} \boldsymbol{\nu} , \quad (19.29)$$

kde R je poloměr křivosti trajektorie v daném místě a $\boldsymbol{\nu}$ je odpovídající jednotkový normálový vektor ($\boldsymbol{\nu} \perp \boldsymbol{\tau}$).

Výsledné vztahy (19.28) a (19.29) dosadíme do výrazu pro sílu (19.27):

$$\mathbf{F} = m(v) \left(\frac{1}{c^2} \frac{v}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \frac{dv}{dt} + \frac{dv}{dt} \right) \boldsymbol{\tau} + m(v) \frac{v^2}{R} \boldsymbol{\nu} = \frac{m(v)}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \frac{dv}{dt} \boldsymbol{\tau} + m(v) \frac{v^2}{R} \boldsymbol{\nu} . \quad (19.30)$$

Nyní si můžeme vyjádřit relativistickou kinetickou energii jako práci, kterou vykoná síla po uvažované trajektorii. Pro infinitezimální posunutí HB po trajektorii $d\mathbf{r} = \mathbf{v}dt = v\boldsymbol{\tau}dt$ dostáváme:

$$dE_k = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = v \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\tau} dt = v \left(\frac{m(v)}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \frac{dv}{dt} \boldsymbol{\tau} + m(v) \frac{v^2}{R} \boldsymbol{\nu} \right) \cdot \boldsymbol{\tau} dt = \quad \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\nu} = 0 \text{ a } \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\tau} = 1$$

$$\frac{m(v)}{1 - \frac{v^2}{c^2}} v \frac{dv}{dt} dt = \frac{m_0}{(1 - \frac{v^2}{c^2})^{\frac{3}{2}}} v dv . \quad (19.31)$$

Potom

$$E_k = \int_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^v \frac{m_0}{(1 - \frac{v^2}{c^2})^{\frac{3}{2}}} v dv . \quad (19.32)$$

K vyřešení integrálu použijeme substituci:

$$\xi = 1 - \frac{v^2}{c^2} \quad \Rightarrow \quad d\xi = -\frac{2}{c^2} v dv ,$$

s jejíž pomocí převedeme integrál do tvaru:

$$E_k = -\frac{m_0 c^2}{2} \int_1^{1 - \frac{v^2}{c^2}} \frac{d\xi}{\xi^{\frac{3}{2}}} = m_0 c^2 \left[\frac{1}{\sqrt{\xi}} \right]_1^{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - m_0 c^2 . \quad (19.33)$$

Tedy pro relativistickou kinetickou energii můžeme psát:

$$E_k = m(v)c^2 - m_0 c^2 . \quad (19.34)$$

Oba členy na pravé straně tohoto vztahu musí reprezentovat energii. První člen na pravé straně

$$E = E(v) = m(v)c^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (19.35)$$

představuje celkovou energii tělesa a druhý člen

$$E_0 = E(v = 0) = m_0c^2 \quad (19.36)$$

reprezentuje klidovou energii tělesa.

Tedy platí, že

$$E = E_k + E_0 . \quad (19.37)$$

Proto ji nazýváme celkovou energií.

Poznamenejme, že pro $v \ll c$ je možné pro kinetickou energii (19.33) uplatnit binomický rozvoj pro druhou odmocninu s použitím jeho prvních dvou členů, čímž dostaneme:

$$E_k \simeq m_0c^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \right) - m_0c^2 = \frac{1}{2} m_0v^2 , \quad (19.38)$$

což představuje kinetickou energii zavedenou v klasické mechanice.

Rovnice (19.35) představuje ekvivalenci mezi hmotností a energií.

Nyní si vyjádříme celkovou energii (19.35) pomocí velikosti relativistické hybnosti, pro kterou na základě vztahu (19.16) můžeme psát:

$$p = \frac{m_0v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} . \quad (19.39)$$

Z tohoto vztahu si můžeme vyjádřit velikost rychlosti pomocí velikosti hybnosti:

$$v = \frac{pc}{\sqrt{p^2 + m_0^2c^2}} . \quad (19.40)$$

Pro celkovou energii (19.35) na základě porovnání se vztahem pro velikost hybnosti (19.39) dostáváme:

$$E = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{pc^2}{v} . \quad (19.41)$$

Za velikost rychlosti dosadíme ze vztahu (19.40):

$$E = \frac{pc^2}{\frac{pc}{\sqrt{p^2 + m_0^2c^2}}} = c\sqrt{p^2 + m_0^2c^2} = \sqrt{p^2c^2 + m_0^2c^4} . \quad (19.42)$$

Tedy jsme obdrželi další užitečný vztah pro celkovou energii:

$$E = \sqrt{p^2c^2 + m_0^2c^4} . \quad (19.43)$$

19.3 Transformační vztahy pro sílu

Uvažujme dvojici inerciálních soustav \mathcal{S} a \mathcal{S}' , viz obr. 18.1. Nechť je v počátku soustavy \mathcal{S} umístěn světelný zdroj schopný vysílat signál všemi směry. Signál vyslaný v okamžiku $t = 0$, kdy počátky obou soustav splývají, urazí za dobu t vzdálenost v libovolném směru (kulová vlnoplocha):

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = ct . \quad (19.44)$$

Z Einsteinova postulátu STR vyplývá, že i v čárkované soustavě \mathcal{S}' se šíří izotropně rychlostí c . Pro vzdálenost r' musí proto platit:

$$r' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = ct' . \quad (19.45)$$

Vztahy (19.44) a (19.45) musí být invariantní vůči transformaci prostorovým i časovým souřadnic mezi oběma soustavami, tj.

$$c^2 t^2 - r^2 = c^2 t'^2 - r'^2 . \quad (19.46)$$

Dosazením Lorentzových transformačních vztahů (18.26)-(18.29) se lze snadno přesvědčit, že tato rovnost platí. Ze vztahu (19.43) můžeme psát, že

$$E^2 - p^2 c^2 = m_0^2 c^4 . \quad (19.47)$$

Pro soustavu \mathcal{S}' musíme získat stejný výsledek, protože $m_0^2 c^4$ je pro všechny inerciální soustavy stejný, tj.

$$E'^2 - p'^2 c^2 = m_0^2 c^4 . \quad (19.48)$$

Takže můžeme tvrdit, že vztah (19.47) je relativisticky invariantní a musí platit:

$$\frac{E^2}{c^2} - p^2 = \frac{E'^2}{c^2} - p'^2 . \quad (19.49)$$

Porovnáme-li rovnici (19.49) s obdobnou rovnicí (19.46), tak vidíme, že pro složky vektoru \mathbf{p} a energii E musí platit rovněž Lorentzova transformace jako pro složky vektoru \mathbf{r} a času t . Přiřadíme-li $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{p}$, $\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{p}'$, $t \rightarrow E/c^2$, $t' \rightarrow E'/c^2$ a analogicky s obecnou Lorentzovu transformací (18.39) a (18.40) vyjádříme Lorentzovu transformaci pro hybnost a energii jako

$$\mathbf{p}' = \mathbf{p} + \mathbf{v} \left[\frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{v}}{v^2} (\gamma - 1) - \gamma \frac{E}{c^2} \right] , \quad (19.50)$$

$$E' = \gamma (E - \mathbf{p} \cdot \mathbf{v}) . \quad (19.51)$$

Uvážíme-li, že

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} , \mathbf{F}' = \frac{d\mathbf{p}'}{dt'} , \mathbf{u} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} , \frac{dE}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{u} \quad (19.52)$$

a při použití vztahu (18.92)

$$\frac{d}{dt'} = \frac{dt}{dt'} \frac{d}{dt} = \frac{1}{\gamma (1 - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{c^2})} \frac{d}{dt} , \quad (19.53)$$

potom pomocí Lorentzovy transformace hybnosti (19.50) dostaneme (je nutné si uvědomit, že $\mathbf{v} = \text{konst.}$):

$$\mathbf{F}' = \frac{d\mathbf{p}'}{dt'} = \frac{1}{\gamma \left(1 - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{c^2}\right)} \frac{d\mathbf{p}'}{dt} = \frac{\frac{d\mathbf{p}}{dt} + \mathbf{v} \left[\frac{\frac{d\mathbf{p}}{dt} \cdot \mathbf{v}}{v^2} (\gamma - 1) - \gamma \frac{\frac{dE}{dt}}{c^2} \right]}{\gamma \left(1 - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{c^2}\right)} = \frac{\mathbf{F} + \mathbf{v} \left[\frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}}{v^2} (\gamma - 1) - \gamma \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}}{c^2} \right]}{\gamma \left(1 - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{c^2}\right)}. \quad (19.54)$$

Tedy transformační vztah pro sílu mezi inerciálními soustavami \mathcal{S}' a \mathcal{S} je:

$$\mathbf{F}' = \frac{\mathbf{F} + \mathbf{v} \left[\frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}}{v^2} (\gamma - 1) - \gamma \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}}{c^2} \right]}{\gamma \left(1 - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{c^2}\right)}. \quad (19.55)$$

19.4 Shrnutí získaných poznatků ze speciální teorie relativity

Speciální teorie relativity vychází ze dvou postulátů, jejichž splnění není možné zajistit Galileiho transformací, a proto tato transformace musí být nahrazena transformací jinou, kterou nazýváme Lorentzova transformace. Pomocí této transformace je možné dospět, z pohledu klasické mechaniky, k překvapivým závěrům. Z výsledků, ke kterým jsme dospěli v předchozích kapitolách, vyplývá, že speciální teorie relativity významně mění naše chápání prostoru a času. Z nalezených vztahů je možné vysledovat skutečnost, že při rychlostech srovnatelných s rychlostí světla je nutné vzít v úvahu, že prostor a čas nejsou nezávislé pojmy. Z těchto vztahů jednoznačně vyplývá, že při rychlostech srovnatelných s rychlostí světla tedy není možné chápat prostor a čas nezávisle na pohybu vyšetřovaných objektů a vztažných soustav, takže absolutní prostor a čas, jak je zaveden v klasické mechanice, je již neobhajitelný. Speciální teorie relativity nemění jen naše pojmání prostoru a času, ale i hmoty a energie, jelikož existuje těsná souvislost mezi hmotností tělesa a jeho energií. Závěrem je nutné konstatovat, že speciální teorie relativity je plně slučitelná s teorií elektromagnetického pole.

Část III

Elektřina a magnetismus

Kapitola 20

Elektrostatika

Všechny děje, se kterými se můžeme setkat, lze úspěšně vysvětlit působením pouze čtyř druhů interakcí (sil). Jsou to:

1. Gravitační interakce,
2. Elektromagnetická interakce,
3. Slabá interakce,
4. Silná interakce.

Poslední dvě z uvedených interakcí nejsou předmětem kurzu Fyzika 1. **Gravitační interakcí (silou)**, z pohledu klasické fyziky, jsme se zabývali v kapitole 12. Tato síla se projevuje univerzálně mezi všemi typy hmotných objektů, tedy i mezi všemi elementárními částicemi. V relativistické nekvantové fyzice je gravitace popsána Einsteinovou obecnou teorií relativity založenou na představě zakřiveného prostoročasu. Dosah gravitačních sil je neomezený. Gravitační síla je nejslabší známou silou. V mikrosvětě (mikroskopickém měřítku) je projev gravitační síly natolik malý, že ji při popisu chování elementárních částic zpravidla zanedbáváme. V megasvětě, tj. v měřítkách srovnatelných s rozměry kosmických objektů, naopak gravitační síla dominuje. Důvodem této skutečnosti je velká hmotnost kosmických objektů, která není kompenzována, jelikož neexistuje „záporná hmotnost“, která by byla projevem antigravitace.

V rámci této partie fyziky se budeme zabývat **elektromagnetickou interakcí (silou)**. Obdobně jako gravitační síla je tato síla neomezeného dosahu, avšak na rozdíl od gravitační síly se neuplatňuje v megasvětě, protože dochází ke kompenzaci jejího silového působení z důvodu existence kladných a záporných nábojů. Elektromagnetická síla má největší škálu projevů, např. zajišťuje soudržnost atomů, chemické vazby, síly tření, magnetické síly, kapilaritu apod.

20.1 Elektrický náboj

Elektromagnetická interakce se projevuje pouze mezi některými částicemi, o kterých pak říkáme, že jsou elektricky nabité, či že nesou **elektrický náboj**. Podstatu elektrického náboje neznáme, avšak pomocí experimentů můžeme zjišťovat jeho vlastnosti, které můžeme shrnout do následujících šesti bodů:

1. *Náboj neexistuje jako samostatná substance*, tj. je vždy vázán na příslušnou částici, čímž charakterizuje její schopnost podstoupit elektromagnetickou interakci.
2. *Rozlišujeme dva druhy nábojů*, kladný a záporný náboj, přičemž náboje stejného znamení se odpuzují a náboje rozdílného znamení se přitahují. Jinak řečeno, mezi danými částicemi můžeme pozorovat elektromagnetickou sílu, která je v některých případech přitažlivá a v jiných případech odpuzivá, což rozlišujeme zavedením elektrických nábojů kladného a záporného znamení.
3. *Platí zákon zachování náboje*, elektrický náboj je nestvořitelný a nezničitelný. Při reakcích je celkový náboj před reakcí roven celkovému náboji po reakci.
4. *Elektrický náboj se nemění při pohybu částice (je invariantní vůči pohybu)*, se kterou je spjat. Jinými slovy, velikost náboje je stejná ve všech vztažných soustavách.
5. *Náboj je kvantován*. Existuje nejmenší možný náboj, který nazýváme **elementární náboj** a všechny náboje jsou jeho celistvými násobky¹. Elementární náboj budeme značit e . Hodnota náboje protonu je $+e$, kdežto hodnota náboje elektronu je $-e$. Elektrický náboj budeme značit Q nebo q .

Jednotkou elektrického náboje je **coulomb** a značíme ho **C**. Přibližná hodnota elementárního náboje je

$$e \simeq 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}.$$

V teorii elektrického pole zpravidla nemluvíme o částicích nesoucích elektrický náboj, ale jen o nábojích, s tím, že si uvědomujeme skutečnost, že náboj nemůže existovat jako samostatná substance, jak již bylo uvedeno výše. Vzhledem k tomu, že hodnota elementárního náboje je velmi malá, tak budeme z praktických důvodů ignorovat zmíněnou kvantizaci elektrického náboje.

Tak jako jsme v mechanice zavedli hmotný bod, tak v teorii elektromagnetického pole zavádíme **bodový náboj**, což je pro nás náboj (částice nesoucí elektrický náboj) konečné velikosti, ale nekonečně malých rozměrů. Nabité částice či tělesa, jejichž vlastní rozměry jsou zanedbatelné vzhledem ke vzdálenostem mezi vyšetřovanými částicemi či tělesy, můžeme ve fyzikálních modelech považovat za bodové náboje.

20.2 Coulombův zákon a elektrické pole

Základním problémem, se kterým se musíme v rámci elektromagnetické teorie vypořádat, je určení velikosti síly, jakou působí soustava nábojů q_1, q_2, \dots, q_N na náboj Q . Náboje označené symbolem q budeme nazývat **zdrojovými náboji**

¹Kvarkový model hadronů, což jsou částice podléhající silné interakci, pracuje s **kvarky**. Kvarky jsou částice, které mají třetinové elementární náboje. Avšak za běžných podmínek nelze hadrony rozštěpit na jednotlivé kvarky, takže elementární náboj lze oprávněně považovat za základní kvantum elektrického náboje.

a náboj označený Q budeme nazývat **testovacím nábojem**. Obecně se může poloha zdrojových nábojů s časem měnit, přičemž čas představuje parametr, kterým je možné jejich polohu jednoznačně určit. Může-li se testovací náboj pohybovat, potom řešením příslušné pohybové rovnice získáme i rovnici dráhy, po které se testovací náboj pohyboval. Abychom si úlohu zjednodušili, tak přijmeme předpoklad, že zdrojové náboje se nepohybují, neboli jsou statické², přičemž testovací náboj se pohybovat může. Tímto zjednodušením jsme se omezili na oblast problémů, které řeší partie zvaná **elektrostatika**.

Budou-li v pozorovací soustavě oba náboje v pohybu, musíme provést relativistickou transformaci silového působení mezi náboji a dostaneme pole dynamické. Tímto se změní elektrostatické pole zdrojového náboje na pole elektromagnetické a síla mezi náboji na sílu Lorentzovu (ke Coulombově síle přistoupí síla magnetická). Výklad těchto jevů bude předmětem **elektrodynamiky**.

Coulombův zákon nám poskytuje odpověď na otázku, jakou silou působí zdrojový bodový náboj q , který je statický, na testovací bodový náboj Q , přičemž předpokládáme, že náboje se nachází v bezmateriálovém prostředí neboli vakuu. Coulombův zákon lze formulovat následujícím způsobem:

Coulombův zákon

Dva bodové náboje na sebe působí silou, jejíž velikost je přímo úměrná součinu velikostí jejich nábojů a nepřímo úměrná kvadrátu jejich vzdálenosti.

Matematické vyjádření tohoto zákona má následující tvar:

$$\mathbf{F}_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r^3} \mathbf{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r^2} \mathbf{r}^0, \quad (20.1)$$

kde $\mathbf{r}^0 = \mathbf{r}/r$ je jednotkový vektor k polohovému vektoru \mathbf{r} , který určuje polohu testovacího bodového náboje, ϵ_0 je tzv. **elektrická konstanta** nebo také **permitivita vakua**, kterou můžeme číselně vyjádřit jako

$$\epsilon_0 = \frac{10^7}{4\pi c_0^2} \approx \frac{10^{-9}}{36\pi} \approx 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2\text{N}^{-1}\text{m}^{-2}, \quad (20.2)$$

kde c_0 je rychlosti světla ve vakuu v soustavě SI.

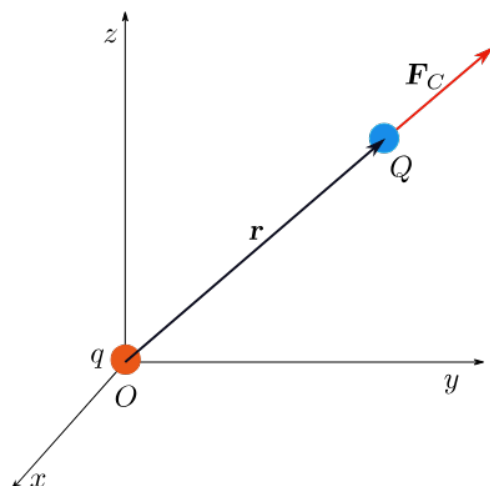
Při matematickém vyjádření Coulombova zákona (20.1) se předpokládalo, že zdrojový bodový náboj se nachází v počátku zvolené soustavy souřadnic, viz obr. 20.1.

Coulombův zákon nám říká, že *velikost síly, kterou na sebe dva bodové náboje působí, je přímo úměrná součinu jejich velikostí a nepřímo úměrná kvadrátu vzdálenosti mezi nimi*. Vzhledem k tomu, že popisujeme silové působení mezi dvěma náboji v bezmateriálovém prostředí (vakuu) a prostor je izotropní, tak i Coulombova síla (elektrická síla) je silou izotropní neboli centrální. Díky této skutečnosti můžeme Coulombovu sílu považovat za sílu **konzervativní**.

Nebude-li se zdrojový bodový náboj nacházet v počátku souřadnic a jeho poloha bude určena polohovým vektorem \mathbf{r}' , viz obr. 20.2, potom je možné Coulombův zákon vyjádřit jako

$$\mathbf{F}_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{R^3} \mathbf{R}, \quad (20.3)$$

²Skutečný nositel elektrického náboje není nikdy statický.



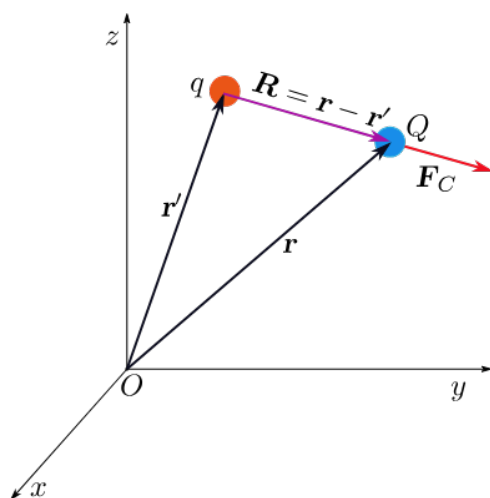
Obrázek 20.1: Geometrické uspořádání ke vztahu(20.1).

kde \mathbf{r} je polohový vektor testovacího bodového náboje Q , \mathbf{r}' je polohový vektor zdrojového bodového náboje q , $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}' = (x - x', y - y', z - z')$ a $R = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$.

V případě, že $R \rightarrow 0$, je pole popisované vztahem (20.3) singulární, tj. roste nade vše meze. Při popisu jevů spojených s interakcí mezi bodovými náboji, které se k sobě přibližují na velmi malé vzdálenosti, je potřeba použít kvantové teorie, což překračuje rámec tohoto studijního textu. Z tohoto důvodu se omezíme na dostatečně velké vzdálenosti mezi náboji, abychom při popisu této silové interakce a souvisejících fyzikálních jevů vystačili jen s teorií prezentovanou v tomto studijním textu.

V další části textu se budeme držet úmluvy, že zdrojovým bodovým nábojům odpovídají **čárkované** souřadnice ($\mathbf{r}' = (x', y', z')$), kdežto testovacímu bodovému náboji budou odpovídat souřadnice **nečárkované** ($\mathbf{r} = (x, y, z)$).

Porovnáme-li matematické vyjádření Coulombova zákona (20.3) s matematickým



Obrázek 20.2: Geometrické uspořádání ke vztahu(20.3).

vyjádřením gravitačního zákona (12.2), tak vidíme, že kromě konstanty úměrnosti,

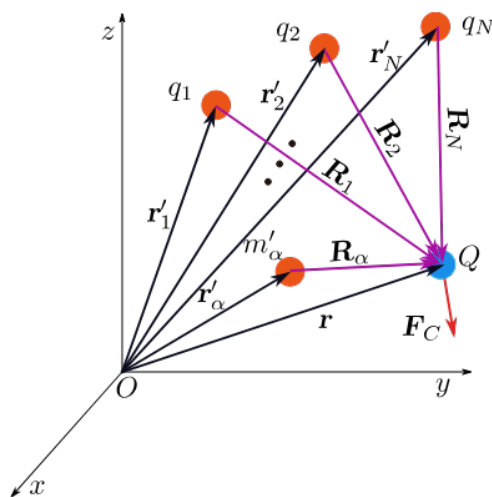
se liší jen v tom, že elektrické náboje mohou nabývat jak kladných, tak záporných hodnot, takže Coulombova síla může být jak silou přitažlivou, tak silou odpuzivou, kdežto gravitační síla je jen silou přitažlivou. Avšak po formální stránce jsou výrazy (20.3) a (12.2) zaměnitelné. Nahradíme-li ve vztahu (20.3) zdrojový bodový náboj q zdrojovým hmotným bodem m' , testovací bodový náboj Q testovacím hmotným bodem m a konstantu úměrnosti $1/(4\pi\epsilon_0)$ záporně vzatou gravitační konstantou $-\kappa$, potom dostaneme vztah shodný se vztahem (12.2). Díky této formální podobnosti vztahů (20.3) a (12.2) je možné při popisu elektrostatického pole v bezmateriálovém prostředí (vakuu), použít formálně stejného postupu, jakého bylo použito pro pole gravitační v kapitole 12.

Jelikož pro Coulombův zákon platí **princip superpozice**, tj. výslednou elektrickou sílu působící na bodový náboj Q , která je výsledkem elektrického působení více bodových nábojů (označme jejich počet N), můžeme jednoduše určit jako vektorový součet jednotlivých elektrických sil. Stručněji můžeme říct, že síla působící mezi dvěma bodovými náboji není ovlivněna přítomností dalších bodových nábojů³. Nechť na testovací bodový náboj Q působí elektrickou silou soustava zdrojových bodových nábojů q_1, q_2, \dots, q_N , potom výslednou elektrickou sílu můžeme vyjádřit jako (viz obrázek 20.3)

$$\mathbf{F}_C = \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{F}_{C\alpha} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q \sum_{\alpha=1}^N \frac{q_\alpha (\mathbf{r} - \mathbf{r}'_\alpha)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_\alpha|^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q \sum_{\alpha=1}^N \frac{q_\alpha}{R_\alpha^3} \mathbf{R}_\alpha, \quad (20.4)$$

kde \mathbf{r}'_α je polohový vektor α -tého zdrojového bodového náboje a \mathbf{r} je polohový vektor testovacího bodového náboje Q .

Uvažujme objem V' obsahující celkový elektrický náboj q , ve kterém je tento

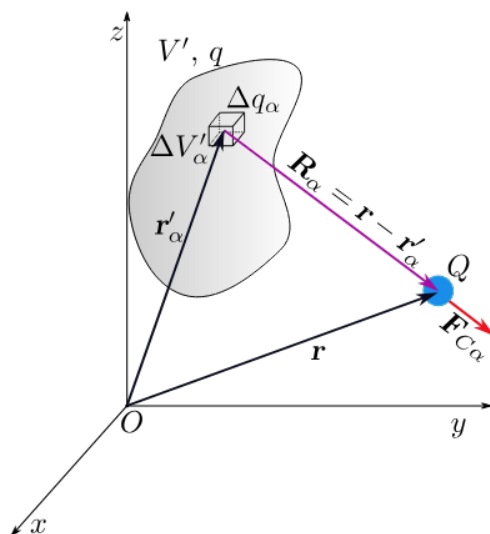


Obrázek 20.3: Geometrické uspořádání ke vztahu(20.4).

náboj rozložen spojitě. Uvažovaný objem rozdělíme na dostatečně malé objemy $\Delta V'_\alpha$, jejichž náboj označíme Δq_α , viz obrázek 20.4.

V infinitezimálním případě (objem se stahuje v bod), tj.

³Je-li mezi uvažovanými náboji látka, a ne vakuum, pak obecně princip superpozice pro Coulombův zákon neplatí.



Obrázek 20.4: Geometrické uspořádání ke vztahu(20.6).

$$dV' = dx'dy'dz' = \Delta V'_\alpha \rightarrow 0, \quad (20.5)$$

můžeme pohlížet na vybraný element objemu jako na bodový náboj, takže na základě analogie s případem pro soustavu zdrojových bodových nábojů (20.4) můžeme psát:

$$\mathbf{F}_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q \lim_{\substack{\Delta V'_\alpha \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}} \sum_{\alpha=1}^N \frac{\Delta q_\alpha (\mathbf{r} - \mathbf{r}'_\alpha)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_\alpha|^3}. \quad (20.6)$$

Jelikož platí, že

$$\rho(\mathbf{r}') = \lim_{\Delta V'_\alpha \rightarrow 0} \frac{\Delta q_\alpha}{\Delta V'_\alpha}, \quad (20.7)$$

kde je ρ je **objemová hustota náboje** v místě o polohovém vektoru \mathbf{r}' , potom je možné upravit výraz (20.6), s uvážením vztahů (20.5) a (20.7), do následujícího tvaru:

$$\mathbf{F}_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q \lim_{\substack{\Delta V'_\alpha \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}} \sum_{\alpha=1}^N \frac{\Delta q_\alpha (\mathbf{r} - \mathbf{r}'_\alpha)}{\Delta V'_\alpha |\mathbf{r} - \mathbf{r}'_\alpha|^3} \Delta V'_\alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q \iiint_{V'} \frac{\rho(\mathbf{r}') (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV', \quad (20.8)$$

kde $\rho(\mathbf{r}')$ představuje funkci objemové hustoty, pomocí které můžeme určit celkový náboj obsažený v objemu V' , jako

$$q = \iiint_{V'} \rho(\mathbf{r}') dV'. \quad (20.9)$$

Vzhledem k tomu, že výsledný vztah (20.8) je velmi důležitý, napíšeme ho ještě jednou, ale bez mezičlenu:

$$\mathbf{F}_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q \iiint_{V'} \frac{\rho(\mathbf{r}') (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV'. \quad (20.10)$$

Výraz (20.10) nám vyjadřuje výslednou elektrickou sílu působící na testovací bodový náboj, jež je dána součtem všech elektrických sil od zdrojových elementů

náboje $dq = \rho(\mathbf{r}')dV'$.

Je nutné si uvědomit, že integrace ve výrazu (20.10) probíhá **jen přes čárkované souřadnice** x', y', z' .

Jelikož platí, že $dq = \rho(\mathbf{r}')dV'$, je možné integrál (20.10) přepsat do následujícího tvaru:

$$\mathbf{F}_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q \int_q \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dq. \quad (20.11)$$

Vztahy (20.10) a (20.11) vyjadřují Coulombův zákon pro spojitě rozložený elektrický náboj, který je zdrojem elektrického pole. Vztah (20.11) platí obecně, tj. můžeme ho použít i pro případy dvojrozměrné a jednorozměrné distribuce zdrojového náboje. Vztah (20.11) se dobře hodí pro nejrůznější fyzikální úvahy, avšak pro výpočty se zpravidla nehodí, na rozdíl od vztahu (20.10).

V případě dvojrozměrné (plošné) distribuce elektrického zdrojového náboje platí, že $dq = \sigma(\mathbf{r}')dS'$, čímž můžeme upravit vztah (20.11) do následujícího tvaru:

$$\mathbf{F}_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q \iint_{S'} \frac{\sigma(\mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dS', \quad (20.12)$$

kde $\sigma(\mathbf{r}')$ je plošná hustota zdrojového náboje.

Analogicky pro jednorozměrnou (lineární) distribuci zdrojového elektrického náboje, $dq = \tau(\mathbf{r}')dl'$, úpravou vztahu (20.11) dostáváme:

$$\mathbf{F}_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q \int_{l'} \frac{\tau(\mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dl', \quad (20.13)$$

kde $\tau(\mathbf{r}')$ je lineární hustota zdrojového náboje.

Jelikož elektrická síla je silou konzervativní, tak pro ni platí, že

$$\mathbf{F}_C = -\nabla W_p, \quad (20.14)$$

kde W_p je **potenciální energie** testovacího bodového náboje.

20.3 Intenzita elektrického pole a elektrický potenciál

Z Coulombova zákona vyplývá, že na sebe budou silově působit bodové náboje, i když budou od sebe velmi vzdálené. Pro popis **silového působení na dálku**, podobně jako v případě gravitačních sil, viz kap. 12, si zavedeme fyzikální pole, které nazveme **elektromagnetické pole**. V pozorovací soustavě, v níž jsou zdrojové náboje v klidu, označujeme toto pole jako **elektrostatické** či **elektrické**. V okolí každého elektrického náboje existuje tedy pole, o němž se můžeme jednoduše přesvědčit tím, že do uvažovaného místa umístíme jiný, tj. testovací náboj. Na testovací náboj bude působit elektrická síla a tedy v místě testovacího náboje existuje elektrické pole. Pomocí elektrického pole vytvořeného elektrickými náboji zajistíme, že bodový náboj „pocítí“ silové působení díky lokálnímu vlivu, čímž zbavíme silové působení na dálku nálepky něčeho zvláštního či tajemného. Elektrické pole lze popsat buď silově nebo energeticky. Silový popis vede k veličině

intenzita elektrického pole a energetický popis vede k veličině potenciál elektrického pole.

Předpokládejme soustavu bodových zdrojových nábojů, které vytváří elektrické pole. Do bodu o polohovém vektoru \mathbf{r} , pak umístíme kladný bodový testovací náboj Q a změříme sílu, která na něj bude působit. Elektrickou intenzitu pole pak definujeme jako sílu působící na kladný jednotkový náboj. Protože testovací náboj sám vytváří elektrické pole, a tedy narušuje původní elektrické pole, musí být velikost testovacího náboje co nejmenší, abychom minimalizovali toto narušení. Z tohoto důvodu popíšeme tento proces limitním případem, čímž pro intenzitu elektrického pole dostáváme:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \lim_{Q \rightarrow 0} \frac{\text{celková síla působící na test. bodový náboj } Q \text{ v bodě } \mathbf{r}}{Q} . \quad (20.15)$$

Tímto jsme zavedli veličinu intenzita elektrického pole $\mathbf{E}(\mathbf{r})$, s jejíž pomocí zavádíme vektorové pole, které nazýváme elektrické pole.

Vložíme-li testovací bodový náboj Q do elektrického pole v místě o polohovém vektoru \mathbf{r} , tak na něj bude působit následující elektrická síla

$$\mathbf{F}_C(\mathbf{r}) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) Q . \quad (20.16)$$

Odtud můžeme psát:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}_C}{Q} . \quad (20.17)$$

Podělením vztahu (20.14) velikostí testovacího bodového náboje dostaneme s pomocí vztahu (20.17) následující výraz pro intenzitu elektrického pole

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi , \quad (20.18)$$

kde

$$\varphi = \frac{W_p}{Q} \quad (20.19)$$

je potenciál elektrického pole. Plochu, jejíž všechny body mají stejný elektrický potenciál:

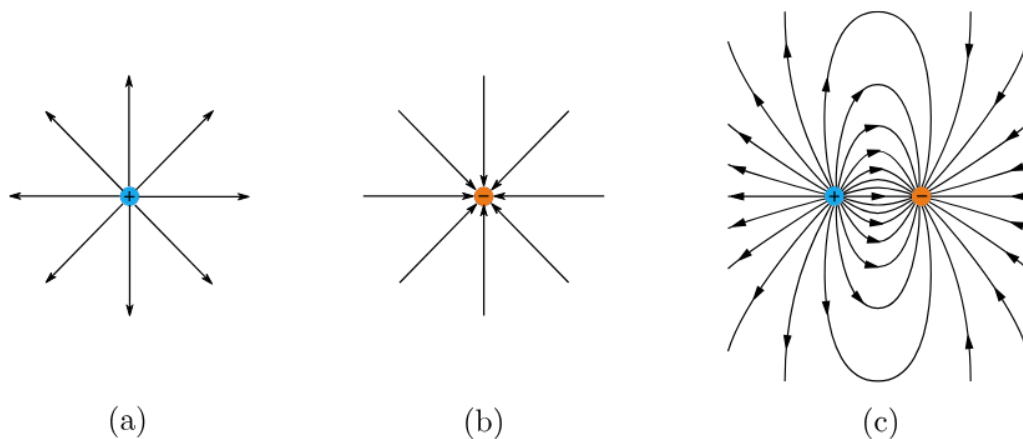
$$\varphi(\mathbf{r}) = \text{konst.} , \quad (20.20)$$

nazýváme ekvipotenciální plochou.

Pro intenzitu elektrického pole pak na základě vztahu (20.10) dostáváme:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{F}_C}{Q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_q \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dq = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_q \frac{\mathbf{R}}{R^3} dq . \quad (20.21)$$

Elektrické pole $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r})$ si můžeme názorně zobrazit pomocí vektorových čar (viz kapitola 3), které se pro případ tohoto pole nazývají siločáry. Podle přijaté konvence siločáry z kladného náboje vystupují a do záporného náboje vstupují, viz obr. 20.5. Protože platí zákon zachování náboje a velikost náboje se nemění ani za pohybu, můžeme postulovat, že celkový počet siločár vycházejících z elektrického náboje se zachovává a nemění se ani při pohybu náboje. Pro pohybující se náboje nebude ovšem už platit Coulombův zákon a siločáry se budou v prostoru různě zhušťovat a zakřivovat, ale žádná se nemůže ztratit ani zaniknout. Můžeme říci,



Obrázek 20.5: Znázornění elektrického pole pomocí siločár.

že siločáry jsou jakési „vlasy“ elektrického náboje, které principiálně nemohou vypadávat.

Totální diferenciál (přírůstek) potenciálu můžeme pomocí vztahu (20.18) zapsat jako

$$d\varphi = (\nabla\varphi) \cdot d\mathbf{r} = -\mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} . \quad (20.22)$$

Uvažujme ekvipotenciální plochu $\varphi(\mathbf{r}) = konst..$ Na této ploše si označíme bod 1, kterému přísluší polohový vektor \mathbf{r} . Přesuneme se z tohoto bodu o element polohového vektoru $d\mathbf{r}$ do blízkého bodu 2, který se nachází rovněž na ekvipotenciále⁴. Bodu 2 pak bude příslušet polohový vektor $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$. Při přesunu z bodu 1 do bodu 2 se hodnota potenciálu nezměnila, protože oba body se nachází na ekvipotenciále, tedy $d\varphi = 0$. V tomto případě, s ohledem na vztah (20.22), bude tedy platit

$$0 = -\mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} . \quad (20.23)$$

Z tohoto vztahu plyne⁵, že $\mathbf{E} \perp d\mathbf{r}$. Protože intenzita elektrického pole je tečná v daném místě k siločáře, bude i siločára kolmá k elementu $d\mathbf{r}$. Vzhledem k tomu, že se element polohového vektoru $d\mathbf{r}$ nachází na ekvipotenciální ploše, tak můžeme konstatovat, že **siločáry jsou vždy kolmé na ekvipotenciály**, viz obr. 20.6.

Nyní využijeme následující rovnosti:

$$\nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + C' \right) = -\frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} , \quad (20.24)$$

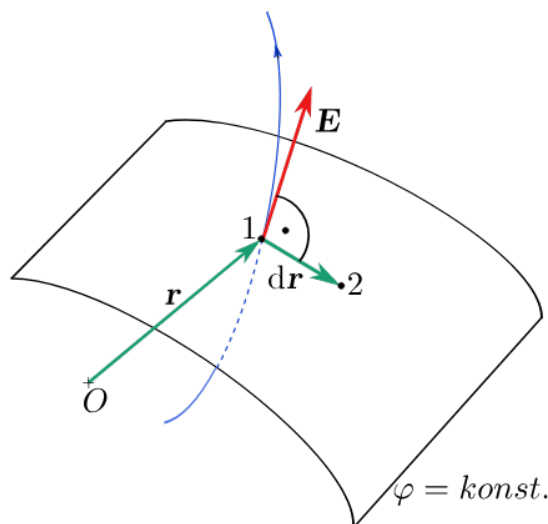
kde $C' = C'(\mathbf{r}')$ je obecně libovolnou funkcí čárkovaných souřadnic, avšak pro gradient přes nečárkované souřadnice zůstává konstantou. Dosazením do vztahu (20.21) dostaneme:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_q -\nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + C' \right) dq . \quad (20.25)$$

Protože gradient funkce $(1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| + C')$ je realizován přes nečárkované souřadnice, můžeme operátor ∇ vytknout před integrál (20.25), který představuje integraci

⁴Předpokládáme, že vektor $d\mathbf{r}$ rovněž leží na ekvipotenciále.

⁵Skalární součin dvou nenulových vektorů je nulový, když jsou tyto vektory na sebe kolmé.



Obrázek 20.6: Siločára kolmá na ekvipotenciální plochu.

jen přes souřadnice čárkované, takže

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_q \frac{dq}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + C \right), \quad (20.26)$$

kde C je konstanta určená vztahem:

$$C = \int_q C'(\mathbf{r}') dq'. \quad (20.27)$$

Díky předpokladu, že funkce $C'(\mathbf{r}')$ je libovolnou funkcí, představuje konstanta C libovolnou konstantu.

Porovnáním vztahů (20.26) a (20.18) dospějeme ke vztahu pro potenciál elektrického pole pro případ, kdy je jeho zdrojem těleso se spojitě rozloženým nábojem:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_q \frac{dq}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_q \frac{dq}{R} + C. \quad (20.28)$$

Ze vztahu (20.28) je vidět, že potenciál elektrického pole je určen až na aditivní konstantu C , kterou určíme z elektrického potenciálu v referenčním bodě.

Předpokládejme, že zdrojem elektrického pole je **lokálně distribuovaný elektrický náboj**. Chceme-li určit elektrický potenciál ve velmi vzdáleném bodě, tj. $|\mathbf{r}| \gg |\mathbf{r}'|$ neboli $r \gg r'$, potom je možné zjednodušit vztah (20.28) následujícím způsobem

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_q \frac{dq}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + C \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_q \frac{dq}{|\mathbf{r}|} + C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \int_q dq + C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} + C. \quad (20.29)$$

Poslední výraz v rovnostech (20.29) představuje potenciál od zdrojového bodového náboje o velikosti q , který je umístěn do počátku souřadnic. Použitá aproximace ve vztazích (20.29) demonstruje oprávněnost zavedení bodového náboje nahrazující nabitě těleso konečných rozměrů. Budeme-li požadovat, aby platilo, že

$$\varphi(\infty) = \lim_{r \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_q \frac{dq}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + C \right] = 0, \quad (20.30)$$

potom na základě výsledku aproximace (20.29) budou platit pro určení konstanty C následující úpravy:

$$\varphi(\infty) = \lim_{r \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_q \frac{dq}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + C \right] = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_q \frac{dq}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \lim_{r \rightarrow \infty} C =$$

$$\underbrace{\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}}_{=0} + C = C = 0. \quad (20.31)$$

Připomeňme, že k tomuto výsledku jsme dospěli za předpokladu, že elektrický náboj není neomezeně distribuován⁶. Kdyby tomu tak nebylo, byli bychom nuceni zvolit nulový potenciál v nějakém konečně vzdáleném bodě.

Pomocí tohoto výsledku je tedy možné napsat elektrický potenciál (20.28) jako

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_q \frac{dq}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_q \frac{dq}{R}. \quad (20.32)$$

Pomocí vztahu (20.32) můžeme dostat obecný výraz pro potenciální energii elektrického pole:

$$W_p(\mathbf{r}) = Q\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q \int_q \frac{dq}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q \int_q \frac{dq}{R}. \quad (20.33)$$

Využitím vztahů $dq = \rho(\mathbf{r}')dV'$, $dq = \sigma(\mathbf{r}')dS'$ a $dq = \tau(\mathbf{r}')dl'$ a výrazů (20.32) a (20.33), je možné přepsat vztahy pro elektrický potenciál a elektrickou potenciální energii do tvarů pro objemově, plošně a lineárně (jednorozměrně) rozložený elektrický náboj, který je zdrojem příslušného elektrického pole.

Tedy pro objemově rozložený náboj dostáváme:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{V'} \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{V'} \frac{\rho(\mathbf{r}')}{R} dV', \quad (20.34)$$

$$W_p(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q \iiint_{V'} \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q \iiint_{V'} \frac{\rho(\mathbf{r}')}{R} dV', \quad (20.35)$$

pro plošně rozložený náboj analogicky dospějeme ke vztahům:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{S'} \frac{\sigma(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{S'} \frac{\sigma(\mathbf{r}')}{R} dS', \quad (20.36)$$

$$W_p(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q \iint_{S'} \frac{\sigma(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q \iint_{S'} \frac{\sigma(\mathbf{r}')}{R} dS' \quad (20.37)$$

a pro jednorozměrně rozložený náboj můžeme psát, že

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{l'} \frac{\tau(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dl' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{l'} \frac{\tau(\mathbf{r}')}{R} dl', \quad (20.38)$$

⁶V případě prostorově neomezené distribuce elektrického náboje by tento integrál divergoval.

$$W_p(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q \int_{V'} \frac{\tau(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q \int_{V'} \frac{\tau(\mathbf{r}')}{R} dV' . \quad (20.39)$$

Podobným způsobem, jako v případě spojitě rozloženého náboje, který je zdrojem elektrického pole, můžeme postupovat i pro nespojitě rozložený náboj. Zaměříme se pouze na případ, který je reprezentován vztahem (20.2). Takže pro intenzitu elektrického pole, která odpovídá jednomu zdrojovému bodovému náboji dostáváme:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}_C}{Q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \mathbf{r}^0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^3} \mathbf{R} . \quad (20.40)$$

Použijeme-li vztahu (20.24) v rovnosti (20.40) dostaneme:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + C \right) , \quad (20.41)$$

přičemž integrační konstanta $C = 0$ s ohledem na zvolený nulový potenciál pro $r \rightarrow \infty$, viz vztah (20.31). Porovnáním vztahu (20.41) se vztahem (20.18) dostaneme výraz pro elektrický potenciál bodového náboje:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R} . \quad (20.42)$$

Pro potenciální energii testovacího bodové náboje v elektrickém poli zdrojového bodového náboje dostáváme:

$$W_p(\mathbf{r}) = Q\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{R} . \quad (20.43)$$

Bude-li umístěn zdrojový bodový náboj v počátku vztažné soustavy ($\mathbf{r}' = \mathbf{0}$), pak přejdou vztahy (20.40), (20.42) a (20.43) do následujícího tvaru:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{F}_C}{Q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^3} \mathbf{r} , \quad (20.44)$$

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} , \quad (20.45)$$

$$W_p(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r} . \quad (20.46)$$

20.4 Gaussův zákon a Poissonova rovnice pro elektrické pole

Díky skutečnosti, že Newtonův gravitační zákon je, až na konstantu, izomorfní s Coulombovým zákonem, tak budeme postupovat při hledání Gaussova zákona a Poissonovy rovnice pro elektrické pole analogicky jako v případě gravitačního pole. Formálně lze při odvození Gaussova zákona a Poissonovy rovnice použít záměny, veličin mezi gravitačním a elektrickým polem, viz tab. 20.1.

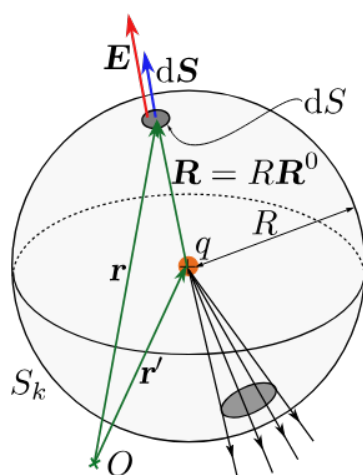
gravitační pole	elektrické (elektrostatické) pole
hmotný bod	bodový náboj
celková hmotnost	celkový náboj
m	Q
m'	q
$- \kappa$	$1/(4\pi\epsilon_0)$
\mathbf{F}_g	\mathbf{F}_C
\mathbf{K}	\mathbf{E}
hustota	hustota náboje

Tabulka 20.1: Záměny pro formální použití vztahů a některých formulací z kapitoly 12.

Gaussův zákon pro elektrické pole

Uvažujme jeden kladný⁷ zdrojový náboj q , který se nemusí nacházet v počátku souřadnicové soustavy. Již víme, že ekvipotenciální plochou je v tomto případě kulová plocha S_k o poloměru R , v jejímž středu se zdrojový náboj nachází, viz obr. 20.7. Dále víme, že elektrické silové čáry jsou kolmé k této ploše, a tedy i intenzita elektrického pole \mathbf{E} .

Orientovaný element plochy $d\mathbf{S}$ je vždy orientován **směrem ven** z uzavřené



Obrázek 20.7: Tok intenzity elektrického pole kulovou plochou S_k .

plochy a platí pro něj: $d\mathbf{S} = dS \mathbf{n}$, kde dS je velikost elementu plochy a \mathbf{n} je vnější

⁷Můžeme zvolit i zdrojový náboj záporný a dospějeme ke stejnému závěru.

jednotkový normálový vektor k uzavřené ploše (v našem případě kulová plocha). Elektrická intenzita v bodě na povrchu kulové plochy S_k na základě vztahů (20.3) a (20.17) je:

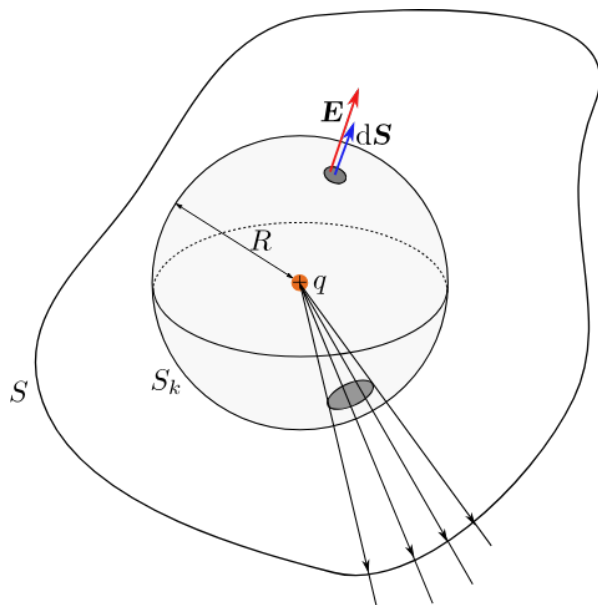
$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^2} \mathbf{R}^0. \quad (20.47)$$

Vektor intenzity elektrického pole $\mathbf{E} = E\mathbf{E}^0$ a vektor elementu plochy $d\mathbf{S}$ jsou shodně orientovány a platí, že $\mathbf{E}^0 \uparrow\uparrow \mathbf{R}^0$, tak musí platit, že $\mathbf{R}^0 \uparrow\uparrow \mathbf{n}$.

Tok elektrické intenzity $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ kulovou plochou S_k o poloměru R (který považuje za daný, tj. konstantní) můžeme na základě vztahu pro tok vektorové veličiny (3.12) vyjádřit jako

$$\begin{aligned} \Phi_e &= \oint_{S_k} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_{S_k} \frac{q}{R^2} \mathbf{R}^0 \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^2} \oint_{S_k} \mathbf{R}^0 \cdot d\mathbf{S} = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^2} \oint_{S_k} \mathbf{R}^0 \cdot \mathbf{n} dS = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^2} \underbrace{\oint_{S_k} dS}_{=4\pi R^2} = \frac{q}{\epsilon_0}. \end{aligned} \quad (20.48)$$

Zvolíme-li místo kulové plochy obecnou uzavřenou plochu S kolem zdrojového náboje (viz obr. 20.8), musí z ní vycházet stejný počet elektrických siločár jako z kulové plochy S_k (každá elektrická siločára, která protne kulovou plochu S_k , protne i obklopující uzavřenou plochu S obecného tvaru). Tedy tok elektrické intenzity obecnou uzavřenou plochou je na základě výsledku (20.48) dán následujícím vztahem:



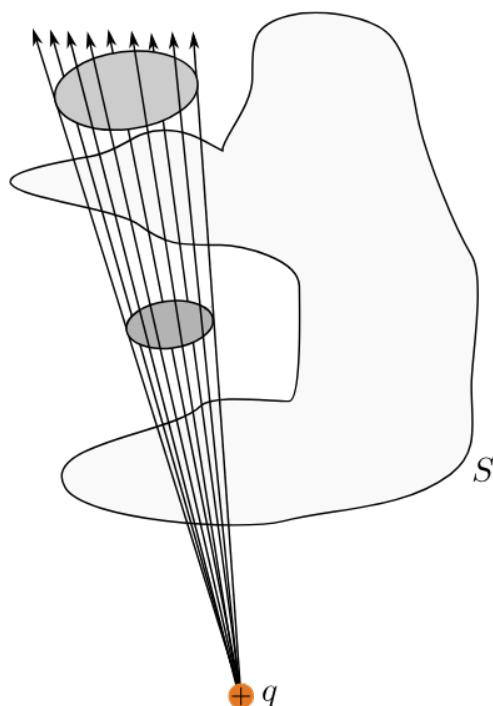
Obrázek 20.8: Tok intenzity elektrického pole obecnou uzavřenou plochou S .

$$\Phi_e = \oint_S \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{\epsilon_0}. \quad (20.49)$$

Tento závěr bude platit i v případě, kdy elektrické siločáry nebudou v prostoru rozloženy izotropně a dokonce i budou-li zakřiveny. Stejnou úvahu lze použít i

pro případ, kdy nebude plocha konvexní (elektrická siločára protne plochu vícenásobně), a nebo když zdrojový náboj bude ležet vně uzavřené plochy S . Nachází-li se zdrojový náboj vně uzavřené plochy, pak některé elektrické siločáry protínají uzavřenou plochu, přičemž počet průchodů uzavřenou plochou je vždy sudé číslo. V polovině případů elektrické siločáry vždy o stejném počtu (tedy stejně velký tok) vstupují do uzavřené plochy (protínají uzavřenou plochu směrem dovnitř) a v druhé polovině případů z uzavřené plochy vystupují (protínají uzavřenou plochu směrem ven), viz obr. 20.9. Vzhledem k tomu, že se toky vstupující a vystupující z uzavřené plochy liší znaménkem (ne velikostí), bude jejich výsledný součet nulový. Odtud plyne zřejmý závěr: *bude-li ležet zdrojový náboj vně uzavřené plochy, pak tok intenzity elektrického pole touto plochou bude **nulový**.*

Uvažujme soustavu N zdrojových nábojů. Potom na základě principu superpo-



Obrázek 20.9: Tok intenzity elektrického pole obecnou uzavřenou plochou S , kdy zdrojový HB se nachází vně této plochy.

zice bude intenzita elektrického pole této soustavy dána následujícím vztahem (viz vztah (20.4)):

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{E}_{\alpha}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\alpha=1}^N \frac{q_{\alpha}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'_{\alpha})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_{\alpha}|^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\alpha=1}^N \frac{q_{\alpha}}{R_{\alpha}^3} \mathbf{R}_{\alpha}. \quad (20.50)$$

Tok intenzity elektrického pole obecnou uzavřenou plochou S , která uzavírá soustavu N zdrojových nábojů o celkové hodnotě $q = q_1 + q_2 + \dots + q_N$, je dána

následujícím vztahem:

$$\begin{aligned}\Phi_e &= \oiint_S \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \oiint_S \left(\sum_{\alpha=1}^N \mathbf{E}_\alpha(\mathbf{r}) \right) \cdot d\mathbf{S} = \\ &= \underbrace{\oiint_S \mathbf{E}_1(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}}_{q_1/\varepsilon_0} + \underbrace{\oiint_S \mathbf{E}_2(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}}_{q_2/\varepsilon_0} + \dots + \underbrace{\oiint_S \mathbf{E}_N(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}}_{q_N/\varepsilon_0} = \\ &= \underbrace{(q_1 + q_2 + \dots + q_N)}_q / \varepsilon_0 = \frac{q}{\varepsilon_0} . \quad (20.51)\end{aligned}$$

Tento výsledek uvedeme ještě jednou:

$$\oiint_S \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{\varepsilon_0} . \quad (20.52)$$

Vztah (20.52) představuje **Gaussův zákon pro elektrické pole v integrálním tvaru** a vyjadřuje nám, čemu se rovná tok intenzity elektrického pole obecnou uzavřenou plochou uzavírající celkový náboj q , který je zdrojem elektrického pole.

Gaussův zákon v integrálním tvaru platí i pro případ, kdy náboj q jako zdroj elektrického pole uvnitř uzavřené plochy S je rozložena spojitě a platí pro něj:

$$q = \int_q dq . \quad (20.53)$$

Nechť $dq = \rho(\mathbf{r}')dV'$ (uvažujeme, že náboj je rozložena spojitě v objemu V'_z), potom

$$q = \iiint_{V'_z} \rho(\mathbf{r}')dV' . \quad (20.54)$$

Označme objem, který uzavírá plocha S jako V , přičemž platí, že $V \geq V'_z$. Vzhledem k tomu, že objemová hustota náboje $\rho(\mathbf{r}') = 0$ v místech, kde se zdrojový náboj v uzavřené ploše nenachází, tak lze vztah pro celkový uzavřený zdrojový náboj (20.54) napsat jako

$$q = \iiint_V \rho(\mathbf{r})dV . \quad (20.55)$$

Za zdrojový náboj q uzavřenou plochou S můžeme do vztahu (20.52) dosadit ze vztahu (20.55):

$$\oiint_S \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_V \rho(\mathbf{r})dV . \quad (20.56)$$

Abychom mohli tuto rovnici dále upravit, tak použijeme Gaussovu větu (12.56). Pomocí Gaussovy věty si vyjádříme plošný integrál přes uzavřenou plochu S jako objemový integrál:

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r})dV = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_V \rho(\mathbf{r})dV . \quad (20.57)$$

Pravou stranu převedeme na levou stranu:

$$\iiint_V \left(\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) - \frac{\rho(\mathbf{r})}{\varepsilon_0} \right) dV = 0. \quad (20.58)$$

Protože objem V , přes který se integruje, je chápán jako obecný, pak aby platila tato rovnice je nutné, aby byl integrand tohoto integrálu roven nule, tj.

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) - \frac{\rho(\mathbf{r})}{\varepsilon_0} = 0. \quad (20.59)$$

Odtud

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\varepsilon_0}. \quad (20.60)$$

Rovnice (parciální diferenciální rovnice) (20.60) představuje **Gaussův zákon pro elektrické pole v diferenciálním tvaru**.

Gaussův zákon jsme odvozovali pro elektrostatické pole, ale vzhledem ke skutečnosti, že celkový počet siločár se nemění ani v případě, že jsou náboje v pohybu, můžeme tímto předpokládat, že Gaussův zákon platí zcela obecně i pro pohybující se náboje a časově proměnná elektrická pole.

V případě statických nábojů z Gaussova zákona plyne zákon Coulombův.

Uvažujme kladný bodový náboj q umístěný ve středu koule o poloměru R , viz obr. 20.7. V námi uvažovaném případě budou vektor intenzity \mathbf{E} a vektor vnější normály k uvažované kulové ploše \mathbf{n} souhlasně kolineární ve všech místech kulové plochy. Proto z Gaussova zákona v integrálním tvaru (20.52) plyne:

$$\oiint_{S_k} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \oiint_{S_k} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = E \underbrace{\oiint_{S_k} dS}_{=4\pi R^2} = \frac{q}{\varepsilon_0}. \quad (20.61)$$

Odtud dostáváme

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{q}{R^2}. \quad (20.62)$$

Vzhledem k tomu, že vektor intenzity \mathbf{E} a vektor \mathbf{R}^0 je v tomto případě stejně orientován jako vektor vnější normály ke kulové ploše \mathbf{n} , je možné psát:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{q}{R^2} \mathbf{n} = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{q}{R^2} \mathbf{R}^0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{q}{R^3} \mathbf{R}. \quad (20.63)$$

Vztah pro intenzitu elektrického pole (20.63) nám vlastně vyjadřuje sílu působící na kladný jednotkový náboj, dospěli jsme tímto ke Coulombovu zákonu.

Poissonova rovnice pro elektrické pole

Dosadíme-li do Gaussova zákona pro elektrické pole v diferenciálním tvaru za elektrickou intenzitu ze vztahu (20.18), tak dostáváme:

$$\nabla \cdot (-\nabla \varphi) = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\varepsilon_0}. \quad (20.64)$$

Rovnici (20.64) upravíme do tvaru:

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\varepsilon_0} . \quad (20.65)$$

Tato rovnice se nazývá **Poissonova rovnice pro elektrické pole**.

Řešením Poissonovy rovnice pro elektrické pole (nehomogenní parciální diferenciální rovnice) při zadaných okrajových podmínkách a znalosti funkce objemové hustoty náboje $\rho = \rho(\mathbf{r})$ dostáváme elektrický potenciál φ pro danou oblast. Zpravidla musíme Poissonovu rovnici pro elektrické pole řešit numericky, což bývá často jednodušší než řešit numericky integrál (20.34), který formálně představuje řešení této rovnice.

Pozn: V té části prostoru (oblasti), kde je objemová hustota náboje $\rho(\mathbf{r})$ rovna nule, přechází Poissonova rovnice pro elektrické pole v tzv. **Laplaceovu rovnici pro elektrické pole** (homogenní parciální diferenciální rovnice): $\nabla^2 \varphi = 0$, která je jejím speciálním případem.

20.5 Elektrické pole nabité přímky a roviny

Uvažujme kladný elektrický náboj rovnoměrně rozložený podél nekonečné přímky, tj. $\tau = \text{konst.}$ Budeme dále uvažovat bod P ve vzdálenosti r od uvažované přímky. Vezmeme-li v úvahu příspěvky nábojových elementů $dq = \tau dl$ ležících ve stejné vzdálenosti l na obě strany od paty kolmice spuštěné z bodu P na nabitou přímku, pak jejich vektorový součet bude zřejmě kolmý k přímce a bude mířit v našem případě od přímky (uvažujeme kladný náboj), viz obr. 20.10. Tedy ze symetrie úlohy vyplývá, že siločáry elektrického pole (tedy i elektrická intenzita) jsou kolmé k uvažované nabité přímce. Intenzitu elektrického pole nekonečné rovnoměrně nabité přímky lze snadno spočítat pomocí Gaussova zákona (20.52), kdy obklopíme část uvažované přímky plochou válce o poloměru r a výšce l , přičemž osa válce leží na nabité přímce, viz obr. 20.11.

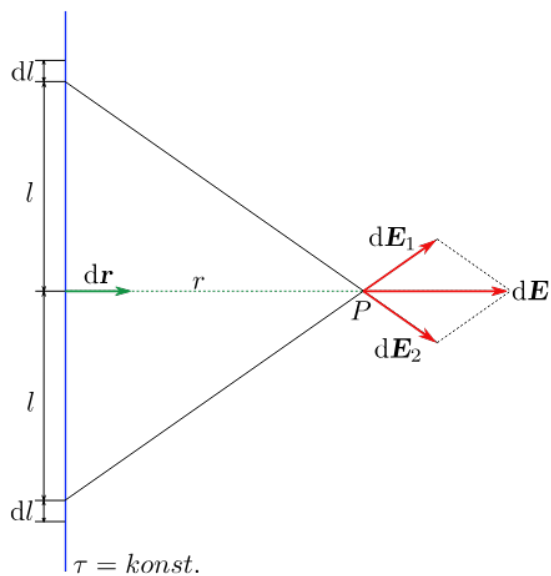
Z obrázku je patrné, že tok intenzity podstavami válce je nulový, takže tok intenzity probíhá pouze jeho pláště o ploše $S_P = 2\pi rl$. Protože lineární hustota nabité přímky je konstantní, tak elektrické pole bude homogenní. Tedy elektrická intenzita je na povrchu pláště co do velikosti všude stejná a je ve všech místech k tomuto povrchu kolmá, tj. $\mathbf{E} \cdot \mathbf{n} = E$, kde \mathbf{n} je jednotkový normálový vektor k povrchu pláště. Náboj uzavřený plochou uvažovaného válce je $q = \tau l$. Proto na základě Gaussova zákona v integrálním tvaru můžeme psát:

$$\frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{\tau l}{\varepsilon_0} = \oint_{S_{\text{válec}}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_{S_P} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_{S_P} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = E \underbrace{\int_{S_P} dS}_{=2\pi rl} = 2\pi rl E . \quad (20.66)$$

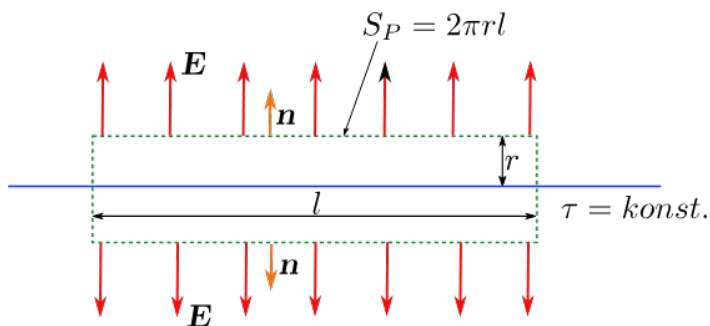
Odtud pro velikost intenzity můžeme psát, že

$$\frac{\tau l}{\varepsilon_0} = 2\pi rl E \quad \Rightarrow \quad E = \frac{\tau}{2\pi \varepsilon_0 r} . \quad (20.67)$$

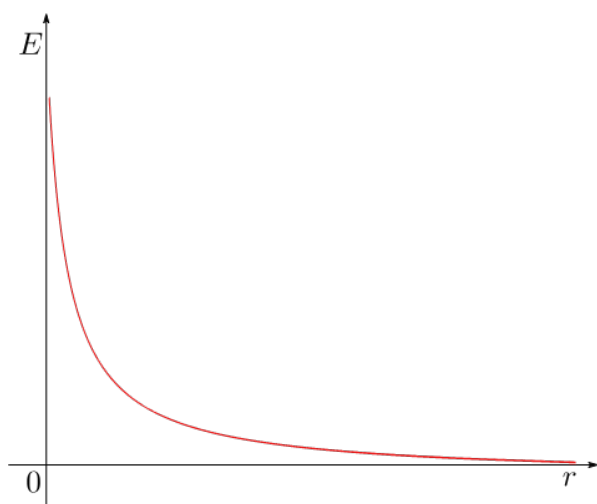
Průběh velikosti intenzity na vzdálenosti od nabité přímky je zachycen na obr. (20.12). Plocha válce uzavírá náboj $q = \Delta S \sigma$. Při výpočtu elektrického poten-



Obrázek 20.10: Kolmý směr vektoru intenzity elektrického pole k nabitě přímce.



Obrázek 20.11: Tok elektrické intenzity pláštěm souosého válce.



Obrázek 20.12: Průběh velikosti intenzity v závislosti na vzdálenosti od nabitě přímky.

ciálu vyjdeme ze vztahu (20.22), přičemž je nutné si uvědomit, že vektor \mathbf{E} je

rovnoběžný s vektorem $d\mathbf{r}$ (viz obr. 20.10):

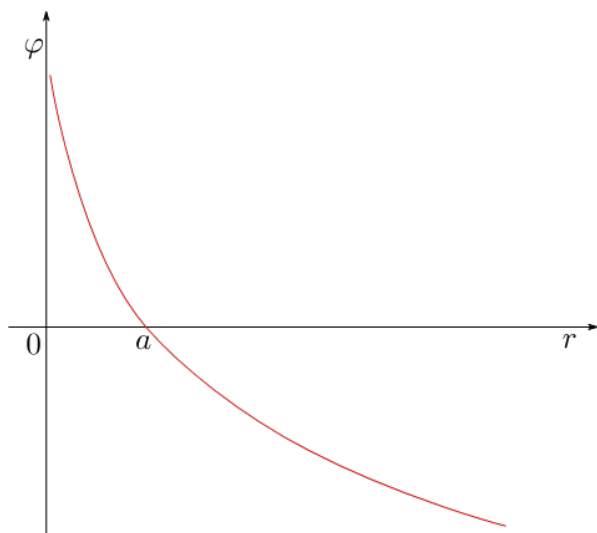
$$d\varphi = -\mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -E dr. \quad (20.68)$$

Protože se jedná o neomezenou distribuci elektrického náboje tak, jak již bylo uvedeno v kap. 20.3, nelze v takovém případě volit nulový potenciál v nekonečnu, takže si ho zvolíme nulový ve vzdálenosti a od nabitě přímky. Potom integrací vztahu (20.68), kam dosadíme za elektrickou intenzitu ze vztahu (20.67), dostáváme:

$$\varphi = - \int_a^r E dr = - \int_a^r \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 r} dr = - \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \int_a^r \frac{dr}{r} = - \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} [\ln r]_a^r = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{a}{r}. \quad (20.69)$$

Jelikož $\ln 1 = 0$, tak skutečně ve vzdálenosti $r = a$ nabývá elektrický potenciál nulové hodnoty.

Průběh elektrického potenciálu na vzdálenosti od nabitě přímky je na zobrazen na obr. (20.13). Nyní uvažujme elektrický náboj, který je rozložen na nekonečné

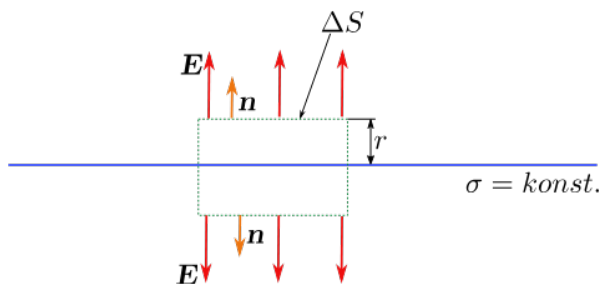


Obrázek 20.13: Průběh elektrického potenciálu v závislosti na vzdálenosti od nabitě přímky.

rovině s konstantní plošnou hustotou σ . Budeme hledat intenzitu v bodě P vzdáleném r od uvažované roviny. Kdybychom rozdělili tuto rovinu na dvojice rovnoběžných infinitezimálně tenkých přímých proužků symetricky umístěných vzhledem k patě kolmice spuštěné z bodu P na rovinu, lze tyto proužky považovat za nabitě přímky a sčítat jejich příspěvky. Ze symetrie úlohy je zřejmé, že vektor intenzity (síločáry) bude mířit kolmo od kladně nabitě nekonečné roviny.

Zvolíme-li si za Gaussovu plochu S povrch válce s osou kolmou k rovině a s podstavami libovolného tvaru o ploše ΔS tak, aby ležely ve vzdálenosti r na obě strany od kladně nabitě roviny, viz obr. 20.14. Z obrázku je vidět, že tok intenzity elektrického pole se uskutečňuje pouze podstavami válce a tedy tok této intenzity pláštěm válce je nulový. Plocha válce uzavírá náboj $q = \Delta S\sigma$. Ze vztahu vyjadřující Gaussův zákon v integrálním tvaru (20.52) dostaneme:

$$\oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 2 \iint_{\Delta S} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 2E\Delta S = \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{\sigma\Delta S}{\epsilon_0}. \quad (20.70)$$



Obrázek 20.14: Gaussova plocha ve tvaru válce válce.

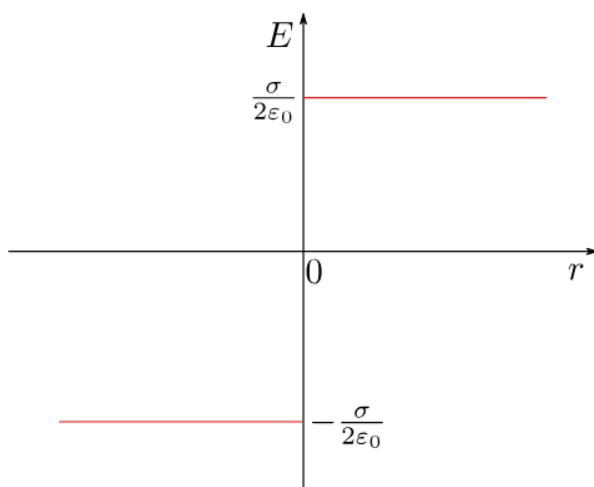
Odtud tedy dostáváme:

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = konst. \quad (20.71)$$

Výsledný vztah vyjadřuje skutečnost, že *elektrické pole nabitě nekonečné roviny je konstantní v poloprostoru vymezeném touto rovinou*.

Přijmeme úmluvu, že elektrické pole vpravo od svislé kladně nabitě roviny budeme brát jako kladné, vlevo pak jako záporné (je to proto, že vektor elektrické intenzity má „za rovinou“ opačný směr než „před rovinou“). S ohledem na tuto úmluvu je na obrázku 20.15 zachycen průběh intenzity elektrického pole na obou stranách nabitě roviny.

Pozn.: Intenzita elektrického pole je spojitá s výjimkou bodů, kdy prochází na-



Obrázek 20.15: Průběh intenzity elektrického pole na obou stranách kladně nabitě roviny.

bitou plochou.

Při výpočtu elektrického potenciálu postupujeme podobně, jako jsme postupovali při jeho výpočtu u nabitě přímky s tím rozdílem, že nulovou hodnotu elektrického potenciálu volíme v místě nabitě roviny ($r = 0$), tedy

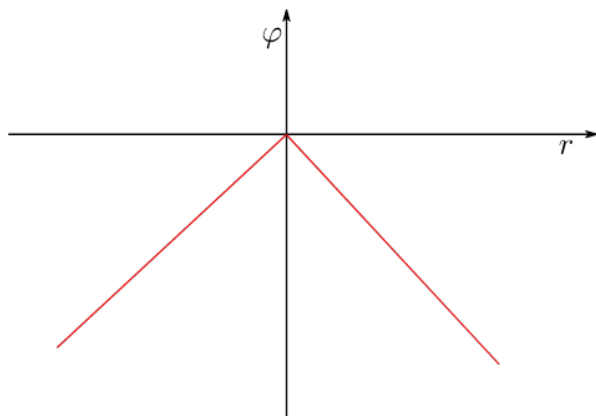
$$\varphi = - \int_0^r E dr = - \int_0^r \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} dr = - \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \int_0^r dr = - \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} r. \quad (20.72)$$

Pokud budeme r chápat jako vzdálenost od roviny, pak získaný vztah platí pro všechna místa. Pokud ale chceme r chápat jako souřadnici, je třeba do získaného

vztahu doplnit absolutní hodnotu:

$$\varphi = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}|r|. \quad (20.73)$$

Na obr. (20.16) je zachycen průběh potenciálu homogenně nabité roviny v závislosti na souřadnici r .

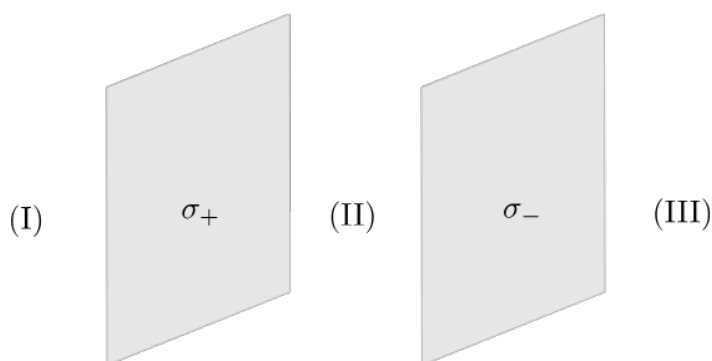


Obrázek 20.16: Průběh elektrického potenciálu homogenně nabité roviny v závislosti na souřadnici r .

20.6 Elektrické pole dvou opačně nabitých rovin

Uvažujme dvě nekonečné nabité roviny, které jsou rovnoměrně nabitě opačnými náboji o stejně velké konstantní plošné hustotě, tj. $\pm\sigma$. Budeme vyšetřovat elektrické pole ve třech oblastech vymezených uvažovanými nabitými rovinami. Tyto oblasti označíme (I), (II), (III), viz obr. 20.17.

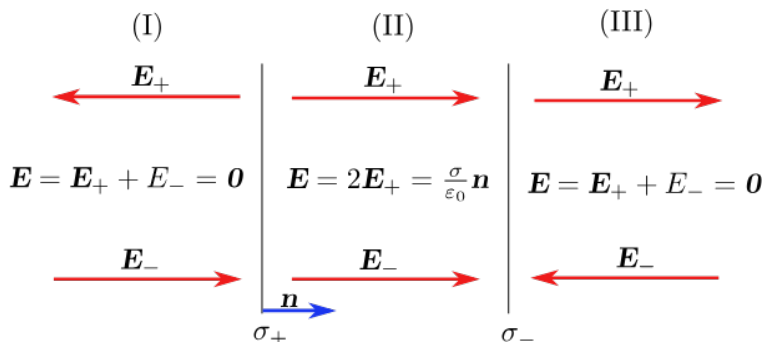
Využijeme-li závěrů z předchozí kapitoly, tak můžeme zakreslit vektory elektrické



Obrázek 20.17: Uvažované oblasti vymezené nabitými rovinami.

intenzity polí buzených kladně a záporně nabitou rovinou způsobem, který je zachycen na obr. 20.18. Na tomto obrázku jsou znázorněny vektory intenzit elektrických polí od jednotlivých rovin, které jsou podle vztahu (20.71) stejně velké. Provedeme-li na základě principu superpozice jejich součet, tak zjistíme, že jak v oblasti (I), tak v oblasti (III) je výsledné elektrické pole nulové. V oblasti (II)

mezi uvažovanými opačně nabitými rovinami směřuje elektrické pole kolmo od kladně nabitě roviny k záporně nabitě rovině. Výsledná elektrická intenzita je rovna součtu intenzit od obou rovin, které jsou mezi rovinami stejně orientované, tedy



Obrázek 20.18: Elektrické pole od jednotlivých rovin spolu s výsledným elektrickým polem.

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \mathbf{n} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \mathbf{n} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \mathbf{n}, \quad (20.74)$$

kde \mathbf{n} je jednotkový normálový vektor ke kladně nabitě ploše zachycený na obr. 20.18.

Tedy můžeme konstatovat, že výsledné elektrické pole dvou nekonečných opačně a rovnoměrně nabitých rovin je mezi těmito rovinami homogenní a různé od nuly, kdežto vně těchto rovin je výsledné elektrické pole nulové.

20.7 Elektrické pole uvnitř a vně homogenní nabitě duté koule

Uvažujme dutou kladně⁸ nabitou kouli, jejíž střed leží v počátku souřadnicového systému, o objemové hustotě $\rho = konst.$ s vnějším poloměrem R a vnitřním poloměrem $0 \leq R_i \leq R$. Kolem této duté koule uvažujme kulovou plochu S_k , která má střed shodný se středem duté koule a má poloměr r , viz obr. 20.19. Na kulové ploše bude mít intenzita elektrického pole $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ stejnou velikost ve všech směrech (izotropní elektrické pole) a bude souhlasně orientována s jednotkovým vektorem vnější normály \mathbf{n} ke kulové ploše S_k ($\mathbf{E} = E\mathbf{E}^0$, $\mathbf{E}^0 = \mathbf{n}$). Velikost náboje homogenně nabitě duté koule q lze pomocí objemové hustoty náboje vyjádřit jako

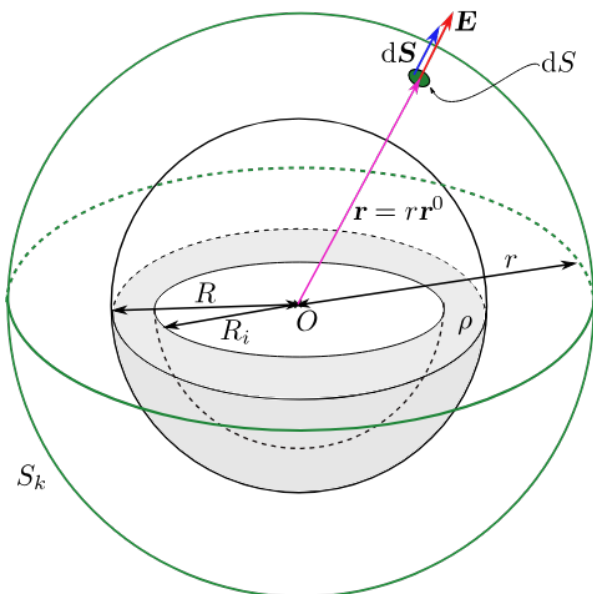
$$q = \frac{4}{3}\pi\rho(R^3 - R_i^3). \quad (20.75)$$

Uvažujme případ, kdy $r \geq R$. Z Gaussova zákona pro elektrické pole v integrálním tvaru (20.52) dostáváme:

$$\oint_{S_k} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \oint_{S_k} E\mathbf{E}^0 \cdot \mathbf{n} dS = \oint_{S_k} E dS = E \underbrace{\oint_{S_k} dS}_{4\pi r^2} = 4\pi r^2 E = \frac{q}{\varepsilon_0}. \quad (20.76)$$

Velikost intenzity elektrického pole je na povrchu kulové plochy konstantní.

⁸Kladně nabitou kouli volíme z důvodu konkrétnosti, stejně tak bychom všechny úvahy mohli provést pro záporně nabitou dutou kouli a dospěli bychom ke stejným závěrům.



Obrázek 20.19: Tok intenzity elektrického pole kulovou plochou S_k , která obklopuje homogenní kladně nabitou dutou kouli.

Na základě tohoto výsledku si můžeme vyjádřit velikost intenzity elektrického pole:

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}. \quad (20.77)$$

Protože platí, že $\mathbf{r}^0 \equiv \mathbf{n}$, pak můžeme vektor intenzity elektrického pole zapsat jako

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E(r)\mathbf{E}^0 = E(r)\mathbf{n} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \mathbf{n} \equiv \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \mathbf{r}^0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^3} \mathbf{r}. \quad (20.78)$$

Porovnáme-li tento výsledek se vztahem pro intenzitu elektrického pole zdrojového náboje umístěného do počátku souřadnic (20.44), tak je zřejmé, že se jedná o **identické** vztahy. Odtud plyne důležitý závěr, že vně nabitě duté koule můžeme **nahradit** tuto kouli bodovým zdrojovým nábojem umístěným v jejím středu, který má stejnou velikost náboje jako nabitá dutá koule (20.75). Položíme-li vnitřní poloměr nabitě duté koule roven nule ($R_i = 0$), pak přejde dutá koule v plnou kouli a výše uvedený závěr platí i pro tento případ.

Dále uvažujme případ, kdy $r < R_i$. V tomto případě neuzavírá kulová plocha S_k žádný zdrojový náboj. Potom z Gaussova zákona pro elektrické pole v integrálním tvaru (20.52) dostáváme:

$$\oint_{S_k} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = 0. \quad (20.79)$$

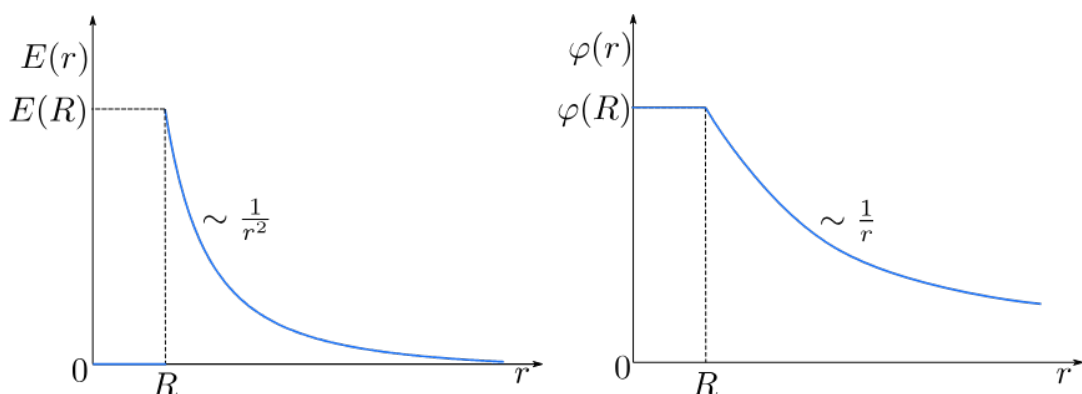
Odtud vyplývá, že v tomto případě $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$, tedy elektrické pole uvnitř duté koule je **nulové**. Uvážíme-li vztah mezi intenzitou elektrického pole a jeho potenciálem (12.17), tj. $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\varphi(\mathbf{r})$, tak v tomto případě je $\varphi = konst.$.

Poznamenejme, že analogickým postupem bychom dospěli ke stejným závěrům i

v případě kladně nabitě kulové plochy o poloměru R s plošnou hustotou náboje $\sigma = konst.$, jen s tím rozdílem, že její celkový náboj q bychom počítali jako

$$q = 4\pi R^2 \sigma . \quad (20.80)$$

Uvnitř homogenně nabitě kulové plochy je elektrická intenzita nulová a elektrický potenciál konstantní. Vně této plochy je elektrická intenzita určena vztahem (20.78) a elektrický potenciál vztahem (20.45) (nabitou kulovou plochu můžeme nahradit zdrojovým bodovým nábojem o stejné velikosti jako má tato nabitá kulová plocha, který je umístěn do jejího středu), kde zdrojový náboj je dán vztahem (20.80). Průběh závislosti velikosti intenzity a potenciálu elektrického pole v závislosti na vzdálenosti od jejího středu je zachycen na obr. 20.20.



Obrázek 20.20: Závislost velikosti intenzity a potenciálu elektrického pole nabitě kulové plochy v závislosti na vzdálenosti od jejího středu.

20.8 Elektrického pole uvnitř a vně homogenně nabitě plné koule

Uvažujme plnou homogenně kladně nabitou ($\rho = konst.$) kouli o poloměru R , jejíž celkový náboj je q a její střed se nachází v počátku souřadnicové soustavy. Z předchozího textu již víme, že ve vzdálenosti od jejího středu $r \geq R$ je velikost intenzity elektrického pole rovna:

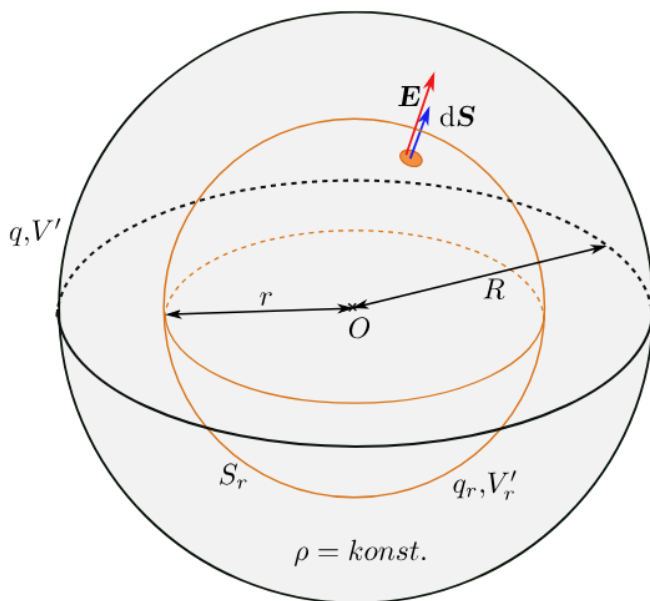
$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \quad (20.81)$$

a odpovídá velikosti intenzity elektrického pole bodového náboje, který se nachází ve středu této koule a má s ní shodný náboj.

Dále uvažujme, kulovou plochu S_r o poloměru r nacházející se uvnitř uvažované plné koule ($r \leq R$), jejíž střed je totožný se středem uvažované plné koule, viz obr. 20.21.

Objemovou hustotu náboje plné koule je možné si vyjádřit jako

$$\rho = \frac{q}{V'} = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3} . \quad (20.82)$$



Obrázek 20.21: Geometrická situace pro určení elektrického pole uvnitř homogenně nabité koule.

Náboj uzavřený v kulové ploše S_r označíme jako q_r a platí pro něj:

$$q_r = \rho V'_r = \frac{4}{3}\pi\rho r^3. \quad (20.83)$$

Zde za hustotu náboje můžeme dosadit ze vztahu (20.82), čímž dostaneme:

$$q_r = \frac{4}{3}\pi\frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3}r^3 = \frac{q}{R^3}r^3. \quad (20.84)$$

Elektrické pole uvnitř plné koule musí být izotropní, tedy intenzita elektrického pole musí být stejně orientovaná jako vnější jednotkový normálový vektor ke kulové ploše S_r a má ve všech bodech na této ploše stejnou velikost. Na základě Gaussova zákona pro elektrické pole v integrálním tvaru (20.52), kam dosadíme ze vztahu (20.84), dostáváme:

$$\begin{aligned} \oint_{S_r} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} &= \oint_{S_r} E(r) \mathbf{E}^0 \cdot d\mathbf{S} = \oint_{S_r} E(r) \mathbf{E}^0 \cdot \mathbf{n} dS = \oint_{S_r} E(r) dS = \\ &= E(r) \underbrace{\oint_{S_r} dS}_{4\pi r^2} = 4\pi r^2 E(r) = \frac{q_r}{\varepsilon_0} = \frac{q}{\varepsilon_0 R^3} r^3. \end{aligned} \quad (20.85) \quad \mathbf{E}^0 = \mathbf{n}$$

Odtud si lze vyjádřit vztah pro velikost intenzity elektrického pole uvnitř homogenně nabité plné koule:

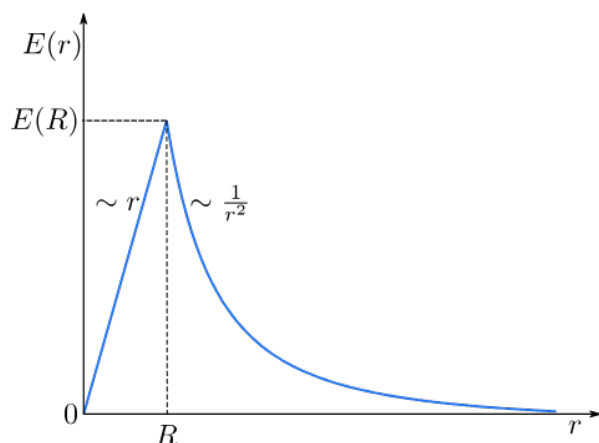
$$4\pi r^2 E(r) = \frac{q}{\varepsilon_0 R^3} r^3 \Rightarrow E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{R^3} r, \quad 0 \leq r \leq R. \quad (20.86)$$

Pro vektor intenzity elektrického pole pak dostáváme:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E(r) \mathbf{E}^0 = E(r) \mathbf{n} \equiv E(r) \mathbf{r}^0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{R^3} r \mathbf{r}^0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{R^3} \mathbf{r}. \quad (20.87)$$

Z výsledku vidíme, že velikost intenzity elektrického pole uvnitř plně homogenně nabitě koule **lineárně roste** se vzdáleností od jejího středu, protože $1/(4\pi\epsilon_0)$, q a R jsou konstantní. Pro $r > R$, jak je vidět ze vztahu (20.81), naopak klesá a to s kvadrátem vzdálenosti od jejího středu. Můžeme na základě této skutečnosti konstatovat, že k elektrickému poli uvnitř plně homogenně nabitě koule přispívá jen ta část koule, která se nachází uvnitř kulové plochy S_r . Pro $r = R$ dávají vztahy (20.81) a (20.86) stejnou hodnotu.

Na obr. 20.22 je zachycen vývoj velikosti intenzity elektrického pole uvnitř a vně plně homogenně nabitě koule.



Obrázek 20.22: Závislost velikosti intenzity elektrického pole uvnitř a vně plně homogenně nabitě koule v závislosti na vzdálenosti od jejího středu.

20.9 Práce elektrické síly a elektrická energie nábojů

20.9.1 Práce elektrického pole při přemísťování elektrického náboje

Práci, kterou vykoná elektrická síla \mathbf{F}_C při přemísťování elektrického náboje z bodu o poloze \mathbf{r}_1 do bodu \mathbf{r}_2 po křivce \mathcal{C} spočítáme (viz vztah (9.24)) jako

$$A(\mathcal{C}) = \int_{r_1}^{r_2} \mathbf{F}_C \cdot d\mathbf{r} = Q \int_{r_1}^{r_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}. \quad (20.88)$$

Jak už jsme zmínili v kapitole 20.2, elektrické pole je polem konzervativním. Z tohoto důvodu můžeme vyjádřit elektrickou sílu pomocí potenciální energie vztahem (20.14). Proto můžeme při výpočtu práce, kterou vykoná elektrické pole po libovolné křivce \mathcal{C} , použít vztahu (9.48), tj.

$$A(\mathcal{C}) = \int_{r_1}^{r_2} \mathbf{F}_C \cdot d\mathbf{r} = - \int_{r_1}^{r_2} dW_p = W_p(\mathbf{r}_1) - W_p(\mathbf{r}_2). \quad (20.89)$$

Naopak, práce, kterou bychom vykonali proti silám elektrického pole (práce vnějších sil $\mathbf{F}^e = -\mathbf{F}_C$) při přemísťování elektrického náboje z bodu o poloze \mathbf{r}_1 do

bodů \mathbf{r}_2 po libovolné křivce \mathcal{C} , je dána vztahem:

$$A'(\mathcal{C}) = -A(\mathcal{C}) = - \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F}_C \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} dW_p = W_p(\mathbf{r}_2) - W_p(\mathbf{r}_1) . \quad (20.90)$$

V případě, že polohový vektor \mathbf{r}_0 ukazuje na referenční bod, pro který je zvolena hodnota potenciální energie $W_p(\mathbf{r}_0) = W_{p0}$ (zpravidla ji volíme nulovou), je možné stanovit potenciální energii jako

$$W_p(\mathbf{r}) = - \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}_C(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}' . \quad (20.91)$$

Jsou-li náboje umístěny v konečné oblasti prostoru, můžeme pak zvolit potenciální energii nulovou v nekonečnu:

$$W_p(\mathbf{r}) = - \int_{\infty}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}_C(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}' . \quad (20.92)$$

S ohledem na vztahy (20.17) a (20.20) je možné snadno přepsat vztah (20.92) pro elektrický potenciál, tedy

$$\varphi(\mathbf{r}) = - \int_{\infty}^{\mathbf{r}} \mathbf{E}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}' . \quad (20.93)$$

Rozdíl potenciálů ve dvou bodech určených polohovými vektory \mathbf{r}_2 a \mathbf{r}_1 , tj. $\varphi(\mathbf{r}_2) - \varphi(\mathbf{r}_1)$, je číselně roven práci, kterou vykonáme při přemísťování jednotkového náboje proti silám elektrostatického pole⁹ z bodu \mathbf{r}_1 do bodu \mathbf{r}_2 po libovolné křivce, tj.

$$\varphi_{21} = \varphi(\mathbf{r}_2) - \varphi(\mathbf{r}_1) = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} d\varphi = - \int_{\infty}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} + \int_{\infty}^{\mathbf{r}_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = - \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} . \quad (20.94)$$

Naopak, rozdíl potenciálů $\varphi(\mathbf{r}_1) - \varphi(\mathbf{r}_2)$ odpovídá číselně práci, kterou vykoná uvažované silové pole při přemísťování jednotkového náboje z bodu \mathbf{r}_1 do bodu \mathbf{r}_2 po libovolné křivce (srovnej se vztahem (20.89)). Tento rozdíl nazýváme (elektrické) **napětí** a značíme ho U

$$U = \varphi(\mathbf{r}_1) - \varphi(\mathbf{r}_2) = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} . \quad (20.95)$$

Všechny tři veličiny, tj. elektrický potenciál, potenciálový rozdíl a napětí, mají zřejmě stejný fyzikální rozměr a měří se v týchž jednotkách J/C (joule na coulomb), které nazýváme **volt** a značíme V.

Vzhledem k tomu, že elektrické pole je polem konzervativním, tak musí pro elektrické síly platit vztahy (9.49) a (9.54), tedy

$$A = \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F}_C \cdot d\mathbf{r} = Q \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = 0 , \quad (20.96)$$

$$\nabla \times \mathbf{F}_C = Q \nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0} , \quad (20.97)$$

⁹Jedná se o práci stejné velikosti, ale opačného znaménka vzhledem k práci, kterou by mezi stejnými body vykonalo elektrické pole.

neboli

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = 0, \quad (20.98)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}. \quad (20.99)$$

Rovnice (20.52) a (20.98) představují **Maxwellovy rovnice elektrostatického pole ve vakuu v integrálním tvaru** a rovnice (20.60) a (20.99) **Maxwellovy rovnice elektrostatického pole ve vakuu v diferenciálním tvaru**.

20.9.2 Elektrická energie bodových nábojů

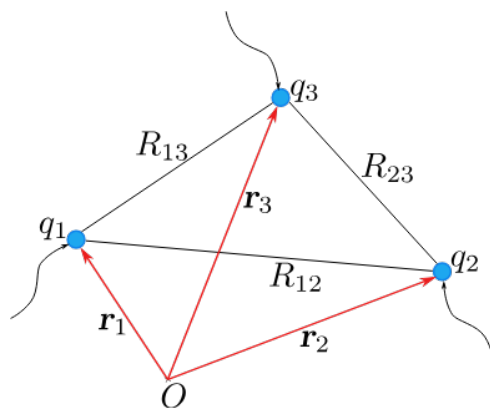
S ohledem na vztah (20.19) můžeme vyjádřit potenciální energii elektrického náboje pomocí potenciálu v daném místě

$$W_p(\mathbf{r}) = Q\varphi(\mathbf{r}). \quad (20.100)$$

Práce, kterou vykonáme (vnější síly), když shromáždíme z nekonečné vzdálenosti na určená místa N bodových nábojů, bude odpovídat potenciální energii těchto nábojů. Jestliže přesuneme na dané místo o polohovém vektoru \mathbf{r}_1 první náboj (q_1), tak nevykonáme žádnou práci, jelikož ještě neexistuje elektrostatické pole. Nyní přesuneme na místo \mathbf{r}_2 druhý náboj q_2 . V tomto případě již vykonáme práci proti silám elektrostatického pole, jehož zdrojem je náboj q_1 , viz obr. 20.23. Tato práce bude rovna potenciální energii určené vztahem (20.100) či (20.33), tedy

$$W_{p2} = q_2\varphi(\mathbf{r}_2) = q_2 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_2 \left(\frac{q_1}{R_{12}} \right). \quad (20.101)$$

Dále na místo \mathbf{r}_3 přesuneme náboj q_3 , čímž vykonáme práci proti silám elek-



Obrázek 20.23: Situační obrázek k nalezení potenciální energie bodových nábojů.

trostatického pole, jehož zdrojem jsou náboje q_1 a q_2 :

$$\varphi(\mathbf{r}_3) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1}{R_{13}} + \frac{q_2}{R_{23}} \right),$$

tedy

$$W_{p3} = q_3\varphi(\mathbf{r}_3) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_3 \left(\frac{q_1}{R_{13}} + \frac{q_2}{R_{23}} \right). \quad (20.102)$$

Podobně v případě přenesení náboje q_4 do místa o polohovém vektoru \mathbf{r}_4 dostaneme:

$$W_{p4} = q_4 \varphi(\mathbf{r}_4) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_4 \left(\frac{q_1}{R_{14}} + \frac{q_2}{R_{24}} + \frac{q_3}{R_{34}} \right). \quad (20.103)$$

Celková práce k přenesení všech čtyř elektrických nábojů ($N = 4$), která současně je rovna potenciální energii souboru těchto nábojů, je dána součtem prací (20.101), (20.102) a (20.103)

$$W_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1 q_2}{R_{12}} + \frac{q_1 q_3}{R_{13}} + \frac{q_1 q_4}{R_{14}} + \frac{q_2 q_3}{R_{23}} + \frac{q_2 q_4}{R_{24}} + \frac{q_3 q_4}{R_{34}} \right). \quad (20.104)$$

Odtud lze vypočítat pravidlo pro výpočet potenciální energie obecného počtu nábojů:

$$W_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j>i}}^N \frac{q_i q_j}{R_{ij}}. \quad (20.105)$$

Relace $j > i$ ve výše uvedené sumě nám zajistí, aby se stejné páry nesčítaly dvakrát. Tento výraz je možné přepsat do tvaru, ve kterém se stejné páry sice sčítají dvakrát, ale ve výsledku je součet podělen 2, tedy

$$W_p = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{q_i q_j}{R_{ij}}. \quad (20.106)$$

Tento výraz přepíšeme jako

$$W_p = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R_{ij}} q_j \right). \quad (20.107)$$

Výraz v závorce tohoto vztahu vlastně představuje elektrický potenciál v bodě o polohovém vektoru \mathbf{r}_i , tj. v bodě, ve kterém se nachází náboj q_i , tedy

$$W_p = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \varphi(\mathbf{r}_i). \quad (20.108)$$

Vztah (20.108) představuje energii (potenciální, protože v elektrostatice pozbývá smyslu uvažovat jiný druh energie) soustavy N bodových nábojů.

20.9.3 Elektrická energie spojitě rozložených nábojů a elektrostatického pole

Stejně tak, jak jsme použili převodní vztahy mezi soustavou hmotných bodů a spojitě rozloženou hmotnost (16.6), tak lze analogicky použít převodní vztahy mezi soustavou bodových nábojů a spojitě rozloženými náboji, tj.

Převodní vztahy

$$\sum_n f_n q_n \rightarrow \int_q f \, dq, \quad \sum_n \mathbf{f}_n q_n \rightarrow \int_q \mathbf{f} \, dq, \quad (20.109)$$

kde f_n , resp. \mathbf{f}_n , je nějaká skalární, resp. vektorová, fyzikální veličina vztahující se k n -tému bodovému náboji, kde q_n je jeho velikost náboje a $f = f(\mathbf{r})$, resp. $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{r})$, je spojitá skalární, resp. vektorová, funkce přes hmotnost tělesa se spojitě rozloženou hmotou.

Potom pro spojitě distribuované náboje lokalizované v objemu V ($dq = \rho(\mathbf{r})dV$) můžeme přepsat vztah (20.108) jako¹⁰ jako

$$W_p = \frac{1}{2} \int_q \varphi(\mathbf{r}) \, dq = \frac{1}{2} \iiint_V \rho(\mathbf{r}) \varphi(\mathbf{r}) dV. \quad (20.110)$$

Tento vztah nám určuje energii spojitě rozložených nábojů v objemu V .

Rovnici (20.110) je však možno dát i jinou, neobyčejně důležitou fyzikální interpretaci. Pomocí Gaussova zákona v diferenciálním tvaru (20.60) si můžeme vyjádřit objemovou hustotu náboje:

$$\rho = \varepsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E}, \quad (20.111)$$

kterou dosadíme do vztahu (20.110)

$$W_p = \frac{1}{2} \iiint_V (\varepsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r})) \varphi(\mathbf{r}) dV = \frac{\varepsilon_0}{2} \iiint_V (\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r})) \varphi(\mathbf{r}) dV. \quad (20.112)$$

Pro další úpravu tohoto vztahu použijeme následující identitu:

$$\nabla \cdot (f \mathbf{F}) = (\nabla f) \cdot \mathbf{F} + f \nabla \cdot \mathbf{F}. \quad (20.113)$$

Jejím použitím dostaneme:

$$W_p = \frac{\varepsilon_0}{2} \iiint_V \nabla \cdot (\varphi(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r})) dV - \frac{\varepsilon_0}{2} \iiint_V (\nabla \varphi(\mathbf{r})) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) dV. \quad (20.114)$$

Pomocí Gaussovy věty (12.56) převedeme první integrál na pravé straně této rovnice na integrál plošný a ve druhém integrálu uplatníme rovnost $\mathbf{E} = -\nabla \varphi$, čímž dostaneme:

$$W_p = \frac{\varepsilon_0}{2} \oint_{S(V)} (\varphi(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r})) \cdot d\mathbf{S} + \frac{\varepsilon_0}{2} \iiint_V E^2(\mathbf{r}) dV. \quad (20.115)$$

Ze způsobu, jakým byl odvozen vztah (20.110) je zřejmé, že integrace je míněna přes objem, ve kterém jsou distribuovány elektrické náboje. Avšak, když tento objem zvětšíme, tak se nic nezmění, protože mimo původní objem platí, že $\rho = 0$. V případě výpočtu energie prováděném podle vztahu (20.115), tak při integraci přes

¹⁰Podobným způsobem je možné přepsat vztah (20.108) i pro náboje rozložené jen na ploše či křivce.

plochu větší než je plocha přesně uzavírající objem obsahující všechny uvažované náboje, se zřejmě výsledek integrace změní, protože tok $\varphi(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r})$ touto plochou není stejný. Odtud vyplývá, že výsledek integrace je ovlivněn velikostí plochy, byť tato plocha obsahuje všechny uvažované náboje. Ale je nutné připomenout, že objemový integrál je nutné počítat přes objem, který uzavírá tato větší plocha a jeho změna bude kompenzovat změnu integrace přes uvažovanou větší plochu, takže se hodnota energie W_p nezmění.

Využijeme tohoto závěru ve vztahu (20.115). Objem přes, který budeme integrovat ztotožníme s objemem koule, přičemž budeme předpokládat, že všechny uvažované náboje se nachází uvnitř této koule. Bez újmy na obecnosti můžeme do středu této koule umístit počátek souřadnic. Druhý (objemový) integrál v rovnosti (20.115) může s rostoucím poloměrem uvažované koule jen narůstat, jelikož integrand je kladný ($E^2 > 0$). Aby celková potenciální energie uvažované distribuce nábojů zůstala stejná, musí naopak plošný integrál klesat. Plošný integrál představuje tok vektoru $\varphi(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r})$ plochou uvažované koule. Bude-li poloměr koule, jejíž plochou počítáme tok, velmi velký, potom můžeme objem lokalizovaných nábojů považovat za bodový náboj ležící ve středu souřadnicové soustavy, viz obr. 20.24. Z tohoto důvodu bude integrand plošného integrálu v rovnosti (20.115) přibližně konstantní na povrchu této koule, tedy pro plošný integrál přes kulovou plochu S_k můžeme psát:

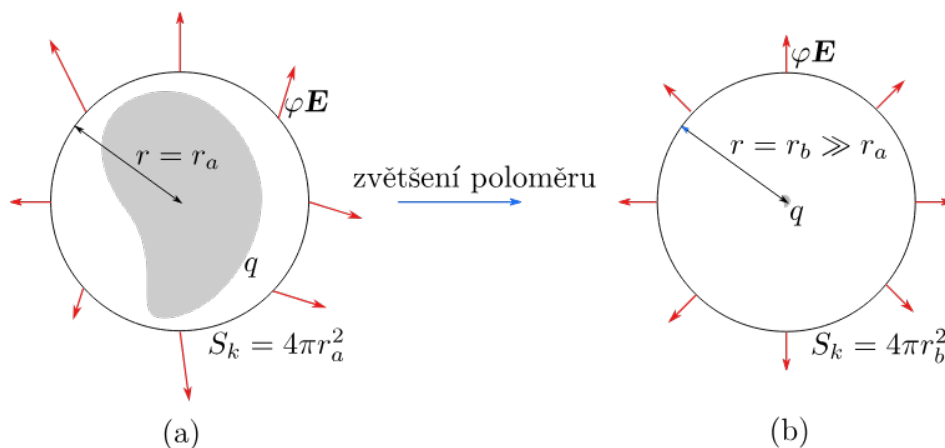
$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon_0}{2} \oint_{S_k} (\varphi \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} &\approx \frac{\varepsilon_0}{2} \oint_{S_k} \varphi E dS = \frac{\varepsilon_0}{2} \varphi E \underbrace{\oint_{S_k} dS}_{=4\pi r^2} = \\ &= \frac{\varepsilon_0}{2} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} 4\pi r^2 = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \frac{q^2}{r}, \quad (20.116) \end{aligned}$$

kde q celkový náboj uvažované spojitě lokalizované distribuce nábojů.

Ve velkých vzdálenostech od uvažované distribuce elektrických nábojů můžeme tedy konstatovat, že velikost intenzity elektrického pole klesá s kvadrátem poloměru dané koule ($\sim 1/r^2$) a potenciál je nepřímo úměrný tomuto poloměru ($\sim 1/r$). Tedy odtud plyne, že integrand klesá s třetí mocninou poloměru dané koule ($\sim 1/r^3$), kdežto plocha, přes kterou integrujeme roste jen s kvadrátem poloměru, takže můžeme zhruba říct, že plošný integrál je úměrný převrácené hodnotě poloměru uvažované koule ($\sim 1/r$), tedy s rostoucím poloměrem r kulové plochy S_k **klesá**. Jelikož výsledek integrace nemá být ovlivněn velikostí zvoleného objemu, přes který budeme integrovat, zvolíme si neomezený poloměr uvažované koule $r \rightarrow \infty$, tedy budeme provádět integraci přes celý prostor. Na základě výše uvedeného bude v tomto případě plošný integrál roven nule a my můžeme pro tento případ přepsat vztah (20.114) jako

$$W_p = \frac{\varepsilon_0}{2} \iiint_{\substack{\text{Celý} \\ \text{prostor}}} E^2(\mathbf{r}) dV. \quad (20.117)$$

Pozoruhodné je, že integrand obsahuje pouze kvadrát intenzity elektrického pole. Víme, že intenzita \mathbf{E} může být nenulová i v místech, kde nejsou elektrické náboje. To nám umožňuje formulovat následující závěr: *Nositelem elektrostické energie*



Obrázek 20.24: (a) Kulová plocha o poloměru $r = r_a$, který je blízký vlastním geometrickým rozměrům lokalizované objemové distribuce elektrických nábojů. (b) Poloměr uvažované kulové plochy $r = r_b \gg r_a$ výrazně převyšuje geometrické rozměry lokalizované objemové distribuce elektrických nábojů. Lokalizovaná spojitá distribuce elektrického náboje přechází v model bodového náboje.

nejdou náboje, nýbrž prostor v okolí těchto nábojů, tj. elektrostatické pole. Každý objemový element tohoto pole obsahuje energii:

$$\frac{\varepsilon_0}{2} E^2 dV. \quad (20.118)$$

Odtud můžeme zavést objemovou hustotu elektrické energie (energie objemové jednotky)

$$w_e = \frac{\varepsilon_0}{2} E^2. \quad (20.119)$$

Příklad 20.9.1

Nalezněte elektrickou energii rovnoměrně rozloženého náboje o celkové velikosti q na povrchu koule o poloměru R .

Řešení:

Vztah (20.108) je možné přepsat pomocí převodního vztahu (20.109) pro námi uvažovaný případ spojitě plošně rozloženého náboje ($dq = \sigma dS$):

$$W_p = \frac{1}{2} \int_q \varphi(\mathbf{r}) dq = \frac{1}{2} \iint_S \sigma(\mathbf{r}) \varphi(\mathbf{r}) dS.$$

Potenciál na povrchu námi uvažované koule je konstantní a je dán vztahem:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{R}.$$

Takže pro elektrickou energii rovnoměrně rozloženého náboje na povrchu koule ($\sigma = q/S_k = q/(4\pi R^2) = \text{konst.}$) dostáváme:

$$W_p = \frac{1}{2} \iint_{S_k} \sigma(\mathbf{r}) \varphi(\mathbf{r}) dS = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \frac{q}{R} \underbrace{\sigma \iint_{S_k} dS}_{=4\pi R^2} = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \frac{q^2}{R}.$$

Ke stejnému výsledku bychom měli dospět i při použití vztahu (20.117).

Ze závěrů kapitoly 20.7 víme, že elektrické pole uvnitř povrchově nabitě koule je nulové, $\mathbf{E} = \mathbf{0}$ pro $r < R$. Také odtud víme, že elektrická intenzita uvažované koule je

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \mathbf{r}^0,$$

odtud

$$E^2 = \frac{1}{(4\pi\epsilon_0)^2} \frac{q^2}{r^4}.$$

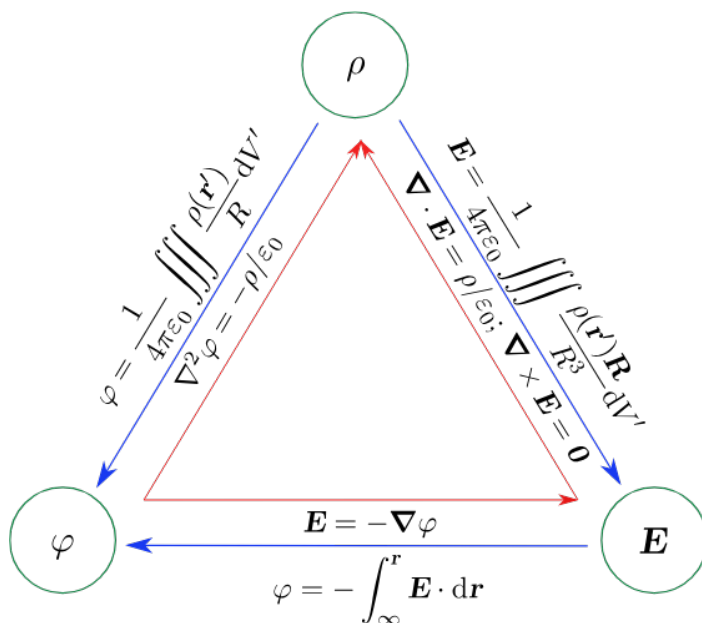
Dosazením do vztahu (20.117) dostaneme:

$$\begin{aligned} W_p &= \frac{\epsilon_0}{2} \iiint_{\text{Celý prostor}} E^2 dV = \frac{\epsilon_0}{2} \frac{1}{(4\pi\epsilon_0)^2} \int_R^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{q^2}{r^4} r^2 \sin\vartheta dr d\vartheta d\varphi = \\ &= -\frac{\epsilon_0}{2} \frac{q^2}{(4\pi\epsilon_0)^2} 4\pi \int_R^\infty \frac{1}{r^2} dr = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{R}. \end{aligned}$$

Skutečně se výsledky pomocí obou přístupů k výpočtu energie shodují.

20.10 Schematické shrnutí výsledných vztahů

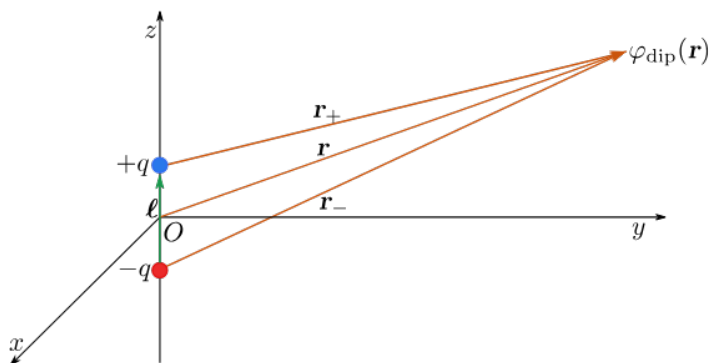
Výsledky, ke kterým jsme dospěli v předcházejících kapitolách můžeme schematicky shrnout pomocí obrázku 20.25. Tento obrázek nám znázorňuje, jakými vztahy jsou navzájem spojeny vždy dvě ze tří veličin důležitých pro popis elektrostatického pole ve vakuu: ρ , φ a \mathbf{E} .



Obrázek 20.25: Schematické shrnutí získaných poznatků.

20.11 Elektrické pole elektrického dipólu

Uvažujme dva bodové elektrické náboje o stejné velikosti q , ale opačného znamení, tj. $+q$ a $-q$, které jsou velmi blízko sebe ve srovnání se vzdáleností, ve které budeme vyšetřovat jejich elektrické pole. Tyto dva bodové náboje představují **elektrický dipól**, viz obr. 20.26. Souřadnicovou soustavu volíme tak, aby se tyto bodové náboje nacházely symetricky kolem počátku O na ose z . Vektor mající počátek v místě bodového náboje $-q$ a konec v místě bodového náboje $+q$ označíme ℓ . Zavedeme si novou vektorovou fyzikální veličinu

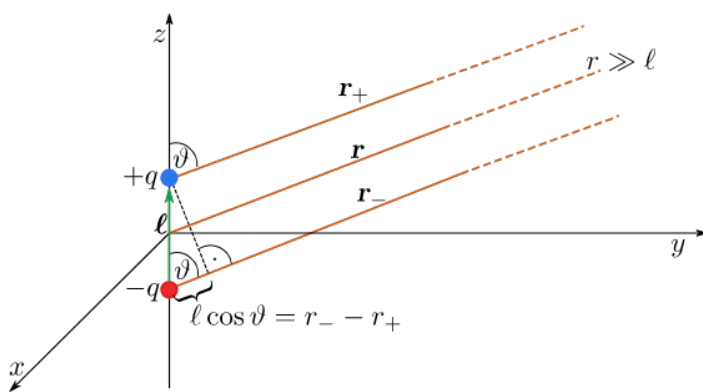


Obrázek 20.26: Schematický obrázek k výpočtu elektrického pole elektrického dipólu.

$$\mathbf{p} = q\ell, \quad (20.120)$$

kterou nazýváme **elektrický dipólový moment**.

Elektrický potenciál elektrického dipólu je, díky symetrii úlohy, stejný ve všech



Obrázek 20.27: Schematický obrázek k určení rozdílu vzdáleností r_- a r_+ .

místech mající stejnou vzdálenost od počátku r . Ukazuje-li polohový vektor \mathbf{r} na jeden z těchto bodů, pak lze s ohledem na vztah (20.42) a na značení zachycené na obr. 20.26 vyjádřit elektrický potenciál uvažovaného dipólu jako

$$\varphi_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\mathbf{r}_+|} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\mathbf{r}_-|} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r_- - r_+}{r_+ r_-}. \quad (20.121)$$

novou vektorovou fyzikální veličinu. Vzhledem k tomu, že předpokládáme, že vyšetřujeme elektrické pole dipólu ve vzdálenosti výrazně větší než je velikost vektoru ℓ , tj. $r \gg \ell$, pak platí, že $r_+ \approx r \approx r_-$, tedy na krátké vzdálenosti je možné považovat vektory \mathbf{r}_+ , \mathbf{r} a \mathbf{r}_- za téměř rovnoběžné, viz obr. 20.27, potom můžeme psát, že $r_+ r_- \approx r^2$ a $r_- - r_+ \approx \ell \cos \vartheta$ (viz obr. 20.27), což uplatníme ve vztahu (20.121) pro jeho další úpravu následujícím způsobem:

$$\varphi_{\text{dip}}(\mathbf{r}) \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\ell \cos \vartheta}{r^2} = \frac{q\ell}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos \vartheta}{r^2} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos \vartheta}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3}. \quad (20.122)$$

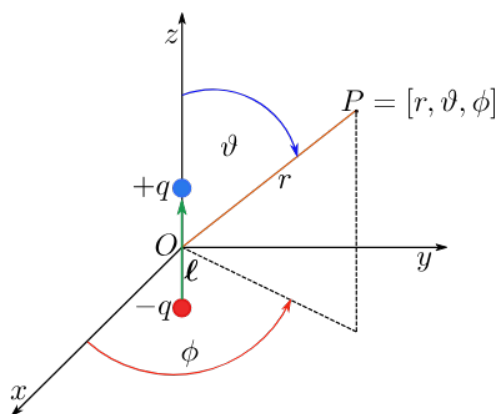
Protože tento vztah pro elektrický potenciál elektrického dipólu platí s dostatečnou přesností, když ℓ odpovídá mikroskopickým rozměrům a r rozměrům makroskopickým, tak bude používat v tomto vztahu rovnost, tj.

$$\varphi_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3}. \quad (20.123)$$

Pro vektor intenzity elektrického pole dipólu můžeme na základě vztahu (20.18) psát:

$$\mathbf{E}_{\text{dip}} = -\nabla \varphi_{\text{dip}}. \quad (20.124)$$

S ohledem na charakter řešeného problému můžeme s výhodou použít kulových



Obrázek 20.28: Zavedení kulových souřadnic určujících polohu bodu P .

souřadnic, viz obr. 20.28, k vyjádření nabla operátoru, kdy vyjdeme z obecného vztahu pro nabla operátor v ortogonálních křivočarých souřadnicích (4.71), kam dosadíme $u_1 = r$, $u_2 = \vartheta$, $u_3 = \phi$ a za Laméovy koeficienty ze vztahů (4.94), tedy

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \mathbf{e}_\vartheta + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \phi} \mathbf{e}_\phi. \quad (20.125)$$

Výraz pro intenzitu elektrického pole uvažovaného dipólu v bodě P nalezneme pomocí vztahu (20.124), kde za φ_{dip} dosadíme ze vztahu (20.123). Jednotlivé složky vektoru intenzity elektrického pole \mathbf{E}_{dip} ve sférických souřadnicích dostaneme použitím nabla operátoru (20.125):

$$E_r = -\frac{\partial \varphi_{\text{dip}}}{\partial r} = \frac{2p \cos \vartheta}{4\pi\epsilon_0 r^3}, \quad (20.126)$$

$$E_{\vartheta} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_{\text{dip}}}{\partial \vartheta} = \frac{p \sin \vartheta}{4\pi\epsilon_0 r^3}, \quad (20.127)$$

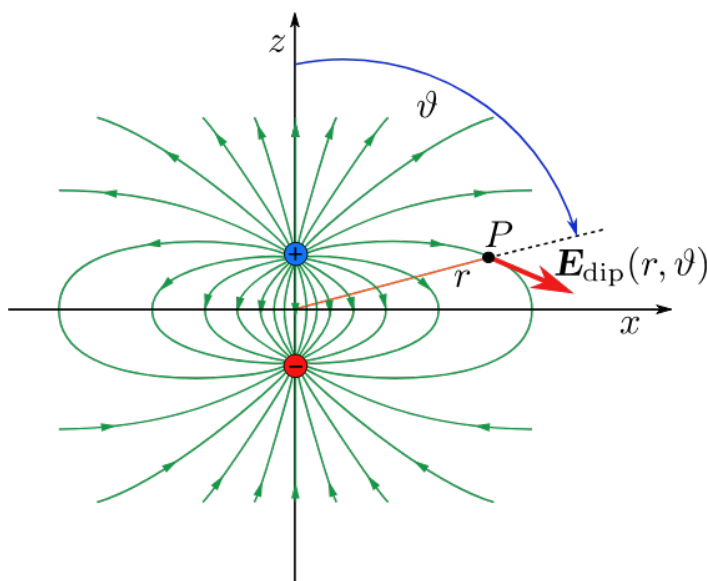
$$E_{\phi} = -\frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial \varphi_{\text{dip}}}{\partial \phi} = 0. \quad (20.128)$$

Složka E_{ϕ} je nulová, což je důsledek osové symetrie elektrického pole uvažovaného dipólu.

Odtud dostaneme

$$\mathbf{E}_{\text{dip}}(r, \vartheta) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2 \cos \vartheta \mathbf{e}_r + \sin \vartheta \mathbf{e}_{\vartheta}). \quad (20.129)$$

Na obrázku 20.29 je pomocí siločár znázorněno pole elektrického dipólu, které je



Obrázek 20.29: Zobrazení elektrického pole elektrického dipólu pomocí siločár.

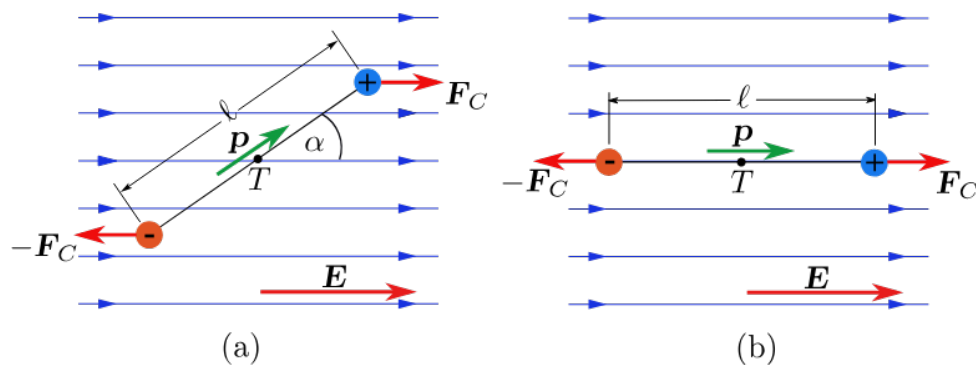
popsáno vztahem (20.129).

Za povšimnutí stojí skutečnost, že velikost intenzity elektrického dipólu (20.129), klesá s třetí mocninou vzdálenosti od zdroje (velikost intenzity elektrického monopólu klesá s druhou mocninou) a jeho elektrický potenciál (20.123) s druhou mocninou (elektrický potenciál monopólu klesá s první mocninou vzdálenosti) od zdroje.

Dále poznamenejme, že pro stejné vzdálenosti r bodu, kde zjišťujeme elektrický potenciál dipólu elektrického dipólu, bude tento potenciál měnit svoji hodnotu v závislosti na orientaci jednotkového vektoru \mathbf{r}^0 polohového vektoru $\mathbf{r} = r\mathbf{r}^0$, protože se tímto bude měnit hodnota úhlu ϑ . Vztah (20.123) bude platit, i když elektrický dipól bude ležet sice v počátku, ale jeho náboje nebudou ležet na ose z . V tomto případě úhel ϑ bude odpovídat úhlu, který svírají vektory ℓ , resp. \mathbf{p} s vektorem \mathbf{r} .

Kdyby se elektrický dipól nenacházel v počátku, ale v místě o polohovém vektoru \mathbf{r}' , potom lze snadno ukázat, že by vztah (20.123) musel být nahrazen vztahem:

$$\varphi_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{R}}{R^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \quad (20.130)$$



Obrázek 20.30: Elektrický dipól v homogenním elektrickém poli o intenzitě \mathbf{E} .

Umístíme-li dipól do vnějšího homogenního elektrického pole, bude výsledná síla působící na dipól nulová, avšak na tento dipól bude působit moment silové dvojice (13.3) (viz obr. 20.30 (a))

$$\mathbf{M}^D = \boldsymbol{\ell} \times \mathbf{F}_C = \boldsymbol{\ell} \times q\mathbf{E} = q\boldsymbol{\ell} \times \mathbf{E} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}. \quad (20.131)$$

Působení silové dvojice vede k výslednému natočení (polarizaci) dipólu ve směru vnějšího elektrického pole, viz obr. 20.30 (b).

V případě, že vnější elektrické pole bude nehomogenní, tak na dipól bude působit i nenulová výsledná síla.

Kapitola 21

Elektrostatické pole v materiálovém prostředí

V této kapitole se budeme věnovat elektrickému poli v materiálovém prostředí. Různá materiálová prostředí reagují rozdílným způsobem na vnější elektrické pole \mathbf{E}_0 . Na základě experimentálních zkušeností můžeme rozdělit materiálová prostředí (materiály) do dvou skupin. Jednu skupinu tvoří tzv. vodiče a druhou skupinu tzv. dielektrika (izolanty, nevodiče).

Vodiče jsou materiály (např. kovy), které obsahují velké množství elektrických nábojů, jež se mohou volně pohybovat daným materiálem. Elektrické náboje u vodičů se mohou ve vodiči pohybovat na makroskopických škálách, tj. v celém objemu vodiče, avšak nemohou jej opustit¹.

Naopak dielektrika jsou materiály, které obsahují rovněž velké množství elektrických nábojů, avšak tyto náboje jsou vázány k daným atomům či molekulám, takže se mohou pohybovat jen na mikroskopických škálách.

21.1 Dielektrika a jejich polarizace

Při vložení dielektrika do vnějšího elektrického pole můžeme podle jeho způsobu odezvy na přítomnost tohoto pole rozdělit dielektrika na polární a nepolární.

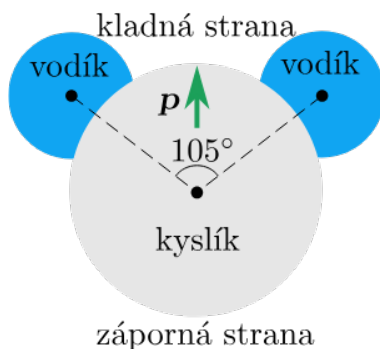
Polární dielektrika

Molekuly polárních dielektrik (např. voda, oxid uhelnatý, amoniak) mají stálé (permanентní) dipólové momenty, $\mathbf{p}_\alpha \neq \mathbf{0}$ (indexem α rozlišujeme jednotlivé molekuly dielektrika).

Nepolární dielektrika

Jsou tvořena molekulami, které se vyznačují středovou souměrností (např. hélium). V případě, že na ně nepůsobí vnější elektrické pole, mají nulový dipólový moment, $\mathbf{p}_\alpha = \mathbf{0}$.

¹V případě, že by elektrické náboje mohly opustit vodič, mluvíme o tzv. emisi.



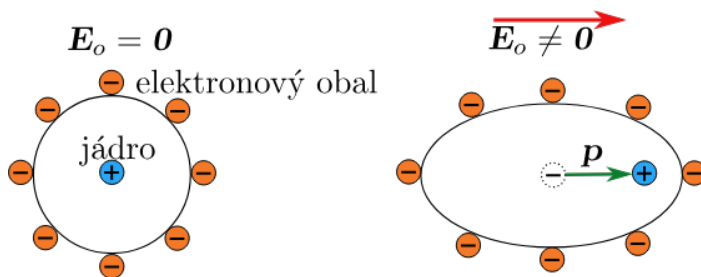
Obrázek 21.1: Polární molekula vody (H_2O).

Vytvoření a uspořádání dipólů v dielektriku do směru vnějšího pole nazýváme polarizací.

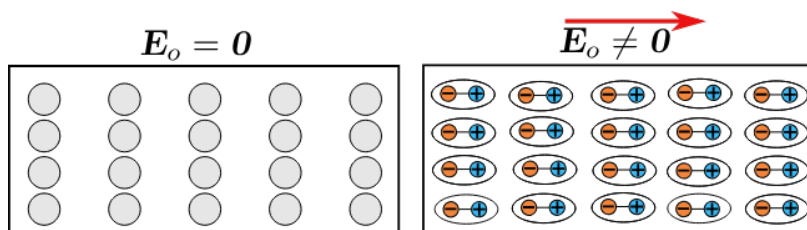
Rozlišujeme dva základní mechanismy polarizace:

1. Indukovaná polarizace

- (a) **Elektronová polarizace** - projevuje se ve všech dielektrikách. Její podstata spočívá v deformaci elektronových obalů atomů v elektrickém poli. Tato deformace se projevuje posunutím „těžiště“ záporného náboje (elektronů) vůči „těžišti“ kladného náboje (jader) v atomu. Posunutí těžišť nábojů je velmi malé, řádově 10^{-15} m. Tím vznikne dipól, jehož dipólový moment má směr souhlasný s vnějším elektrickým polem. Říkáme, že takový dipólový moment je **indukovaný** elektrickým polem. Elektronová polarizace se projevuje až do velmi vysokých kmitočtů.



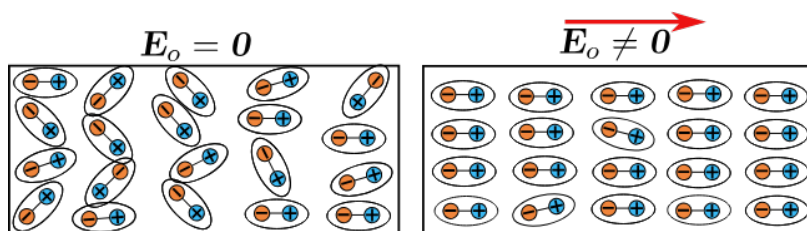
Obrázek 21.2: Elektronová polarizace, intenzita vnějšího elektrického pole E_o .



Obrázek 21.3: Indukovaná iontová polarizace.

(b) **Iontová polarizace** je způsobena změnou relativní polohy iontů v molekulách dielektrika vlivem vnějšího elektrického pole. Iontová polarizace se rovněž projevuje až do vysokých kmitočtů.

2. **Orientační polarizace** se projevuje u polárních dielektrik, kde se elektrické dipóly natačejí do směru vnějšího elektrického pole. Protože molekuly konají nepřetržitě nahodilý tepelný pohyb, nejsou uspořádány úplně, tj. orientace všech elektrických dipólů (molekul) není shodná s vnějším elektrickým polem. Na základě výše uvedeného můžeme říci, že vlivem tepelného pohybu dochází jen k částečné polarizaci dielektrika. Samozřejmě částečnou polarizaci chápeme ve smyslu střední časové hodnoty. Přitom je orientace elektrických dipólů tím úplnější, čím větší je intenzita vnějšího elektrického pole a čím nižší je teplota dielektrika (s klesající teplotou klesá tepelný pohyb molekul, a tedy i dipólů). Ve střídavých elektrických polích se při vyšších kmitočtech projevuje setrvačnost polárních molekul, které již nestačí sledovat změny elektrického pole.



Obrázek 21.4: Orientační polarizace.

21.2 Elektrické pole polarizovaného dielektrika

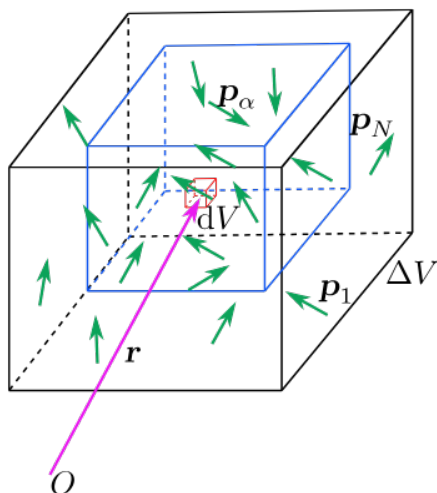
Ve vnějším elektrickém poli představují atomy a molekuly dielektrika elementární dipóly s dipólovými momenty \mathbf{p}_α . Z makroskopického hlediska se polarizace dielektrika projevuje tím, že se na povrchu dielektrického tělesa objeví vázaný náboj. Tento povrchový vázaný náboj vzniká v důsledku toho, že na povrchu dielektrika nejsou koncové náboje elementárních dipólů vykompenzovány. Makroskopický objem dielektrika vykazuje ve vnějším elektrickém poli nenulový elektrický dipólový moment. Vázaný náboj je záporný na té straně tělesa, do níž vstupují siločáry vnějšího elektrického pole, a kladný na té straně, ze které siločáry z tělesa vystupují.

Polarizaci dielektrika můžeme z makroskopického hlediska popsat vektorovou veličinou nazvanou **elektrická polarizace** \mathbf{P} . Tato veličina je definována vztahem:

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum_{\alpha=1}^{N(\Delta V)} \mathbf{p}_\alpha}{\Delta V} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta V}, \quad (21.1)$$

kde $\Delta \mathbf{p}$ představuje elektrický dipólový moment objemu ΔV a $N(\Delta V)$ určuje počet elektrických dipólových momentů v objemu ΔV , který je natolik velký, že můžeme uvažovat, že se vektor polarizace mění s se změnou polohy spojitě.

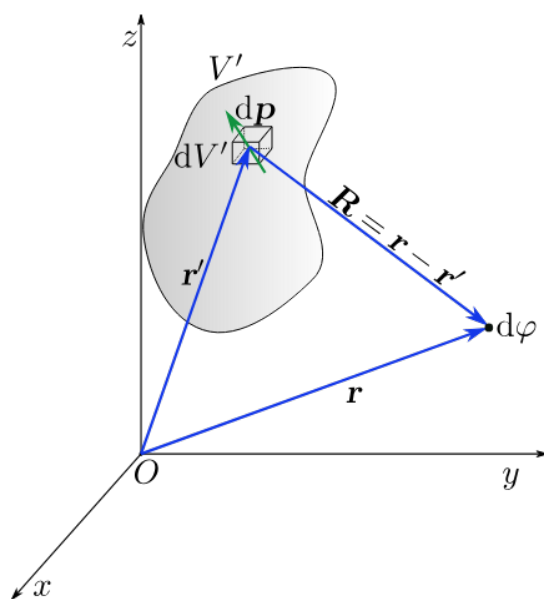
Ze vztahu (21.1) je zřejmé, že vektor elektrické polarizace \mathbf{P} se rovná elektrickému dipólovému momentu objemové jednotky dielektrika, která bude mít všude stejnou



Obrázek 21.5: Polarizované dielektrikum o objemu ΔV , který se limitně zmenšuje k místu určenému polohovým vektorem \mathbf{r} (zelené vektory reprezentují jednotlivé elektrické dipólové momenty).

polarizaci jako v uvažovaném místě \mathbf{r} , ke kterému se objem limitně zmenšuje, viz obr. 21.5. Vektor elektrické polarizace je tedy funkcí prostorových souřadnic, $\mathbf{P}(\mathbf{r})$. Na vektor elektrické polarizace je možné rovněž pohlížet jako na vektor udávající objemovou hustotu elektrických dipólových momentů v daném místě. Jednotkou elektrické polarizace je C.m^{-2} .

Uvažujme dielektrikum o objemu V' , které je polarizované. Pro uvažovaný objem zpolarizovaného dielektrika je znám vektor polarizace $\mathbf{P}(\mathbf{r})$. Objemovému elementu zpolarizovaného dielektrika dV' v místě \mathbf{r}' odpovídá elektrický dipólový moment $d\mathbf{p} = \mathbf{P}(\mathbf{r}')dV'$, viz obr. 21.6. Pomocí vztahu (20.130) můžeme určit



Obrázek 21.6: Polarizované dielektrikum o objemu V' .

potenciál uvažovaného elementu zpolarizovaného dielektrika v místě o polohovém

vektoru \mathbf{r} jako

$$d\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{d\mathbf{p} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' . \quad (21.2)$$

Pro další úpravu tohoto vztahu použijeme identitu (viz (A.31)):

$$\nabla' \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} , \quad (21.3)$$

kde ∇' je nabla operátor podle čárkovaných souřadnic $(\partial/\partial x' \mathbf{i} + \partial/\partial y' \mathbf{j} + \partial/\partial z' \mathbf{k})$. Využitím této identity můžeme upravit vztah (21.2):

$$d\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot \nabla' \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) dV' . \quad (21.4)$$

K další úpravě použijeme následující identitu:

$$\nabla \cdot (f\mathbf{F}) = (\nabla f) \cdot \mathbf{F} + f \nabla \cdot \mathbf{F} . \quad (21.5)$$

S pomocí této identity je možné dále upravit vztah (21.4):

$$d\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\nabla' \cdot \left(\frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) - \frac{\nabla' \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] dV' . \quad (21.6)$$

Abychom získali příspěvek k elektrickému potenciálu v bodě o polohovém vektoru \mathbf{r} od všech objemových elementů zpolarizovaného dielektrika, provedeme následující integraci přes celý jeho objem V' :

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{V'} \left[\nabla' \cdot \left(\frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) - \frac{\nabla' \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] dV' = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{V'} \nabla' \cdot \left(\frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) dV' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{V'} \frac{-\nabla' \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' . \end{aligned} \quad (21.7)$$

Nyní použijeme Gaussovy věty (12.56) pro první člen na pravé straně této rovnosti:

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_{S'} \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{S}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{V'} \frac{-\nabla' \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_{S'} \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{V'} \frac{-\nabla' \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' . \end{aligned} \quad (21.8)$$

Porovnáním prvního integrálu na pravé straně s integrálem (20.36) a druhého integrálu s integrálem (20.34) dospějeme k následujícím vztahům:

$$\sigma_v(\mathbf{r}') = \mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{n} , \quad (21.9)$$

$$\rho_v(\mathbf{r}') = -\nabla' \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}') , \quad (21.10)$$

kde σ_v je plošná hustota vázaného náboje a ρ_v je objemová hustota vázaného náboje, viz obr. 21.7.

Je zřejmé, že když k vyjádření plošné a objemové hustoty vázaných nábojů použijeme nečárkovaných souřadnic, tak analogicky můžeme psát:

$$\sigma_v(\mathbf{r}) = \mathbf{P}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} , \quad (21.11)$$

$$\rho_v(\mathbf{r}) = -\nabla \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}) . \quad (21.12)$$

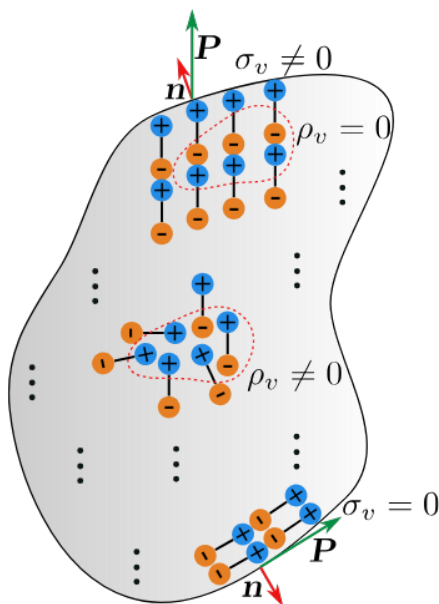
Pomocí značek pro plošnou a objemovou hustotu vázaného náboje přepíšeme pravou stranu rovnosti (21.8):

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_{S'} \frac{\sigma_v(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{V'} \frac{\rho_v(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' . \quad (21.13)$$

Tento vztah lze interpretovat způsobem:

Elektrostatické pole dipólů objemově rozložených v dielektriku o objemu V s hustotou $\mathbf{P}(\mathbf{r})$ lze formálně popsat jako superpozici elektrostatického pole vázaných nábojů objemově rozložených v tomto objemu s hustotou $\rho_v = -\nabla \cdot \mathbf{P}$ a elektrostatického pole vázaných nábojů plošně rozložených na povrchu S uvažovaného objemu V s hustotou $\sigma_v = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}$, kde \mathbf{n} je jednotkový vektor kladné normály.

Nalezený vztah (21.13) lze také interpretovat tak, že potenciál, a tudíž i elektrické pole, polarizovaného dielektrika je stejný jako potenciál vytvořený nábojem s objemovou hustotou $\rho_v = -\nabla \cdot \mathbf{P}$ a nábojem s plošnou hustotou $\sigma_v = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}$. Stačí tedy jen nalézt vázané náboje a pak spočítat pole, které vytvářejí, a to stejným způsobem jako v případě jakýchkoliv jiných objemově a plošně rozložených nábojů. Tímto tedy nemusíme provádět integraci infinitezimálních dipólových momentů způsobem:



Obrázek 21.7: Vznik vázaných nábojů na ploše a v objemu dielektrika.

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{V'} \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' . \quad (21.14)$$

Tento vztah jsme získali integrací výrazu (21.2).

V případě homogenního rozložení dipólů v uvažovaném dielektriku, kdy hustota \mathbf{P} je v celém objemu konstantní ($\mathbf{P} = \text{konst.}$), je zřejmě $\nabla \cdot \mathbf{P} = 0$ (tedy $\rho_v = 0$). Potenciál je pak dán jen plošným integrálem z pravé strany vztahu (21.13) a pole vytvářené polarizovaným dielektrikem je pak ekvivalentní poli uvedeného plošného vázaného náboje.

Nyní si spočítáme hodnotu celkového vázaného náboje ve zpolarizovaném dielektriku pomocí vztahů (21.9) a (21.10) a Gaussovy věty (12.56):

$$\begin{aligned} q_v &= \oint_{S'} \sigma_v(\mathbf{r}') dS' + \iiint_{V'} \rho_v(\mathbf{r}') dV' = \\ &= \oint_{S'} \mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{n} dS' + \iiint_{V'} -\nabla' \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}') dV' = \oint_{S'} \mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{S}' - \oint_{S'} \mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{S}' = 0 . \end{aligned} \quad (21.15)$$

Odtud vidíme, že celkový vázaný náboj ve zpolarizovaném dielektriku je **nulový**.

21.3 Gaussův zákon v přítomnosti dielektrika

V předchozí kapitole jsme si ukázali, že elektrické pole polarizovaného dielektrika je polem vázaných nábojů v tomto dielektriku. Výsledné elektrické pole pak můžeme považovat za pole určené spolupůsobením vázaných a volných nábojů a pole náboje volného. Volným nábojem budeme rozumět jakýkoliv náboj, který **není** výsledkem polarizace dielektrika.

V dielektriku mohou být vedle vázaných nábojů rovněž náboje volné² či můžeme uvažovat vodič obklopený dielektrikem apod.. Objemovou hustotu volného náboje budeme značit ρ a objemovou hustotu vázaného náboje jsme v předchozí kapitole označili jako ρ_v , takže celková hustota náboje uvnitř dielektrika je:

$$\rho_c = \rho + \rho_v . \quad (21.16)$$

Dosadíme-li do Gaussova zákona v diferenciálním tvaru (20.60) celkovou objemovou hustotu náboje, pak dostaneme:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_c}{\varepsilon_0} = \frac{\rho + \rho_v}{\varepsilon_0} , \quad (21.17)$$

kde \mathbf{E} je celkové elektrické pole.

Pro další úpravu tohoto vztahu použijeme rovnost (21.10):

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_c}{\varepsilon_0} = \frac{\rho - \nabla \cdot \mathbf{P}}{\varepsilon_0} . \quad (21.18)$$

Vynásobením této rovnice konstantou ε_0 a následnou úpravou dostaneme:

$$\nabla \cdot (\varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \rho . \quad (21.19)$$

²Neuvažujeme ideální dielektrikum, které obsahuje výhradně vázané náboje.

Zavedeme si novou vektorovou veličinu:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \quad (21.20)$$

kterou nazýváme **vektor elektrické indukce**. Pomocí této veličiny lze **Gaussův zákon pro elektrostatické pole v dielektriku v diferenciálním tvaru** zapsat jako

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho. \quad (21.21)$$

Gaussův zákon pro elektrostatické pole v dielektriku lze snadno vyjádřit i v integrálním tvaru:

$$\Psi = \oiint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = q, \quad (21.22)$$

kde $q = \iiint_V \rho dV$ je celkový **volný** náboj nacházející se v uzavřené ploše S , která uzavírá objem V a značka Ψ reprezentuje tzv. **elektrický indukční tok**.

Tvar Gaussovy věty (21.22) nám říká, že součet všech volných nábojů uvnitř uzavřené plochy se rovná toku vektorového pole \mathbf{D} touto plochou, tj. počtu siločar pole \mathbf{D} , které z plochy vystupují zmenšeného o počet těch, které do plochy vstupují. Je potřeba mít na paměti, že pole \mathbf{D} je jen jakýmsi lidským „vynálezem“, příroda ho nezná, je tak umělé, jako je umělé dělení elektrických nábojů na volné a vázané. Kdežto pole \mathbf{E} je pole reálné, jeho velikost můžeme v principu přímo měřit, avšak k určení pole \mathbf{D} se musíme podívat na všechny náboje v širokém okolí a rozhodnout, jsou-li volné nebo vázané.

Maxwellovy rovnice pro elektrostatické pole v dielektriku jsou v diferenciálním tvaru představují následující rovnice:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \quad (21.23)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}. \quad (21.24)$$

Maxwellovy rovnice elektrostatického pole v dielektriku v integrálním tvaru představují následující rovnice:

$$\oiint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = q, \quad (21.25)$$

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = 0. \quad (21.26)$$

V kapitole 20.4 jsme si ukázali, že je možné z Gaussova zákona ve tvaru (20.52) odvodit zákon Coulombův. Díky podobnosti tvaru Gaussova zákona (21.25) a (20.52) bychom mohli mylně předpokládat, že i pro vektor elektrické indukce \mathbf{D} existuje podobný Coulombův zákon. Abychom mohli usuzovat na podobnost mezi vektorovým polem $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ a vektorovým polem $\mathbf{D}(\mathbf{r})$, je nutné připomenout i další vlastnost elektrického pole, a to, že $\nabla \times \mathbf{E} = -\nabla \times \nabla \varphi = \mathbf{0}$. Avšak pro vektor elektrické indukce **obecně neplatí**, že $\nabla \times \mathbf{D} = \mathbf{0}$ neboť

$$\nabla \times \mathbf{D} = \nabla \times (\varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \varepsilon_0 \underbrace{\nabla \times \mathbf{E}}_{=0} + \nabla \times \mathbf{P}. \quad (21.27)$$

Odtud je zřejmé, že $\nabla \times \mathbf{D} = \mathbf{0}$ jen v případě, že $\nabla \times \mathbf{P} = \mathbf{0}$, což nemusí být vždy splněno.

Na základě vektorové analýzy platí, že rotace gradientu skalární funkce je vždy rovna nulovému vektoru, tj.
 $\nabla \times \nabla f = \mathbf{0}$.

Odtud také plyne, že pro vektor elektrické indukce neexistuje „potenciál“, jehož gradient by se rovnal vektoru elektrické indukce, jak je tomu v případě vektoru elektrické intenzity.

21.4 Materiálové vztahy a elektrické pole v dielektriku

Z popisu mechanismu polarizace dielektrika uvedeném v kapitole 4.11 je zřejmé, že vložíme-li do vnějšího elektrického pole \mathbf{E}_o kus dielektrika, pak toto vnější elektrické pole zpolarizuje dielektrikum a zpolarizované dielektrikum vytváří vlastní pole, které se vektorově skládá s vnějším polem, což má za následek modifikace nastalé polarizace, která se pak vektorově skládá s vnějším polem atd. Tedy je zřejmé, že výsledné pole uvnitř dielektrika \mathbf{E} je výsledkem postupné regrese. Odtud můžeme konstatovat, že vektor elektrické polarizace \mathbf{P} bude záviset na výsledném elektrickém poli³ \mathbf{E} , tj. $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{E})$, kde $\mathbf{P}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Nebude-li toto elektrické pole příliš silné, můžeme si závislost $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{E})$ vyjádřit pomocí následujícího rozvoje

$$P_i = \sum_{j=1}^3 a_{ij} E_j + \sum_{j,k=1}^3 b_{ijk} E_j E_k + \dots, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (21.28)$$

kde koeficienty a_{ij} jsou složky tenzoru druhého řádu a b_{ijk} jsou složky tenzoru třetího řádu. Složky tenzorů jsou dány specifickými vlastnostmi daného dielektrika a stanovují se experimentálně. Při normálních teplotách (ne příliš nízkých) a pro běžné intenzity elektrického pole je lineární aproximace dostačující, takže můžeme jak koeficienty b_{ijk} , tak koeficienty u členů vyšších řádů rozvoje, položit rovny nule. Takováto dielektrika nazýváme **lineární dielektrika**.

V případě, že vektory \mathbf{P} a \mathbf{E} nejsou kolineární, mluvíme o **anizotropním dielektriku** a zpravidla vztah mezi složkami těchto vektorů zapisujeme jako

$$P_i = \sum_{j=1}^3 a_{ij} E_j = \varepsilon_0 \sum_{j=1}^3 \chi_{eij} E_j, \quad (21.29)$$

kde χ_{eij} jsou složky tenzoru⁴ elektrické susceptibility $\overleftrightarrow{\chi}_e$. Zvláštní případ pak představují **lineární dielektrika izotropní**, pro která platí

$$a_{ij} = a \delta_{ij}, \quad (21.30)$$

tj.

$$P_i = a E_i, \quad (21.31)$$

neboli

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi_e \mathbf{E}, \quad (21.32)$$

³Toto výsledné elektrické pole není zapříčiněno jen polarizací, ale i volnými náboji v dielektriku.

⁴Jedná se o tenzor 2. řádu.

kde $\varepsilon_0\chi_e = a$ a χ_e se nazývá elektrická susceptibilita.

Dosazením ze vztahu (21.32) do vztahu (21.20) dostaneme:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \varepsilon_0 \chi_e \mathbf{E} = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \mathbf{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad (21.33)$$

kde $\varepsilon_r = 1 + \chi_e$ (pro vakuum je $\varepsilon_r = 1$) je relativní permitivita a $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$ absolutní permitivita dielektrika.

Jedná-li se o lineární izotropní dielektrikum nehomogenní, potom $\varepsilon = \varepsilon(\mathbf{r})$. Pro homogenní izotropní dielektrikum platí, že $\varepsilon = konst.$

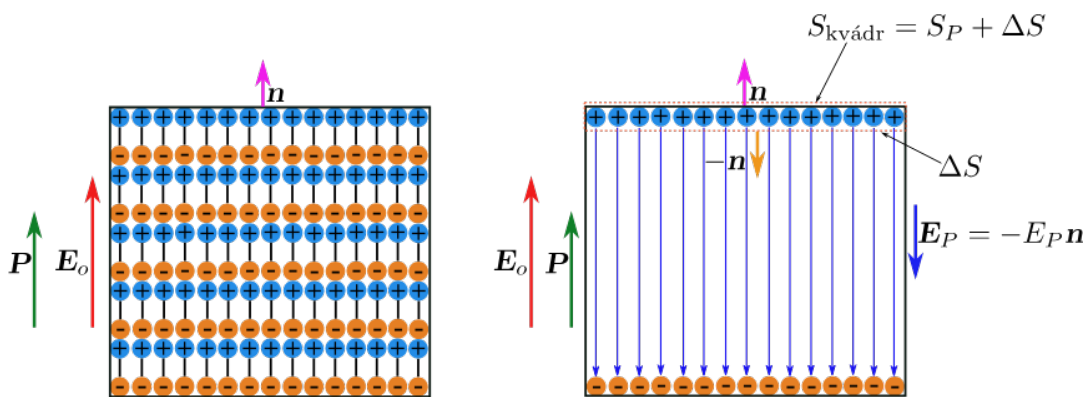
Pro izotropní lineární dielektrikum můžeme znovu napsat výše uvedené vztahy, které představují tzv. materiálové vztahy:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad (21.34)$$

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi_e \mathbf{E} = \varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1) \mathbf{E}. \quad (21.35)$$

Uvažujme homogenně polarizované lineární dielektrikum tvaru kvádru, jehož podstavy, mající plochu ΔS , jsou kolmé na siločáry vnějšího elektrického pole, které označíme \mathbf{E}_o . V kapitole 21.3 jsme dospěli k závěru, že polarizovaný objem dielektrika se chová jako určité ekvivalentní rozdělení plošných a objemových vázaných nábojů. Vzhledem k předpokladu, že námi uvažované dielektrikum je homogenně polarizované, tj. $\mathbf{P} = konst.$, bude hustota objemového vázaného náboje podle vztahu (21.10) rovna nule, $\rho_v = -\nabla \cdot \mathbf{P} = 0$. Popisovanou situaci si také můžeme představit tak, že kladné a záporné náboje dipólů polarizovaného dielektrika se v jeho objemu vzájemně vykompenzují a uplatní se pouze kladné náboje dipólů tvořící hraniční rovinu (kladné plošné vázané náboje), ze které siločáry vnějšího (polarizujícího) elektrického pole vystupují a záporné náboje tvořící hraniční rovinu protilehlou (záporné plošné vázané náboje), do které siločáry vstupují, viz obr. 21.8.

Plošnou hustotu kladných vázaných nábojů u polarizovaného dielektrika spočítáme



Obrázek 21.8: Elektrické pole v homogenním polarizovaném dielektriku.

táme podle vztahu (21.11):

$$\sigma_v^+ = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} = P = konst. . \quad (21.36)$$

Plošné vázané náboje vytváří uvnitř dielektrika polarizační elektrické pole \mathbf{E}_P , které má směr opačný než vektor elektrické polarizace \mathbf{P} , viz obr. 21.8. Velikost

polarizační intenzity určíme pomocí Gaussova zákona (20.52). Horní podstavu dielektrika o ploše ΔS s kladnými plošnými vázanými náboji uzavřeme plochou kvádru $S_{\text{kvádr}}$, přičemž plocha podstavy tohoto kvádru se shoduje s velikostí podstavy tohoto polarizovaného dielektrika. Tato plocha kvádru uzavírá celkový kladný vázaný náboj $q_v = \sigma_v^+ \Delta S = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} \Delta S$. Ze závěrů kapitoly 20.6 je zřejmé, že vektor polarizační intenzity \mathbf{E}_P vytéká pouze spodní podstavou zvolené uzavřené plochy o velikosti ΔS , přičemž je tento vektor kolmý k podstavě, viz obrázek 21.8. Tedy z Gaussova zákona v integrálním tvaru dostáváme:

$$\oint_S \mathbf{E}_P \cdot d\mathbf{S} = E_P \iint_{\Delta S} dS = E_P \Delta S = \frac{q_v}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma_v^+ \Delta S}{\varepsilon_0} = \frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{n} \Delta S}{\varepsilon_0}. \quad (21.37)$$

Odtud je možné pro velikost polarizačního pole psát:

$$E_P \Delta S = \frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{n} \Delta S}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_P = \frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{n}}{\varepsilon_0}. \quad (21.38)$$

Chceme-li si vyjádřit vektor intenzity polarizačního pole, pak můžeme na základě obr. 21.8 psát:

$$\mathbf{E}_P = E_P \mathbf{E}_P^0 = E_P (-\mathbf{n}) = -E_P \mathbf{n}. \quad (21.39)$$

Za E_P sem dosadíme ze vztahu (21.38):

$$\mathbf{E}_P = -E_P \mathbf{n} = -\frac{\overbrace{\mathbf{P} \cdot \mathbf{n}}^{=1}}{\varepsilon_0} \mathbf{n} = -\frac{\mathbf{P}}{\varepsilon_0}. \quad (21.40)$$

Pro výslednou intenzitu elektrického pole v dielektriku \mathbf{E} , s ohledem na vztah (21.40), dostáváme:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_o + \mathbf{E}_P = \mathbf{E}_o - \frac{\mathbf{P}}{\varepsilon_0}. \quad (21.41)$$

Do této rovnosti dosadíme za vektor polarizace materiálový vztah (21.35):

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_o - \frac{\varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\mathbf{E}}{\varepsilon_0} = \mathbf{E}_o - \varepsilon_r \mathbf{E} + \mathbf{E}. \quad (21.42)$$

Odtud si můžeme vyjádřit vztah pro výsledné elektrické pole v dielektriku jako

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{E}_o}{\varepsilon_r}. \quad (21.43)$$

Z tohoto vztahu je zřejmé, že výsledné elektrické pole v lineárním izotropním dielektriku je ε_r -krát slabší než vnější elektrické pole, ve kterém se dielektrikum nachází.

Poznámka

V dielektriku se síly mezi náboji zmenší ε_r -krát. Zvlášť výrazně se tato vlastnost projevuje u vody a tím se vysvětluje i velká disociační vlastnost vody. Při rozpouštění solí, jejichž molekuly mají iontovou vazbu (např. NaCl, CuSO₄) ve vodě, se elektrická síla mezi ionty (např. Na⁺, Cl⁻) ve vodě zmenší přibližně 80-krát, a to vyvolá rozpad molekuly na samostatné ionty. Tímto vzniká elektrolyt, který je schopen volnými kladnými a zápornými ionty zprostředkovat vedení elektrického proudu.

Látka	typ	ε_r
hélium	nepolární	1,000065
vodík	nepolární	1,00025
vzduch	nepolární	1,00060
oxid uhličitý	nepolární	1,00097
olej	nepolární	2,24
benzen	nepolární	2,28
skla	nepolární	4 – 7
chlorid sodný	nepolární	6
ethanol	polární	25,0
nitrobenzen	polární	35,7
voda	polární	80,1

Tabulka 21.1: Relativní permitivita vybraných dielektrik.

21.4.1 Elektrostatické pole na rovinném rozhraní dvou dielektrik

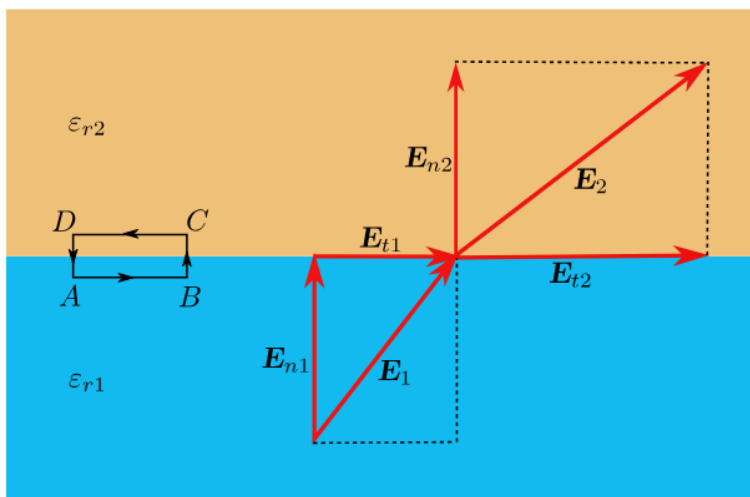
Uvažujme rovinné rozhraní dvou lineárních izotropních dielektrik s relativními permitivitami ε_{r1} a ε_{r2} . Jak vektor elektrické intenzity \mathbf{E} , tak vektor elektrické indukce \mathbf{D} , rozložíme na normálovou a tečnou složku vzhledem k rozhraní uvažovaných dvou dielektrik, viz obr. 21.9 a 21.10. Budeme vyšetřovat, jak se budou složky těchto vektorů měnit při přechodu z jednoho dielektrika do druhého.

Nejdříve se zaměříme na složky elektrické intenzity. K tomuto účelu sestojíme v těsné blízkosti rozhraní uzavřenou dráhu ve tvaru úzkého obdélníku $ABCD$. Protože elektrostatické pole je polem konzervativním, tak bude platit:

$$\oint_{ABCD} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = 0. \quad (21.44)$$

Integrál v tomto vztahu rozepíšeme na čtyři integrály podél jednotlivých stran uvažovaného obdélníku, přičemž budeme uvažovat, že vektory intenzity elektrického pole pro obě dielektrika budou mít složky $\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_{t1} + \mathbf{E}_{n1}$ a $\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_{t2} + \mathbf{E}_{n2}$ (viz obr. 21.9):

$$\int_A^B E_{t1} dr + \int_B^C E_{n1} dr - \int_C^D E_{t2} dr - \int_D^A E_{n1} dr = 0. \quad (21.45)$$



Obrázek 21.9: Složky vektoru elektrické intenzity na rozhraní dvou rovinných dielektrik.

Protože vyšetřujeme pole v těsné blízkosti rozhraní, pak v limitním případě $BC \rightarrow 0$ a $DA \rightarrow 0$ můžeme integrály s normálovými složkami vektoru elektrické intenzity (tedy druhý a čtvrtý integrál) v rovnici (21.45) položit rovny nule, takže dostáváme:

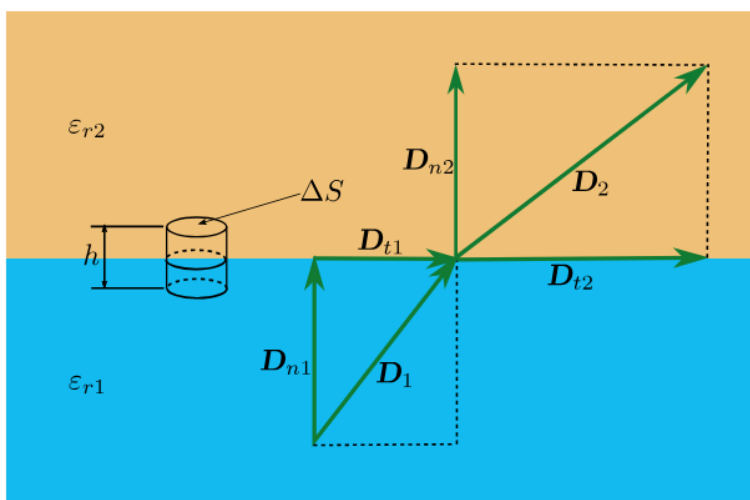
$$\int_A^B E_{t1} dr - \int_C^D E_{t2} dr = 0. \quad (21.46)$$

Vzhledem k tomu, že délky stran obdélníku mezi body AB a CD se rovnají, tak odtud vyplývá:

$$E_{t1} = E_{t2}. \quad (21.47)$$

Tedy můžeme konstatovat, že *velikost tečné složky intenzity elektrického pole se na rozhraní dvou dielektrik nemění*.

S ohledem na vztah (21.33) lze výsledek (21.47) přepsat:



Obrázek 21.10: Složky vektoru elektrické indukce na rozhraní dvou rovinných dielektrik.

$$\frac{D_{t1}}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r1}} = \frac{D_{t2}}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r2}} \quad (21.48)$$

a odtud dostáváme

$$\frac{D_{t1}}{D_{t2}} = \frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}}, \quad (21.49)$$

tedy velikost tečné složky vektoru elektrické indukce se na rozhraní dvou dielektrik skokově změní v poměru odpovídajících relativních permitivit.

Nyní vyšetříme, jak se změní normálové složky vektoru elektrické indukce při přechodu z jednoho dielektrika do druhého. Za tímto účelem na rozhraní uvažovaných dielektrik zvolíme uzavřenou plochu S_v ve tvaru válce, jehož podstavy budou rovnoběžné s rozhraním. Budeme-li předpokládat ideální dielektrikum, potom v námi uvažované uzavřené ploše se nenachází žádný volný náboj, takže podle vztahu (21.25) dostaneme

$$\oiint_{S_v} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = 0. \quad (21.50)$$

Integrál na levé straně této rovnice rozepíšeme na tok vektoru elektrické indukce \mathbf{D} základnami válce ΔS a tok plochou jeho pláště S_{pl} :

$$- \iint_{\Delta S} D_{n1} dS + \iint_{S_{pl}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{\Delta S} D_{n2} dS = 0. \quad (21.51)$$

U prvního integrálu je znaménko minus, protože elektrický indukční tok vstupuje spodní základnou do uzavřené plochy⁵. Dále předpokládejme, že se základny válce ΔS neomezeně blíží k rozhraní, tj. $h \rightarrow 0$, a tedy $S_{pl} \rightarrow 0$. Díky tomuto předpokladu je možné integrál pro tok elektrické indukce pláštěm válcové plochy (prostřední integrál) položit roven nule, takže dostáváme:

$$- \iint_{\Delta S} D_{n1} dS + \iint_{\Delta S} D_{n2} dS = 0. \quad (21.52)$$

Jelikož základy válce jsou stejně velké, tak odtud vyplývá:

$$D_{n1} = D_{n2}. \quad (21.53)$$

Odtud můžeme konstatovat, že normálová složka vektoru elektrické indukce se na rozhraní dvou dielektrik nemění.

Opět pomocí vztahu (21.33) přepíšeme tuto rovnost:

$$\varepsilon_0 \varepsilon_{r1} E_{n1} = \varepsilon_0 \varepsilon_{r2} E_{n2} \quad (21.54)$$

a odtud dostáváme:

$$\frac{E_{n1}}{E_{n2}} = \frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}}. \quad (21.55)$$

Z tohoto vztahu lze vidět, že velikost normálové složky vektoru elektrické intenzity se na rozhraní dvou dielektrik mění skokem a to v obráceném poměru relativních permitivit.

Odtud je zřejmé, že v případě, kdy elektrické pole není kolmé k rozhraní dvou dielektrik, dochází k lomu elektrických siločar i elektrických indukčních čar.

⁵ $\mathbf{D}_{n1} \cdot d\mathbf{S} = \mathbf{D}_{n1} \cdot \mathbf{n} dS = D_{n1} dS \cos \pi = -D_{n1} dS$.

21.4.2 Vlastnosti dielektrik

Mezi nelineární dielektrika patří skupina krystalických látek zvaná **feroelektrika**. Feroelektrika se chovají v elektrickém poli obdobně jako feromagnetické látky v magnetickém poli. U těchto dielektrik pozorujeme ve feroelektrickém stavu velmi vysoké hodnoty relativní permitivity ($\varepsilon_r = 10^3 - 10^4$). Relativní permitivita těchto látek velmi výrazně závisí na směru (anizotropní dielektrikum) a teplotě. Relativní permitivita se mění také v případě časově proměnných elektrických polí⁶. Mezi feroelektrika patří např. Seignettova sůl (vínan sodnodraselný $\text{NaKC}_4\text{H}_4\text{O}_6 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$), fosforečnan draselný (KH_2PO_4), titaničitan barnatý (BaTiO_3) aj. Feroelektrické látky mají doménovou strukturu, tj. obsahují oblasti (domény), ve kterých jsou elementární dipólové momenty rovnoběžné, tedy tyto oblasti se vyznačují spontánní (samovolnou) vnitřní elektrickou polarizací. Ve feroelektrickém stavu jsou v látce celé oblasti spontánní elektrické polarizace. Feroelektrický stav trvá jen pod tzv. **Curieovou teplotou**, při jejím překročení přechází látka do paraelektrického stavu a její permitivita prudce klesá⁷. Ve feroelektrickém stavu se u těchto látek pozoruje elektrická hystereze, která se při kruhové změně intenzity elektrického pole E projeví hysterezní smyčkou závislosti $P(E)$.

Některé feroelektrické látky, jako je směs pryskyřice a vosku, karnaubský vosk, organické sklo aj., polarizované silným elektrickým polem v tekutém stavu, si po držení konstantní hodnotu vektoru polarizace i bez elektrického pole, necháme-li je ztuhnout v tomto polarizovaném stavu. Takovéto látky nazýváme **elektrety** a představují obdobu permanentních magnetů.

Při působení elektrického pole na iontové krystaly dochází při polarizaci krystalu také k deformaci krystalové mřížky a tím ke změně rozměrů krystalu. Tento jev nazýváme **elektrostrikcí** nebo také **obráceným piezoelektrickým jevem**. Elektrostrikce se využívá zejména pro generování ultrazvukových polí a v krystalových elektronických oscilátorech.

Piezoelektrický jev pozorujeme při mechanickém namáhání (tlakem, tahem, ohybem) některých krystalů, což vede ke změně elektrické polarizace krystalu, která se projeví jako indukovaný povrchový elektrický náboj, čímž vznikne mezi deformovanými plochami elektrické napětí. Povrchová hustota náboje u piezoelektrických krystalů je úměrná mechanickému napětí, kterému je krystal vystaven. Piezoelektrický jev se projevuje jen u těch krystalů, kde elementární krystalová buňka není elektricky symetrická. Takovou látkou jsou všechny krystaly ve feroelektrickém stavu nebo např. křemen (SiO_2). Pomocí piezoelektrického materiálu dochází k přeměně mechanické energie na elektrickou, čehož se využívá k detekci deformací, pohybu, sil, tlaku či vibrací zpracováním vytvořeného elektrického signálu.

U některých dielektrik se můžeme setkat i s **pyroelektrickým jevem**. Zahřejeme-li takovéto dielektrikum (např. turmalín), tak u něho dojde k objemovým změnám a na dielektriku se objeví povrchové náboje.

⁶Například u vody při velmi vysokých frekvencích dochází k poklesu relativní permitivity až na hodnotu cca 1,77.

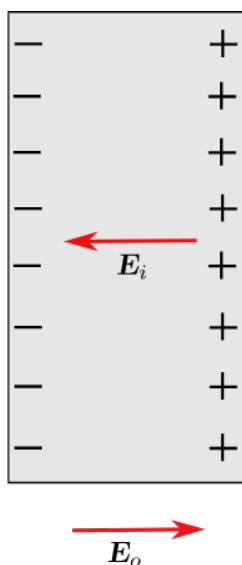
⁷Existují i feroelektrika, která nemají Curieovu teplotu (bod) a nachází se ve feroelektrickém stavu až do teploty tání.

21.5 Vodiče v elektrostatickém poli

V rámci této kapitoly budeme vyšetřovat chování vodičů vložených do elektrostatického pole, přičemž budeme předpokládat, že se jedná o vodiče dokonalé. Dokonalým (ideálním) vodičem rozumíme materiál obsahující zcela volné nosiče elektrického náboje. I když dokonalý vodič představuje idealizaci skutečných vodičů, existuje řada látek, které můžeme považovat za téměř dokonalé vodiče, takže naše závěry týkající se dokonalých vodičů můžeme aplikovat i na vodiče reálné, a tedy nebudeme mezi nimi rozlišovat.

Vložíme-li vodič do vnějšího elektrostatického pole \mathbf{E}_o , tak se volné náboje začnou vlivem tohoto pole pohybovat, kladné náboje na jednu stranu a záporné náboje na stranu opačnou (ve skutečnosti v kovech, jako reprezentantech téměř dokonalých vodičů, se pohybují jen elektrony, čímž na jedné straně vodiče budou převažovat kladné náboje jader jinak elektricky neutrálních atomů, takže efekt je vlastně stejný, jako když uvažujeme současně pohyb záporných a kladných nábojů). Jakmile náboj dosáhne povrchu vodiče, začne se zde hromadit (předpokládáme, že elektrický náboj nemůže opustit vodič), tedy kladný náboj na jedné straně a záporný náboj na straně druhé, viz obr. 21.11. Tím že se na **vnitřním** povrchu vodiče naindukují elektrické náboje, dojde ke zpolarizování vodiče a uvnitř vodiče vznikne elektrické pole, které je opačně orientované k poli vnějšímu, \mathbf{E}_i . Můžeme také říci, že se ve vodiči indukuje elektrický dipólový moment orientovaný souhlasně se směrem vnějšího elektrického pole. Pohyb elektrických nábojů bude pokračovat tak dlouho, dokud makroskopické elektrické pole uvnitř vodiče zcela nevykompenzuje vnější elektrické pole. Výsledkem tedy je, že elektrické pole uvnitř vodiče zcela vymizí (pouze uvnitř vodiče), neboli intenzita elektrického pole $\mathbf{E} = \mathbf{E}_o + \mathbf{E}_i = \mathbf{0}$ uvnitř vodiče. Popsaný jev se nazývá **elektrostatická indukce**. Vně vodiče bude samozřejmě elektrické pole nenulové.

Náboje na povrchu vodiče se rozloží téměř okamžitě (cca 10^{-12} s), takže můžeme



Obrázek 21.11: Elektrostatická indukce ve vodiči.

elektrické pole považovat opět za elektrostatické. Dojde-li ke zvětšení vnějšího elektrického pole, tak vodič opět poskytne elektrické náboje, které se budou hro-

madit na jeho povrchu, čímž dojde opět k vykompenzování elektrického pole uvnitř vodiče. Bude-li vnější pole nehomogenní, potom indukovaný elektrický dipólový moment bude orientován ve směru tohoto pole a vodič bude vtahován do oblasti, kde je vnější pole silnější.

Je-li $\mathbf{E} = \mathbf{0}$, pak z Gaussova zákona (20.60) přímo vyplývá, že uvnitř vodiče je objemová hustota elektrického náboje nulová (objemová hustota kladného a záporného náboje je ve všech místech vodiče stejná), $\rho = 0$. Také odtud vyplývá, že ve vodiči se nachází stejné množství kladného i záporného náboje, takže celkový náboj je roven nule. Pak i množství indukovaného kladného i záporného náboje je stejné, takže jejich součet je roven nule. Náboj na ploše je rozmístěn tak, aby minimalizoval svoji potenciální energii a dosáhl elektrostatické rovnováhy. V důsledku silového působení povrchových nábojů vzniká na povrchu vodiče mechanické napětí.

Uvažujme jakékoliv dva body o polohových vektorech \mathbf{r}_1 a \mathbf{r}_2 , které se nachází buď uvnitř nebo na povrchu vodiče. Potom bude pro rozdíl potenciálů (20.94) platit⁸

$$\varphi(\mathbf{r}_2) - \varphi(\mathbf{r}_1) = - \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = 0, \quad (21.56)$$

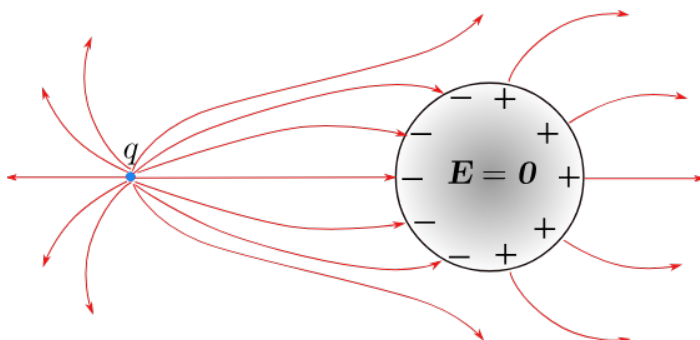
tedy

$$\varphi(\mathbf{r}_2) = \varphi(\mathbf{r}_1). \quad (21.57)$$

Odtud vyplývá, že vodič má v celém svém objemu stejný elektrický potenciál, a tudíž povrch vodiče je ekvipotenciálou, takže intenzita elektrostatického pole, a tedy i siločáry, jsou kolmé k povrchu vodiče⁹, viz kapitola 20.3. Tedy siločáry elektrostatického pole vstupují zvnějšku kolmo k povrchu vodiče tam, kde je soustředěn záporný plošný náboj, a vystupují opět kolmo k povrchu tam, kde je soustředěn kladný plošný náboj.

Přiblížíme-li k nenabitému vodiči elektrický náboj, pak se bude tento náboj s vodičem vzájemně přitahovat. Tato skutečnost je dána tím, že přiložený náboj vytváří elektrostatické pole, čímž u vodiče dojde k výše popsané elektrostatické indukci, takže elektrické pole uvnitř vodiče bude **nulové**, viz obr. 21.12.

Jiná situace nastane v případě, že se uvnitř vodiče nachází dutina, do které



Obrázek 21.12: Kladný náboj umístěný vně vodivé koule.

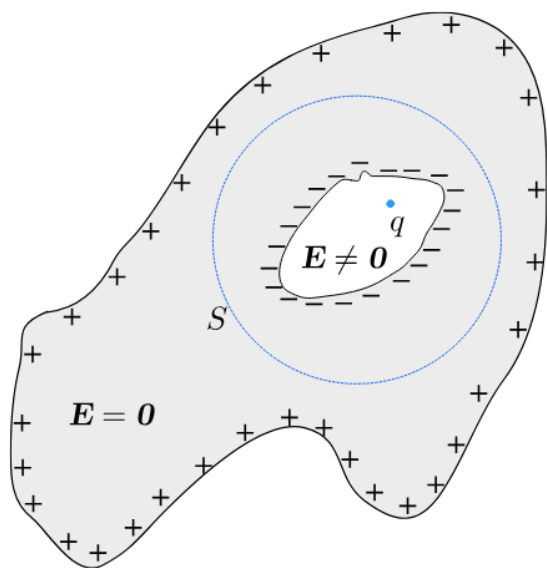
⁸Intenzita uvnitř vodiče je $\mathbf{E} = \mathbf{0}$.

⁹Kdyby tomu tak nebylo, měla by intenzita složku ve směru povrchu a přesouvala by po povrchu náboj, což by bylo v rozporu s naší představou elektrostatické rovnováhy.

vložíme např. kladný elektrický náboj $q > 0$. Tento náboj zapříčiní, že se jak na vnitřním, tak na vnějším povrchu budou indukovat náboje tak, aby uvnitř vodiče bylo elektrické pole nulové, tj. $\mathbf{E} = \mathbf{0}$, viz obr. 21.13. Budeme uvažovat uvnitř tohoto vodiče uzavřenou plochu S , ve které se nachází i uvažovaná dutina s kladným elektrickým nábojem, viz obr. 21.13. Protože intenzita uvnitř vodiče je nulová, bude její tok uzavřenou plochou S roven nule,

$$\oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 0. \quad (21.58)$$

Z Gaussova zákona v integrálním tvaru (20.52) potom plyne, že celkový náboj



Obrázek 21.13: Kladný náboj uvnitř dutiny vodiče.

uzavřený v uvažované ploše S je roven nule, tedy velikost indukovaného záporného náboje na ploše dutiny q_{ind}^- musí být rovna velikosti kladného náboje v dutině, tj.

$$q_{\text{ind}}^- + q = 0 \quad \Rightarrow \quad q_{\text{ind}}^- = -q. \quad (21.59)$$

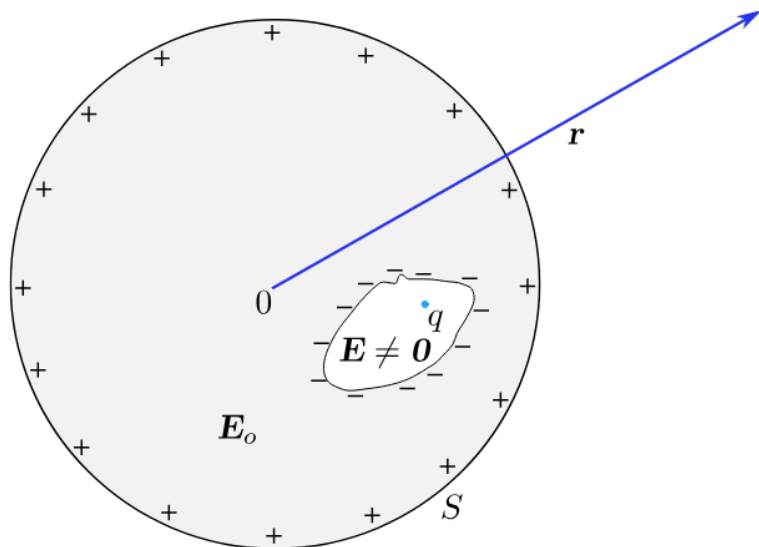
Protože celkový náboj ve vodiči je roven nule, je samozřejmě množství indukovaného množství kladného náboje q_{ind}^+ na vnějším povrchu vodiče rovno množství indukovaného záporného náboje, takže jejich součet je roven nule.

Odtud je zřejmé, že

$$\underbrace{q_{\text{ind}}^+ + q_{\text{ind}}^-}_{=0} + q = q. \quad (21.60)$$

Tento výsledek nám říká, že z vnějšku se nám vodič jeví jako nabitý kladným nábojem q , takže vně vodiče existuje nenulové elektrické pole. Tuto situaci si budeme demonstrovat na příkladu vodiče ve tvaru koule, v jehož dutině se nachází kladný elektrický náboj $q > 0$, viz obr. 21.14. Bez újmy na obecnosti umístíme střed koule do počátku souřadnic. Ze vztahů (21.59) a (21.60) vyplývá, že indukovaný náboj rozložený na vnější ploše koule $q_{\text{ind}}^+ = q$. Tento náboj je stejnoměrně rozložen po povrchu koule ($\sigma = \text{konst.}$), protože asymetrický vliv náboje uvnitř dutiny je zastíněn indukovaným nábojem q_{ind}^- na vnitřní ploše kolem dutiny. V

kapitole 20.7 jsme však dospěli k závěru, že tímto způsobem nabitá koule vytváří elektrické pole shodné s polem bodového náboje umístěného do jejího středu. Tedy elektrické pole (intenzita) námi uvažované vodivé koule s dutinou, ve které je uvězněn kladný elektrický náboj q je dáno vztahem:



Obrázek 21.14: Kladný náboj uvnitř dutiny vodivé koule.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^3} \mathbf{r}. \quad (21.61)$$

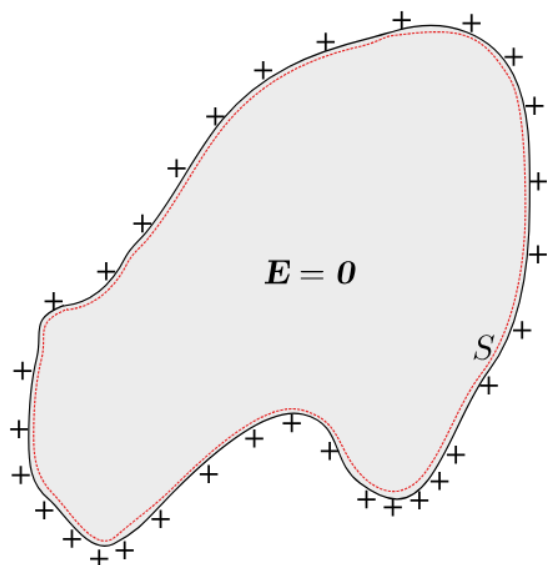
Jedná se o poměrně zajímavý výsledek, který lze interpretovat tak, že námi uvažovaná vodivá koule nám jaksi „zatajuje“ informace o dutině (její tvar, umístění v kouli) a poskytuje nám jen informaci, že obsahuje náboj $q > 0$.

Přeneseme-li na izolovaný vodič elektrický náboj (nabitý vodič), pak se všechny rozmístí na **vnějším** povrchu vodiče, protože náboje stejného znaménka se vzájemně odpuzují. Přenesením náboje na izolovaný vodič se vytvoří elektrické pole uvnitř vodiče. To silově působí na volné náboje ve vodiči a pohybuje jimi tak dlouho, až celkové pole uvnitř dutiny vymizí ($\mathbf{E} = \mathbf{0}$) a nastane elektrostatická rovnováha (celý děj proběhne velmi rychle). V opačném případě by se ve vodiči v ustáleném stavu pohybovaly volné náboje z místa na místo a vznikly by tímto „věčné“ proudy, které však ve vodiči neexistují.

Díky nulovému elektrickému poli uvnitř nabitého vodiče bude zřejmě platit, stejně jako pro nenabitý vodič v elektrickém poli, že všechny body vodiče, je jedno zda uvnitř či na povrchu, mají stejný potenciál¹⁰. Protože uvnitř nabitého vodiče je $\mathbf{E} = \mathbf{0}$, pak z Gaussova zákona (20.60) přímo vyplývá, že uvnitř vodiče je objemová hustota elektrického náboje nulová, $\rho = 0$. Zvolíme-li Gaussovu plochu S těsně pod povrchem nabitého vodivého tělesa, pak z důvodu, že $\mathbf{E} = \mathbf{0}$ všude uvnitř vodiče, potom z Gaussova zákona v integrálním tvaru (20.52) plyne, že i celkový náboj uvnitř této plochy je nulový. Odtud je zřejmé, že přivedený náboj musí ležet jen na povrchu vodiče, viz obr. 21.15.

Uvažujme nyní případ izolovaného vodiče s dutinou, na který byl přiveden kladný

¹⁰Tento závěr můžeme zobecnit i na případ izolovaného nabitého vodiče nacházejícího se ve

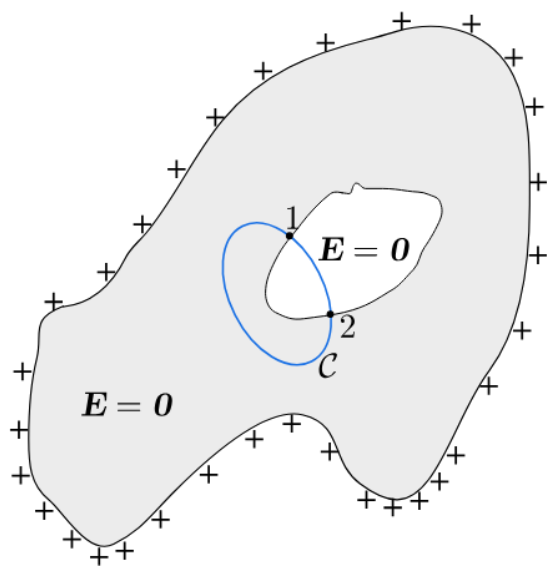


Obrázek 21.15: Gaussova plocha těsně pod povrchem nabitého izolovaného vodiče.

náboj. Bude nás zajímat elektrické pole uvnitř jeho dutiny. Je zřejmé, že ze stejného důvodu jako v případě izolovaného nabitého vodiče bez dutiny, bude intenzita všude uvnitř nulová (mimo dutiny). Vzhledem k tomu, že elektrické pole je polem konzervativním, bude muset platit, že cirkulace vektoru intenzity podél křivky C , viz obr. 21.16, bude rovna nule. Křivkový integrál podél uzavřené křivky C rozdělíme na dva křivkové integrály

$$0 = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} + \int_2^1 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}. \quad (21.62)$$

Protože víme, že intenzita elektrického pole je uvnitř vodiče nulová, bude i nulový



Obrázek 21.16: Pole uvnitř dutiny izolovaného nabitého vodiče.

vnějším elektrickým poli.

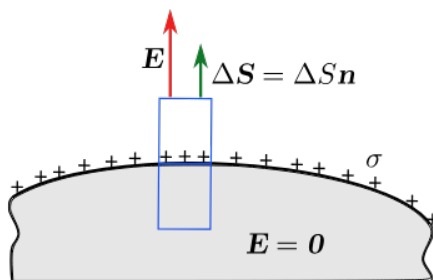
křivkový integrál z bodu 1 do bodu 2 (první křivkový integrál na pravé straně rovnosti (21.62)). Vzhledem k tomu, že cirkulace vektoru \mathbf{E} podél křivky \mathcal{C} je rovna nule, musí na základě rovnosti (21.62) platit, že i křivkový integrál z bodu 2 do bodu 1, tj. po křivce vedoucí dutinou, bude roven nule

$$\int_2^1 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = 0. \quad (21.63)$$

Protože jsme k danému výsledku dospěli pro libovolnou uzavřenou křivku \mathcal{C} , je rovnice (21.63) splněna jen za předpokladu, že intenzita uvnitř dutiny je nulová ($\mathbf{E} = \mathbf{0}$), a že na povrchu dutiny se nenachází žádný elektrický náboj. Odtud plyne závěr, že *intenzita uvnitř dutiny izolovaného vodiče, na který byl přiveden libovolně velký elektrický náboj, je vždy rovna nule.*

Vodič s dutinou se nazývá **Faradayova klec** a slouží k odstínění citlivých zařízení. Protože i automobil představuje Faradayovu klec, můžeme se v automobilu cítit relativně bezpečně¹¹ během bouřky.

Nyní určíme hodnotu intenzity elektrostatického pole v blízkosti povrchu kladně nabitého izolovaného vodiče. Zvolíme uzavřenou plochu S_v ve tvaru velmi nízkého válce s malými podstavami ΔS , jehož osa je kolmá k povrchu vodiče. Jedna podstava je umístěna vně vodiče a druhá uvnitř. Situace je zachycena na obrázku 21.17, kde v části je zobrazen řez vodičem včetně uvažovaného válce. Vzhledem k malým rozměrům válce můžeme zanedbat nehomogenitu pole a nehomogenitu rozložení povrchového náboje. Uvnitř uvažované válcové plochy je uzavřen celkový náboj $\Delta q = \sigma \Delta S$, kde σ je hodnota plošné hustoty v místě válce. Vzhledem k tomu, že všude uvnitř vodiče je $\mathbf{E} = \mathbf{0}$, je tok intenzity elektrického pole podstavou ve vodiči nulový. Tok pláštěm válce je rovněž nulový, neboť siločáry jsou rovnoběžné s osou válce. Tok intenzity uvažovaným válcem bude nenulový jen podstavou válce umístěnou vně vodiče, tedy



Obrázek 21.17: Pole v blízkosti povrchu kladně nabitého izolovaného vodiče.

$$\Delta \Phi_e = \oint_{S_v} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E \Delta S.$$

Z Gaussovy věty (20.52) pak plyne:

$$E \Delta S = \frac{\Delta q}{\epsilon_0} = \frac{\sigma \Delta S}{\epsilon_0}. \quad (21.64)$$

¹¹Udeří-li blesk do automobilu, tak sice nebudeme usmrceni elektrickým proudem, ale můžeme být uvařeni.

Odtud dostáváme:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} . \quad (21.65)$$

Tento výsledek se někdy nazývá **Coulombovou větou**. Z výsledku plyne, že ačkoliv elektrostatické pole vně vodiče je vytvářeno celkovým rozložením nábojů na povrchu vodiče, je v blízkosti povrchu plně určeno lokální hodnotou plošné hustoty náboje.

Na povrchu nabitého vodiče, který není kulově symetrický, se náboj nerozdělí rovnoměrně. Hustota náboje roste se zakřivením, takže na hrotech a hranách může hustota náboje, a tím s ohledem na vztah (21.65) i intenzita elektrického pole vně vodiče, dosahovat velmi vysokých hodnot. Vzduch se může kolem takovýchto hrotů ionizovat a dojít ke vzniku koronového výboje.

21.6 Kapacita vodiče a kondenzátor

Při nabíjení vodivých těles můžeme měřením náboje a potenciálu elektrostatického pole na jejich povrchu zjistit, že různá vodivá tělesa, nabitá stejným nábojem, mají různý potenciál. Tento potenciál závisí na velikosti a tvaru vodivého tělesa, na vzdálenosti od okolních vodičů a na prostředí, kterým je vodivé těleso obklopeno. V následujících dvou kapitolách se budeme zmíněnými závislostmi zabírat podrobněji.

21.6.1 Kapacita osamoceného vodiče

Uvažujme osamocené izolované nabité vodivé těleso s nábojem o plošné hustotě σ , které je umístěno ve vakuu. Celkový náboj rozložený s danou hustotou po ploše vodiče je dán vztahem:

$$q = \iint_{S'} \sigma(\mathbf{r}') dS' , \quad (21.66)$$

kde S' je uzavřená plocha představující povrch uvažovaného vodivého tělesa. Potenciál $\varphi_S(\mathbf{r}_P)$ v libovolném bodě P na povrchu vodiče (povrch vodiče je ekvipotenciálou, protože uvnitř vodiče, jak již víme, je intenzita elektrického pole nulová) bude podle vztahu (20.36):

$$\varphi_S(\mathbf{r}_P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iint_{S'} \frac{\sigma(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}_P - \mathbf{r}'|} dS' = konst. . \quad (21.67)$$

Zvětšíme-li k -krát plošnou hustotu náboje, $\sigma' = k\sigma$, potom podle vztahu (21.66) dostaneme:

$$q' = \iint_{S'} \sigma' dS' = \iint_{S'} k \sigma dS' = kq , \quad (21.68)$$

tedy i náboj na povrchu vodiče vzroste k -krát. Toto k -násobné zvětšení náboje, resp. jeho plošné hustoty, bude mít za následek i změnu potenciálu na povrchu vodiče, tedy

$$\varphi_S(\mathbf{r}_P)' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iint_{S'} \frac{\sigma'(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}_P - \mathbf{r}'|} dS' = \frac{k}{4\pi\varepsilon_0} \iint_{S'} \frac{\sigma(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}_P - \mathbf{r}'|} dS' = k\varphi_S(\mathbf{r}_P) . \quad (21.69)$$

Odtud tedy vyplývá, že se i potenciál zvětší k -krát.

Z nalezených skutečností lze učinit závěr, že *celkový náboj q na osamoceném izolovaném vodiči a potenciál na jeho povrchu jsou veličiny přímo úměrné*. Tedy lze psát:

$$q = C_v \varphi_S, \quad (21.70)$$

kde konstanta úměrnosti C_v se nazývá **kapacita** osamoceného vodiče. Jednotkou kapacity je **farad**, kterému odpovídá značka F.

Ve vakuu je kapacita C_v je pouze funkcí geometrického tvaru vodiče.

Vyjádříme-li si kapacitu ze vztahu (21.70):

$$C_v = \frac{q}{\varphi_S} \quad (21.71)$$

a bude-li potenciál na povrchu vodiče roven 1 V, je evidentní, že v tomto případě bude kapacita číselně rovna náboji, kterým se vodič nabije na potenciál 1 V. Odtud je možné na kapacitu vodiče pohlížet jako na jeho schopnost jímat elektrický náboj.

Příklad 21.6.1

Jaký poloměr R musí mít osamocená nabitá vodivá koule, aby její kapacita byla 1 F?

Řešení:

Potenciál povrchu nabitě koule je:

$$\varphi_S = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R}, \quad (21.72)$$

kde q označíme náboj přivedený na vodivou kouli.

Do vztahu (21.71) dosadíme:

$$C_v = 1 = \frac{q}{\varphi_S} = \frac{q}{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R}} = 4\pi\epsilon_0 R \Rightarrow R = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \approx 9 \cdot 10^9 \text{ m} = 9 \cdot 10^6 \text{ km}. \quad (21.73)$$

Vidíme, že poloměr koule by musel být enormní (více jak desetinásobek poloměru Slunce). Z tohoto důvodu v praxi obvykle vyjadřujeme kapacitu v podílových jednotkách.

21.6.2 Kapacita dvou vodičů (elektrický kondenzátor)

Nechť izolovaný vodič je nabitý nábojem $q > 0$. Do těsné blízkosti tohoto vodiče umístíme druhý vodič, který je nabitý nábojem $-q$. Potenciál prvního vodiče (nesoucí kladný náboj) označíme φ_1 a potenciál druhého vodiče označíme jako φ_2 . Takovéto uspořádání vodičů nazýváme **elektrickým kondenzátorem** či jen **kondenzátorem** a jednotlivé vodiče nazýváme **elektrodami**. Mezi těmito elektrodami

je soustředěno elektrické pole. Kapacitu kondenzátoru C pak definujeme, nezávisle na jeho tvaru, vztahem:

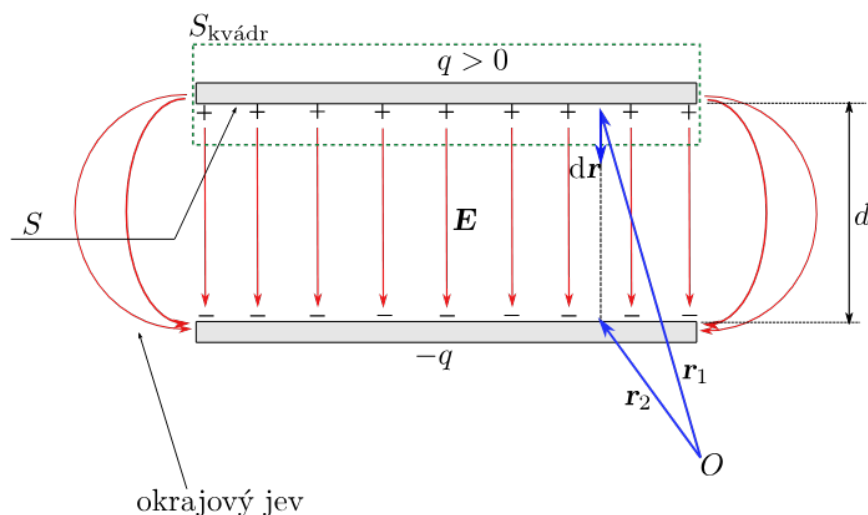
$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{q}{U}, \quad (21.74)$$

kde U je napětí mezi elektrodami kondenzátoru, viz (20.95).

Jednotlivé kondenzátory se liší tvarem elektrod, takže můžeme rozlišovat např. kulové, deskové či válcové kondenzátory.

Standardem je tzv. **deskový kondenzátor**, který se skládá ze dvou vzájemně rovnoběžných vodivých desek (elektrod) o ploše S . Tyto desky jsou od sebe vzdáleny d , viz obrázek 21.18. Předpokládáme, že plocha desek je dostatečně velká a vzdálenost mezi nimi natolik malá, že můžeme zanedbat vliv ostatních elektrických polí. V případě dostatečně velkých ploch uvažovaných desek se téměř veškerý náboj shromáždí na jejich vnitřních stěnách. Ze závěrů kapitoly 20.6 můžeme konstatovat, že elektrické pole je soustředěno pouze v prostoru mezi deskovými elektrodami. Díky předpokladu, že desky se nachází v těsné blízkosti, můžeme elektrické pole mezi deskami považovat za homogenní. Pouze v místech, kde siločáry opouštějí prostor mezi elektrodami se projevují tzv. **okrajové jevy**, které při dalších úvahách zanedbáme.

Velikost intenzity mezi deskami kondenzátoru určíme pomocí Gaussova zákona



Obrázek 21.18: Deskový kondenzátor.

(20.52), přičemž za uzavřenou plochu budeme považovat plochu kváдру, jejíž dvě stěny mají plochu rovnou ploše S uvažované desky. Uvnitř této uzavřené plochy se nachází kladně nabitá deska (viz obr. 21.18):

$$\oiint_{S_{\text{kvadr}}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = ES = \frac{q}{\varepsilon_0}, \quad (21.75)$$

odtud

$$E = \frac{q}{S\varepsilon_0}. \quad (21.76)$$

Pomocí nalezené intenzity mezi deskami kondenzátoru spočítáme podle vztahu (20.34) mezi nimi napětí:

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = E d = \frac{q d}{S \varepsilon_0} . \quad (21.77)$$

Dosazením tohoto napětí do vztahu pro kapacitu kondenzátoru (21.74) dostaneme:

$$C = \frac{q}{U} = \frac{q}{\frac{q d}{S \varepsilon_0}} = \varepsilon_0 \frac{S}{d} . \quad (21.78)$$

Prostor mezi elektrodami kondenzátoru bývá často vyplněn dielektrikem, které dle vztahu (21.43) zeslabuje intenzitu elektrického pole ε_r -krát, takže je nutné v takovém případě vynásobit kapacitu kondenzátoru spočítanou pro vakuum relativní permitivitou ε_r použitého dielektrika, tedy

$$C = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{S}{d} = \varepsilon \frac{S}{d} . \quad (21.79)$$

21.6.3 Energie elektrostatického pole pro materiálové prostředí a elektrická energie kondenzátoru

V kapitole 20.9.3 jsme našli vztah pro energii elektrostatického pole (20.117) pro případ bezmateriálového prostředí (vakuum). V případě, že budeme uvažovat volné elektrické náboje, které jsou rozloženy v dielektriku, potom budeme postupovat analogickým způsobem. Takže i v tomto případě vyjdeme ze vztahu (20.110), ve kterém však vyjádříme hustotu volného elektrického náboje pomocí vztahu (21.21). Poté použijeme stejných úprav i úvah, čímž dospějeme ke vztahu:

$$W_p = \frac{1}{2} \iiint_{\text{Celý prostor}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{D} V . \quad (21.80)$$

Odtud pro objemovou hustotu elektrické energie můžeme s použitím vztahu (21.20) psát:

$$w_e = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} = \frac{1}{2} (\varepsilon_0 E^2 + \mathbf{E} \cdot \mathbf{P}) . \quad (21.81)$$

K nabití kondenzátoru musí být vykonána práce vnějším působením (vnějšími silami). Abychom nabili kondenzátor, tak musíme odejmout elektrony z jeho kladné elektrody a přenést je na jeho elektrodu zápornou. Elektrické pole, které se přitom vytváří v prostoru mezi nimi, má takový směr, že brání dalšímu přenosu náboje. Čím větší náboj se shromažďuje na elektrodách kondenzátoru, tím více práce je nutné vykonat k přenosu dalších elektronů. V praxi tuto práci uskutečníme nejčastěji baterií na úkor její chemické energie. Práce, která byla potřebná k nabití kondenzátoru, je obsažena v elektrickém poli mezi jeho elektrodami ve formě elektrické potenciální energie, případně můžeme konstatovat, že odpovídá potenciální energii nábojů na elektrodách kondenzátoru. Tuto energii můžeme uvolnit vybitím kondenzátoru.

Při hledání energie deskového kondenzátoru (energie elektrického pole mezi jeho deskami) můžeme vyjít ze vztahu (21.85) s tím, že mezi jeho deskami uvažujeme

homogenní izotropní lineární dielektrikum, a že elektrické pole se nachází pouze mezi jeho deskami a je homogenní, přičemž desky kondenzátoru vymezují objem V_{kon} , tedy při použití materiálového vztahu (21.34) můžeme psát:

$$W_p = \frac{1}{2} \iiint_{\text{Celý prostor}} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} dV = \frac{\varepsilon}{2} \iiint_{\text{Celý prostor}} E^2 dV = \frac{\varepsilon}{2} \iiint_{V_{\text{kon}}} E^2 dV = \frac{\varepsilon}{2} E^2 \underbrace{\iiint_{V_{\text{kon}}} dV}_{=Sd} = \frac{1}{2} \varepsilon E^2 Sd . \quad (21.82)$$

Výsledný vztah upravíme tím, že ho vynásobíme vzdáleností desek a zároveň ho i touto vzdáleností podělíme:

$$W_p = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon E^2 S d^2}{d} = \frac{1}{2} \underbrace{\varepsilon \frac{S}{d}}_{=C} E^2 d^2 . \quad (21.83)$$

Ze vztahu (21.77) víme, že $U = Ed$, což použijeme k finální úpravě výsledku (21.83), čímž dostaneme vztah pro energii elektrického pole nacházejícího se mezi deskami kondenzátoru (energie kondenzátoru)

$$W_p = \frac{1}{2} C U^2 . \quad (21.84)$$

K nalezení vztahu (21.84) můžeme dospět i jiným způsobem a to tím, že spočítáme práci, kterou je třeba vykonat k nabití kondenzátoru nábojem q .

Předpokládejme, že v určitém okamžiku byl přemístěn elektrický náboj q' z jedné elektrody na druhou. Napětí U' mezi elektrodami v tomto okamžiku bude dle vztahu (21.74) q'/C . Jestliže přemístíme další infinitezimální náboj dq' , musíme na to vynaložit práci rovnající se přírůstku potenciální energií elektrického pole. Tuto práci určíme pomocí vztahu¹²:

$$dW_p = U' dq' = \frac{q'}{C} dq' . \quad (21.85)$$

Práce potřebná k přenesení celkového náboje q pak odpovídá celkové elektrické energii pole mezi deskami kondenzátoru:

$$W_p = \int dW_p = \int_0^q U' dq' = \frac{1}{C} \int_0^q q' dq' = \frac{q^2}{2C} . \quad (21.86)$$

Tento výsledek můžeme dále upravit pomocí vztahu (21.74):

$$W_p = \frac{1}{2} C U^2 . \quad (21.87)$$

¹²Připomeňme, že napětí U odpovídá číselně práci vykonané na přenesení jednotkového náboje mezi uvažovanými body.

Kapitola 22

Elektrodynamika

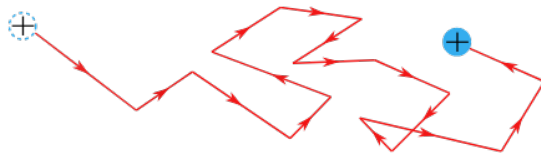
Elektrodynamika se zabývá elektrickými a magnetickými poli a interakcemi způsobenými makroskopickými distribucemi elektrických nábojů a proudů. V této kapitole započneme studovat jevy, které nastávají při přemísťování náboje. To znamená, že se budeme zabývat jednak popisem samotného pohybu zdrojového náboje, jednak budeme studovat jeho příčiny a fyzikální projevy. Od elektrostatiky přejdeme tedy k **elektrodynamice**.

22.1 Elektrický proud a hustota proudu

V makroskopickém pojetí rozumíme **elektrickým proudem uspořádaný** pohyb nosičů elektrického náboje (elektrických nábojů). Aby se mohly tyto náboje pohybovat, musí se jednat o náboje volné. S volnými elektrickými náboji se setkáváme v látkách, které nazýváme **vodiče**, přičemž vodiče mohou mít nositele náboje jednoho znaménka (např. elektrony v kovech) anebo obojích znamének (např. kladné a záporné ionty v elektrolytech či ionty a elektrony v ionizovaných plynech). Vytvořit elektrický proud můžeme i oddělením nosičů elektrického náboje od látky, které se pak mohou pohybovat ve vakuu nebo zředěných plynech. K samovolnému uspořádanému pohybu nosičů elektrického náboje nedochází. Nosiče elektrického náboje v látkách jsou sice v neustálém pohybu, avšak tento pohyb je statisticky neuspořádaný, chaotický, takže z makroskopického pohledu nelze hovořit o uspořádaném pohybu elektrického náboje, viz 22.1.

Z možných vodičů mají největší význam polykrytalické látky s kovovou vazbou zvané **kovy**. Kovy se vyznačují tím, že každý jejich mikroskopický monokrystal má pevnou krystalovou mříž sestávající se z kladných iontů. Mezi ionty krystalové mříže se pohybují volné elektrony rychlostmi, jejichž velikosti i směry jsou statisticky proměnné. Tyto elektrony jsou v neustálém neuspořádaném (chaotickém) pohybu. Střední hodnota vektoru rychlosti všech elektronů je nulová, kdežto střední rychlost určitého elektronu závisí na teplotě daného kovu. Elektrony konají tepelný (chaotický) pohyb, přičemž velikost rychlosti tohoto pohybu je o několik řádů větší než je velikost rychlosti kmitání iontů v krystalové mříži. Horní mez tepelného pohybu volných elektronů je zhruba 10^6 m/s.

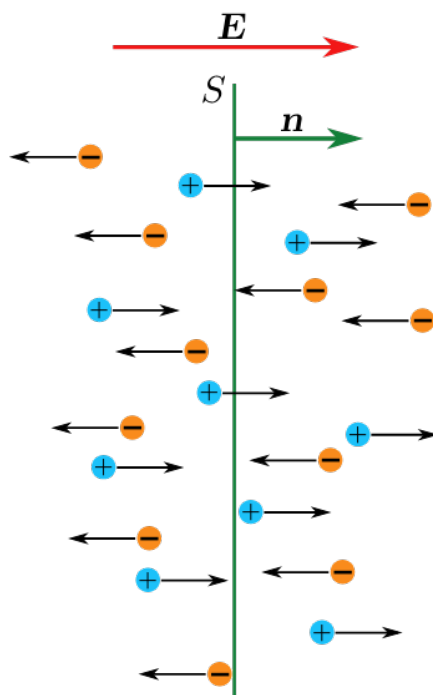
Připojením vodiče k vnějšímu zdroji elektrického pole (např. realizované galvanickým článkem), začne původně statisticky neuspořádaný pohyb volných nosičů náboje vytvářet usměrněný pohyb. U kladných nosičů náboje je jejich usměrněný pohyb orientován shodně s elektrickým polem, u záporných nosičů náboje



Obrázek 22.1: Neuspořádaný pohyb nosiče kladného náboje.

je tento pohyb orientován opačně. Tímto vzniká výše zavedený makroskopický elektrický proud. V případě, že vodič obsahuje nosiče náboje obou polarit, budou se tyto nosiče pohybovat současně, ale ve vzájemně opačných směrech. Je zvykem směr proudu definovat souhlasně se směrem uspořádaného pohybu kladných nosičů elektrického náboje. Takto zavedený směr proudu nazýváme **technickým směrem proudu** a jeho zavedení má historické důvody. Tedy u kovových vodičů je směr proudu volných elektronů opačný než je jeho technický směr.

Elektrický proud značíme zpravidla¹ jako I a zavádíme ho následující úvahou.



Obrázek 22.2: Průchod nosičů kladného a záporného náboje orientovanou plochou.

Uvažujme orientovanou plochu $\mathbf{S} = S\mathbf{n}$, kterou procházejí elektrické náboje, viz obr. 22.2. Předpokládejme, že za čas Δt projde touto plochou v kladném směru kladný náboj Δq_+ a současně v záporném směru (proti orientaci uvažované plochy) projde záporný náboj $-\Delta q_-$. Pak celkový náboj Δq , který za čas Δt projde orientovanou plochou \mathbf{S} je

$$\Delta q = \Delta q_+ - (-\Delta q_-) = \Delta q_+ + \Delta q_- . \quad (22.1)$$

Z tohoto výsledku je patrné, že průchod záporného náboje orientovanou plochou \mathbf{S} v záporném směru je ekvivalentní průchodu kladného náboje v kladném směru.

¹V teorii obvodů se značky I používá pro označení velikosti proudu, který je v čase neměnný, kdežto pro okamžitou hodnotu časově proměnného elektrického proudu se používá značka i .

Hodnota průměrného elektrického proudu je dána vztahem:

$$\bar{I} = \frac{\Delta q}{\Delta t}, \quad (22.2)$$

kde Δq představuje množství náboje, které prošlo plochou S za dobu Δt .

Okamžitý proud uvažovanou plochou S definujeme vztahem:

$$I = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt}. \quad (22.3)$$

Odtud můžeme konstatovat, že velikost elektrického proudu udává množství náboje, které proteče uvažovanou plochou za jednotku času.

Jedná-li se o ustálený (stacionární, tj. časově neproměnný) elektrický proud, potom ho lze vyjádřit vztahem:

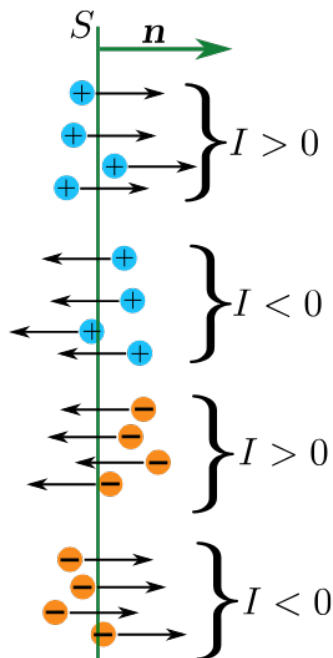
$$I = \frac{q}{t}, \quad (22.4)$$

kde q je celkový náboj, který prošel orientovanou plochou S za čas t .

V soustavě SI je jednotkou elektrického proudu **ampér** a značíme ho A.

Proud I je skalární veličina, která může nabývat jak kladných, tak záporných hodnot. Procházejí-li orientovanou plochou S v kladném směru (ve směru orientace plochy) nosiče kladného náboje, či v opačném směru nosiče záporného náboje, pak proud I nabývá kladné hodnoty. Avšak v případě, že nosiče kladného náboje procházejí orientovanou plochou S v záporném směru, nebo nosiče záporného náboje v kladném směru, potom je proud I záporný, viz obr. 22.3.

Elektrický proud I představuje veličinu, která nevystihuje rozložení proudu po



Obrázek 22.3: Určování znaménka proudu.

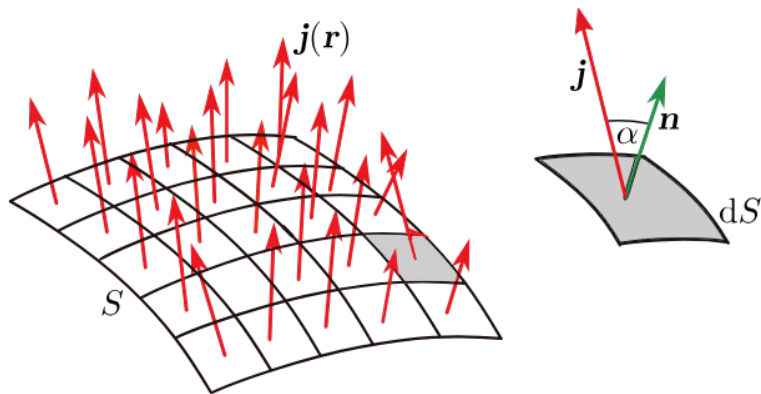
uvažované ploše S , ani směr pohybu nosičů elektrických nábojů. Z tohoto důvodu se zavádí vektorová veličina hustota proudu, kterou značíme \mathbf{j} . Jestliže si v libovolném místě plochy S zvolíme orientovanou elementární plošku $d\mathbf{S}$ (viz obr. 22.4),

potom proud touto elementární ploškou je dán vztahem

$$dI = \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS = j dS \cos \alpha , \quad (22.5)$$

kde α je úhel mezi vektory \mathbf{j} a $d\mathbf{S}$.

Z rovnice (22.5) plyne pro velikost hustoty proudu



Obrázek 22.4: Tok hustoty proudu \mathbf{j} plochou S .

$$j = \frac{dI}{dS \cos \alpha} = \frac{|dI|}{dS_{\perp}} , \quad (22.6)$$

$dS_{\perp} = |dS \cos \alpha|$ představuje velikost průmětu orientované elementární plošky $d\mathbf{S}$ do roviny kolmé k vektoru hustoty \mathbf{j} v daném místě. Na základě vztahu (22.6) lze tedy říci, že *velikost hustoty proudu je číselně rovna velikosti proudu procházejícího kolmou plochou jednotkové velikosti*.

Pro celkový elektrický proud I plochou S můžeme na základě vztahu (22.5) psát, že

$$I = \iint_S \mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} . \quad (22.7)$$

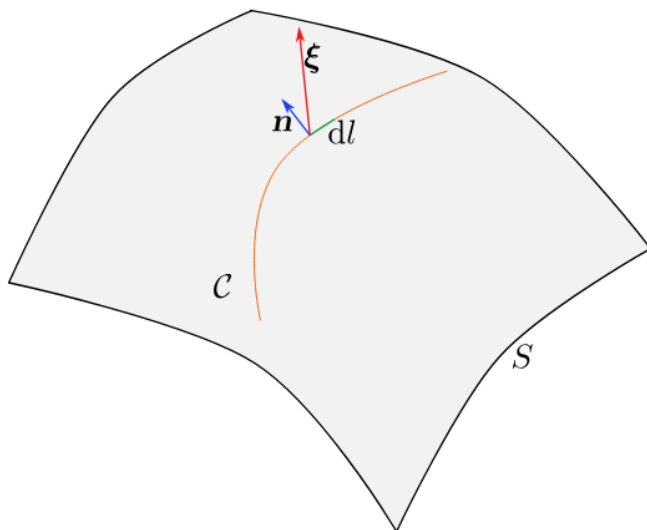
Odtud lze konstatovat, že proud I je tokem vektoru hustoty proudu \mathbf{j} plochou S . V případě, že $\mathbf{j} = \mathbf{konst.}$ a plocha S je plochou rovinnou, potom

$$I = \mathbf{j} \cdot \mathbf{S} = jS \cos \alpha . \quad (22.8)$$

Podobně jako v mechanice tekutin si můžeme zavést proudové čáry a proudové trubice a pomocí nich popisovat tok (proudění) elektrických nábojů, resp. jejich nosičů. V každém bodě prostoru, kterým prochází elektrický proud, lze stanovit hustotu proudu \mathbf{j} a mluvíme tak o **proudovém poli**. Proudové pole je vektorové pole hustoty proudu \mathbf{j} . Vektorové čáry tohoto pole nazýváme **proudové čáry**. Proudová čára je prostorová křivka vedená tak, že v každém jejím bodě souhlasně orientovaná tečna má směr vektoru proudové hustoty \mathbf{j} v tomto bodě. Svazek proudových čar tvoří **proudovou trubici**.

Vzhledem k tomu, že elektrický proud může téct i po dané ploše, zavádíme tzv. **lineární hustotu proudu** ξ tímto vztahem:

$$dI = \xi \cdot d\mathbf{l} = \xi \cdot \mathbf{n} dl , \quad (22.9)$$



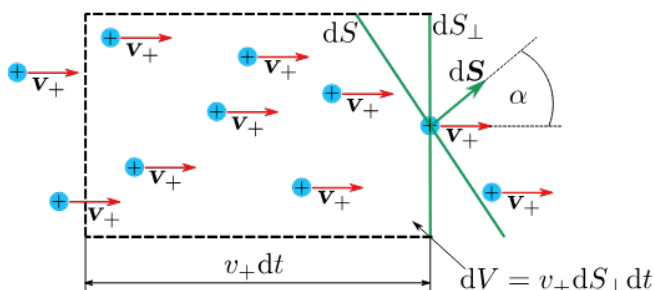
Obrázek 22.5: Lineární hustota proudu.

kde dl element délky nějaké křivky C na proudové ploše, která je protínaná proudem, a vektor \mathbf{n} je jednotkovým normálovým vektorem k dané křivce v uvažovaném bodě, viz obr. 22.5.

Abychom si ukázali, jak souvisí hustota proudu s veličinami charakterizujícími uspořádaný pohyb stejných nosičů elektrického náboje, budeme nejprve předpokládat, že proud je způsoben uspořádaným pohybem kladných nábojů, které jsou v blízkém okolí orientované elementární plošky $d\mathbf{S}$ rozloženy s objemovou hustotou $\rho_+ = nq_0$, kde n je koncentrace nosičů náboje (počet nosičů náboje v jednotkovém objemu) a $q_0 > 0$ je velikost náboje, který nesou (předpokládáme, že nosiče nesou stejný náboj). Uvažované nosiče elektrického náboje procházejí elementární ploškou rychlostí \mathbf{v}_+ (jedná se o střední rychlost volných nosičů náboje). Za dobu dt projdou elementární orientovanou ploškou $d\mathbf{S}$ všechny náboje z elementárního objemu (nosiče náboje mimo tento objem to nestihnou):

$$dV = \mathbf{v}_+ \cdot d\mathbf{S} dt = v_+ \underbrace{dS \cos \alpha}_{=ds_\perp} dt = v_+ ds_\perp dt, \quad (22.10)$$

jejichž velikost odpovídá náboji:



Obrázek 22.6: Průchod nosičů náboje orientovanou elementární ploškou.

$$dq = \rho_+ dV = \rho_+ v_+ dS dt \cos \alpha. \quad (22.11)$$

Elektrický proud, který se uskuteční orientovaným elementem plochy $d\mathbf{S}$ je tedy podle vztahu (22.3):

$$dI = \frac{dq}{dt} = \rho_+ \mathbf{v}_+ \cdot d\mathbf{S} = \rho_+ v_+ dS \cos \alpha . \quad (22.12)$$

Porovnáním se vztahem (22.5) dostaneme, že²:

$$\mathbf{j}_+ = \rho_+ \mathbf{v}_+ = nq_0 \mathbf{v}_+ . \quad (22.13)$$

Bude-li proud dI zapříčiněn uspořádaným pohybem nosičů záporného elektrického náboje, které budou v okolí elementární plošky $d\mathbf{S}$ rozloženy s objemovou hustotou $\rho_- = -nq_0$, potom analogickým způsobem jako v případě nosičů kladného náboje dospějeme ke vztahům:

$$dq = \rho_- dV = \rho_- v_- dS dt \cos \alpha , \quad (22.14)$$

$$dI = \frac{dq}{dt} = \rho_- \mathbf{v}_- \cdot d\mathbf{S} = \rho_- v_- dS \cos \alpha , \quad (22.15)$$

kde \mathbf{v}_- je rychlost, kterou uvažované nosiče procházejí danou elementární ploškou. Opět porovnáním se vztahem (22.5) dostaneme:

$$\mathbf{j}_- = \rho_- \mathbf{v}_- = -nq_0 \mathbf{v}_- . \quad (22.16)$$

Protože objemová hustota ρ_- je záporná a vektor rychlosti \mathbf{v}_- má opačnou orientaci jak \mathbf{v}_+ , pak je zřejmé, že $\mathbf{j}_- = \rho_- \mathbf{v}_- = -nq_0 \mathbf{v}_-$ má stejnou orientaci jako vektor \mathbf{j}_+ . Odtud plyne, že vektor hustoty proudu má vždy souhlasnou orientaci jako vektor střední rychlosti kladných nosičů elektrických nábojů.

Bude-li proud dI způsoben současným uspořádaným pohybem kladných i záporných nábojů, pak pro hustotu proudu bude platit, že

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_+ + \mathbf{j}_- = \rho_+ \mathbf{v}_+ + \rho_- \mathbf{v}_- = \rho_+ v_+ \mathbf{v}_+^0 + \rho_- v_- \mathbf{v}_-^0 = nq_0 v_+ \mathbf{v}_+^0 - nq_0 v_- \mathbf{v}_-^0 = nq_0 (v_+ + v_-) \mathbf{v}_+^0 , \quad (22.17)$$

kde \mathbf{v}_+^0 a \mathbf{v}_-^0 jsou odpovídající jednotkové vektory.

Výsledek (22.17) je možné zobecnit pro případ, kdy je proud vytvářen více druhy nábojů velikosti $q_{0\alpha}$ s různými koncentracemi n_α a různou rychlostí \mathbf{v}_α . V takovém případě můžeme pro objemovou hustotu elektrického náboje a hustotu proudu psát, že

$$\rho = \sum_{\alpha} q_{0\alpha} n_{\alpha} , \quad (22.18)$$

$$\mathbf{j} = \sum_{\alpha} q_{0\alpha} n_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} . \quad (22.19)$$

Ze vztahu (22.18) je zřejmé, že může nastat případ, kdy celková hustota náboje bude nulová tím, že hustota kladných a záporných nábojů bude stejná. Avšak hustota proudu může být v takovém případě nenulová, jestliže se nosiče kladných a záporných nábojů pohybují různými uspořádanými rychlostmi. Takový případ

²Podobně lze postupovat pro lineární hustotu proudu $\xi_+ = \sigma_+ \mathbf{v}_+$, kde σ_+ je plošná hustota nosičů kladného elektrického náboje.

můžeme pozorovat např. u kovů, u kterých hustota kladných iontů krystalové mříže je stejná jako hustota pohybujících se volných elektronů, avšak rychlosti pohybů volných elektronů a iontů krystalové mříže jsou různé.

Střední rychlost pohybu usměrněných volných nosičů elektrického náboje vyvolaná vnějším polem se zpravidla nazývá **driftová rychlost**. V následující části kapitoly si určíme velikost driftové rychlosti pro nejběžnější kovový vodič, kterým je měď (Cu). Nechtě měděný vodič má konstantní průřez S a prochází jím proud I .

Jeden mol mědi obsahuje $N_A = 6,0221 \cdot 10^{23}$ atomů, z nichž každý má jeden volný (valenční) elektron. Tedy počet volných elektronů v jednotkovém objemu je

$$n = \frac{N_A}{V_m} = \frac{s N_A}{M_m}, \quad (22.20)$$

kde V_m je molární objem, M_m je molární hmotnost a s je hustota mědi. Potom objemová hustota volných elektronů je

$$\rho_- = -nq_0 = -ne = -\frac{esN_A}{M_m}. \quad (22.21)$$

Dále použijeme vztah (22.15) k výpočtu proudu, který projde plochou S , která je kolmá ke směru pohybu volných elektronů ($\alpha = 0$)

$$I = \rho_- v_- \iint_S dS = \rho_- v_- S. \quad (22.22)$$

Z rovnosti (22.22) určíme driftovou rychlost v_- volných elektronů, přičemž současně použijeme vztahu (22.21)

$$v_- = \left| \frac{I}{\rho_- S} \right| = \left| -\frac{IM_m}{esN_A S} \right|. \quad (22.23)$$

Dosadíme-li do tohoto vztahu hustotu mědi $s = 8930 \text{ kg.m}^{-3}$, molární hmotnost $M_m = 63,54 \cdot 10^{-3} \text{ kg.mol}^{-1}$, elementární náboj $e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$, průřez $S = 1 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2$ a proud $I = 5 \text{ A}$, tak pro driftovou rychlost volných elektronů dostaneme, že $v_- = 0,369 \text{ mm.s}^{-1}$.

Z výsledku je zřejmé, že driftová rychlost související s proudy běžné velikosti v drátových vodičích je nesmírně malá. Kdybychom dosadili výše uvedené hodnoty do vztahu pro objemovou hustotu elektrického náboje (22.21), tak dostaneme, že $\rho_- = -1,36 \cdot 10^{10} \text{ C.m}^{-3}$. Z tohoto výsledku vidíme, že celkový náboj volných elektronů v jednotkovém objemu mědi je značný (i počet volných elektronů), a tedy potřebná driftová rychlost pro vyvolání proudů běžné technické velikosti je velmi malá.

Pro srovnání můžeme rychlost tepelného pohybu jednotlivého volného elektronu odhadnout ze vztahu³

$$\frac{3}{2}kT = \frac{1}{2}m_e v_e^2 \Rightarrow v_e = \sqrt{\frac{3kT}{m_e}}, \quad (22.24)$$

³Tento vztah je znám z kinetické teorie plynů. Vzhledem k tomu, že v jistém přiblížení můžeme na volné elektrony pohlížet jako na elektronový plyn, pak je možné pro odhad rychlosti tepelného pohybu použít tento vztah.

kde $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ K} \cdot \text{J}^{-1}$ je Boltzmannova konstanta, $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ je hmotnost elektronu a T je termodynamická teplota. Dosadíme-li uvedené hodnoty do vztahu (22.24), pak při pokojové teplotě dostaneme, že $v_e \approx 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

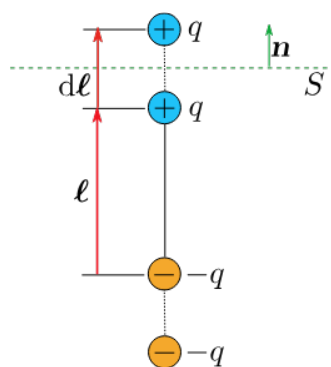
Jak již bylo naznačeno v úvodu této kapitoly, proudy můžeme obecně dělit na **nestacionární**, tj. proudy měnící se libovolně v čase, a **stacionární**, které představují ustálené, tj. s časem se nemění, proudění elektrických nábojů. Dále je možné rozlišovat proudy **střídavé**, které mění v čase svůj směr, a **stejnoseměrné**, které svůj směr nemění. Proudů můžeme také dělit podle charakteru pohybu elektrických nábojů. V takovém případě rozlišujeme následující elektrické proudy:

1. proud volných nosičů náboje

- kondukční (vodivostní) proud** - jedná se o proud volných nosičů elektrického náboje (např. elektronů nebo iontů) uvnitř makroskopického tělesa (vodiče) ve skupenství pevném, kapalném a plynném.
- konvekční proud** - jedná se o proud volných nosičů elektrického náboje (např. elektronů, protonů či atomových jader) ve vakuu nebo o pohyb elektrického náboje zprostředkovaný makroskopickými částicemi (např. nabitě částice prachu, dešťové kapky, sněhové vločky apod.) či o pohyb elektrického náboje zprostředkovaný nabitými tělesy (např. pás Van de Graafova generátoru). Tento proud se nepodřizuje Ohmovu zákonu.

2. proud vázaných nosičů náboje

- polarizační proud** - tento proud je vyvolán deformací molekulárních a atomárních dipólů vlivem elektrického pole. Díky této skutečnosti se mění vzdálenost mezi kladnými a zápornými náboji dipólů. Bude-li se vlivem časově proměnného elektrického pole střídavě smršťovat a roztahovat elektrický dipól, potom rovinnou plochou S bude procházet kladný náboj dipólu⁴, viz obr. 22.7, takže uvažovanou plochou S začne



Obrázek 22.7: Deformace elektrického dipólu.

protékat střídavý elektrický proud, který nazýváme proudem polarizačním.

⁴Můžeme samozřejmě zvolit rovinou plochu tak, aby jí procházel záporný náboj dipólu. Záporný náboj pak bude procházet rovinou plochou opačným směrem než by procházel kladný náboj, ale vzhledem k opačné polaritě náboje získáme stejný výsledek.

Pro hustotu polarizačního proudu můžeme psát, že

$$\mathbf{j}_p(\mathbf{r}) = \rho \mathbf{v} = nq \frac{\partial \ell}{\partial t} = n \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}, \quad (22.25)$$

kde n je koncentrace dipólů, resp. kladných nábojů dipólů, v blízkém okolí bodu o polohovém vektoru \mathbf{r} , \mathbf{p} je jednotlivý elektrický dipólový moment a \mathbf{P} je vektor elektrické polarizace.

Je zřejmé, že díky skutečnosti, že nosiče elektrického náboje jsou vázané, polarizační proud musí být principiálně časově proměnný, tj. **neexistuje** stacionární polarizační proud.

(b) **magnetizační proud** - je vyvolán mikroskopickými smyčkovými proudy v atomech a molekulách magnetických látek.

3. **Maxwellův proud** - jedná se o časově proměnný proud ve vakuu, u kterého sice nedochází k přenášení elektrického náboje, ale proud je zprostředkován časově proměnným elektrickým polem. Maxwellův proud umožní uzavřít střídavý elektrický proud v obvodu s kondenzátorem bez dielektrika.

22.2 Rovnice kontinuity elektrického proudu

Rovnice kontinuity elektrického proudu je matematickým vyjádřením zákona zachování elektrického náboje.

Uvažujme objem V ohraničený uzavřenou (kontrolní) plochou S (jedná se o pevnou plochu a uvnitř této plochy se nenacházejí ani zřídla ani nory). Vzhledem k tomu, že se elektrický náboj za všech okolností absolutně přesně **zachovává**, tedy vytéká-li z uvažovaného objemu proud I , není možno jinak, než že v každém okamžiku stejnou měrou ubývá elektrický náboj v tomto objemu. Matematicky lze tento závěr formulovat pomocí následující věty (analogicky s větou v kap. 17.7.1):

Bilance el. náboje uvnitř pevné uzavřené plochy

Změna náboje uvnitř kontrolní plochy S za jednotku času je rovna celkovému elektrickému proudu kontrolní plochou.

Matematická formulace této věty je dána následující rovnicí:

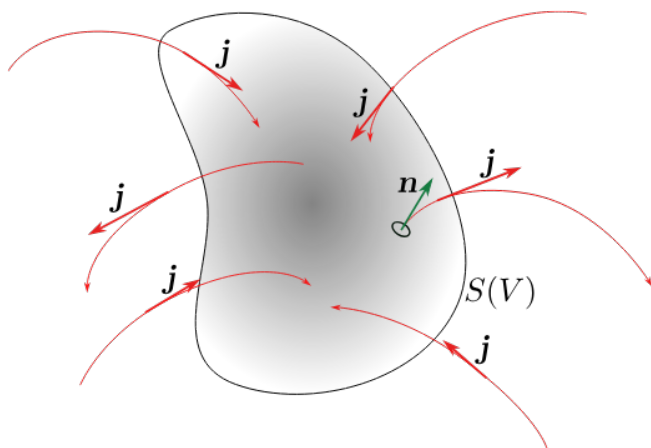
$$-\frac{\partial q}{\partial t} = \oint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = I. \quad (22.26)$$

Význam znaménka „minus“ v rovnici (22.26) si vysvětlíme. Uvažujme pouze kladné nosiče elektrického náboje. Časová změna náboje uvnitř kontrolní plochy S může nabývat kladné či záporné hodnoty:

$$\frac{\partial q}{\partial t} > 0 \Rightarrow \text{náboj uvnitř kontrolní plochy přibývá,}$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} < 0 \Rightarrow \text{náboj uvnitř kontrolní plochy ubývá,}$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} = 0 \Rightarrow \text{náboj uvnitř kontrolní plochy se nemění.}$$



Obrázek 22.8: Proudové čáry směřující dovnitř a ven z uzavřené kontrolní plochy.

Víme, že jednotkový normálový vektor k uzavřené ploše směřuje vždy ven, viz obr. 22.8. Nechť nastává případ, kdy se náboj uvnitř kontrolní plochy hromadí. V takovém případě bude pro celkový elektrický proud platit, že $I = -|I| < 0$ (převažují kladné náboje, které se pohybují proti orientaci kontrolní plochy, viz obr. 22.3). Potom na základě rovnice (22.26) můžeme psát:

$$-\frac{\partial q}{\partial t} = -|I| \Rightarrow \frac{\partial q}{\partial t} = |I| > 0 \Rightarrow \text{náboj uvnitř kontrolní plochy přibývá.} \quad (22.27)$$

Naopak, když bude náboj uvnitř kontrolní plochy ubývat, tak budou převažovat uvažované kladné náboje pohybující se ve směru orientace kontrolní plochy, takže pro celkový elektrický proud bude platit, že $I > 0$. Opět na základě rovnice (22.26) můžeme psát:

$$-\frac{\partial q}{\partial t} = I \Rightarrow \frac{\partial q}{\partial t} = -I < 0 \Rightarrow \text{náboj uvnitř kontrolní plochy ubývá.} \quad (22.28)$$

Samozřejmě pro záporné náboje bychom při rozboru postupovali analogicky.

Uvážíme-li, že

$$q = \iiint_V \rho(\mathbf{r}, t) dV. \quad (22.29)$$

potom můžeme rovnici (22.26) přepsat do tvaru:

$$I(t) = \oiint_S \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S} = -\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho(\mathbf{r}, t) dV. \quad (22.30)$$

Rovnost (22.30) představuje rovnici kontinuity elektrického proudu v integrálním tvaru.

Aplikujeme-li na plošný integrál v uvedené rovnici kontinuity Gaussovu větu (12.56), potom dostaneme:

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) dV = -\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho(\mathbf{r}, t) dV. \quad (22.31)$$

Pro nalezení rovnice kontinuity v diferenciálním tvaru provedeme následující úpravu rovnice (22.31):

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) dV = - \iiint_V \frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t} dV, \quad (22.32)$$

tedy

$$\iiint_V \left(\frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \right) dV = 0. \quad (22.33)$$

Jelikož tato rovnice musí být splněna pro libovolný objem, potom musí platit, že

$$\frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (22.34)$$

Tato rovnice představuje rovnici kontinuity v diferenciálním tvaru.

Rovnice kontinuity v diferenciálním tvaru nám v souladu se zkušeností říká, že elektrický náboj se zachovává i v libovolné části uvažovaného objemu (jinak by v některých místech teoreticky mohl elektrický náboj samovolně vznikat či zanikat, přestože by se v celém objemu zachovával). Rovnice kontinuity v diferenciálním tvaru nám také vyjadřuje vztah mezi objemovou hustotou náboje $\rho(\mathbf{r}, t)$ a proudovou hustotou $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$.

Obecně rovnici kontinuity lze interpretovat takto:

Elektrický náboj se zachovává nejen v celém objemu, nýbrž i v každém jeho místě a v každém časovém okamžiku.

22.3 Stacionární elektrické pole

V elektrostati jsme předpokládali, že zdrojové elektrické náboje jsou statické (nehybné). Díky této skutečnosti všechny fyzikální veličiny používané pro popis elektrostatičeského pole a jeho účinků jsou nezávislé na čase. Z předchozí kapitoly 22.1 však víme, že volné nosiče konají neuspořádaný tepelný (chaotický) pohyb, který bude mít nenulovou stejnosměrnou složku nachází-li se v elektrickém poli. Tuto složku považujeme za uspořádaný pohyb ve směru elektrického pole. Každopádně odtud vyplývá, že z mikroskopického pohledu je distribuce elektrických nábojů časově nestálá a tedy časově závislá. Z makroskopického pohledu, který se zaměřuje na střední hodnoty příslušných veličin, se ztrácí některé charakteristické vlastnosti odehrávající se v mikroskopickém měřítku. Fyzikální veličiny odrážející makroskopický pohled budeme nazývat makroskopickými veličinami. *Stacionárním elektrickým polem budeme rozumět takové elektrické pole, k jehož popisu vystačíme s makroskopickými veličinami, které explicitně nezávisí na čase.* V takovém případě jsou objemová hustota náboje a proudová hustota pouze funkcí polohy, tj. $\rho = \rho(\mathbf{r})$, $\mathbf{j} = \mathbf{j}(\mathbf{r})$. Tedy zdrojem stacionárního elektrického pole jsou stacionárně rozložené náboje. Ve srovnání s elektrostatikou je však situace obecnější v tom, že zatímco některé náboje mohou být v klidu, jiné konají makroskopický pohyb, a realizují tedy stacionární elektrický proud.

Experimentální zkušenost ukazuje, že **elektrické stacionární pole je** (podobně jako pole elektrostatičeské) **potenciálové a konzervativní**, tedy platí Maxwellovy rovnice ve stejném tvaru jako pro elektrostatičeské pole, tj. rovnice (20.52), resp.

(20.60) a (20.98), resp. (20.99). Byť je po formální stránce tato soustava Maxwellových rovnic shodná, jsou zde však dva zásadní rozdíly:

1. Uvnitř vodičů (protékaných stacionárním proudem) není stacionární elektrické pole nulové a na povrchu vodičů není potenciál konstantní.
2. Z kapitoly 22.1 víme, že elektrický proud může procházet vodičem i v případě, že hustota elektrického náboje v objemu vodiče je nulová. Uvažujme, že právě takováto situace nastala v případě dvou vodičů protékaných stacionárním proudem. Z pohledu elektrostatiky tyto dva vodiče nemohou na sebe silově působit. Avšak provedeme-li experiment, s jehož pomocí budeme sledovat vzájemné působení takovýchto vodičů, tak zjistíme, že tyto vodiče na sebe silově působí. Tuto sílu nazýváme silou magnetickou a její teoretické zdůvodnění dává speciální teorie relativity. Popisu této síly je věnována kapitola 23.3.

Na základě výše uvedeného můžeme konstatovat, že se volné elektrické náboje pohybují ustáleným způsobem a vytvářejí stacionární elektrický proud. Vzhledem k tomu, že objemová hustota elektrického náboje nezávisí explicitně na čase, tak se nám redukují rovnice kontinuity (22.30) a (22.34) na následující tvar:

$$\oint_S \mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = 0, \quad (22.35)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}) = 0. \quad (22.36)$$

Rovnice (22.35) a (22.36) představují rovnice kontinuity pro stacionární elektrický proud.

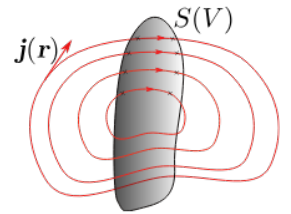
Z rovnice (22.36) plyne, že v případě stacionárního elektrického pole je vektorové pole proudové hustoty $\mathbf{j} = \mathbf{j}(\mathbf{r})$ polem **solenoidálním**, takže proudové čáry jsou uzavřené orientované křivky. To znamená, že nosiče elektrického náboje se pohybují po uzavřených trajektoriích. Rovnice (22.35) nám, s ohledem na vztah (22.5), vyjadřuje, že celkový proud, který proteče uzavřenou plochou, musí být **nulový**. Neboli můžeme konstatovat, že náboj, který vstoupí do uzavřené plochy, se musí rovnat náboji, který z této plochy vystoupí. Jinými slovy, co do uzavřené plochy vteče, to z ní i vyteče, takže se elektrický náboj nemůže v objemu vymezeném touto uzavřenou plochou hromadit.

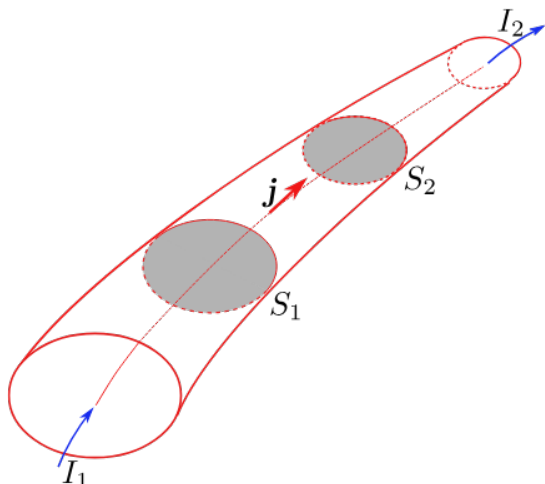
Na obrázku 22.9 je zachycena proudová trubice proměnného průřezu, která může odpovídat případu kovového vodiče umístěného v elektricky nevodivém prostředí (např. vzduchu). Předpokládejme uzavřenou plochu S , která je tvořena plochami S_1 , S_2 a plochou odpovídající části pláště uvažované proudové trubice. Vzhledem k tomu, že proudové čáry nemohou protínat plášť proudové trubice, je možné napsat pro uvažovaný případ rovnici kontinuity (22.35) ve tvaru:

$$\oint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_1} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{S_2} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = 0. \quad (22.37)$$

Označíme-li I_1 proud, který vstupuje plochou S_1 , tj.

$$I_1 = - \iint_{S_1} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} \quad (22.38)$$





Obrázek 22.9: Proudová trubice proměnného průřezu.

a I_2 , který vystupuje plochou S_2 , tj

$$I_2 = \iint_{S_2} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}, \quad (22.39)$$

dostáváme s ohledem na vztah (22.37), že

$$-I_1 + I_2 = 0 \quad \text{neboli} \quad I_1 = I_2. \quad (22.40)$$

Odtud je patrné, že *při stacionárním stejnosměrném proudu protéká každým průřezem vodiče stejný proud.*

22.3.1 Ohmův zákon

Uvažujme homogenní kovový vodič (krystal), který obsahuje N ($\sim 10^{26}$) volných (valenčních) elektronů a nechť se nachází ve stacionárním elektrickém poli \mathbf{E} . Volný elektron ve vodiči urazí, než se srazí s iontem krystalové mřížky⁵, tzv. volnou dráhu λ , přičemž dobu mezi dvěma po sobě jdoucími srážkami i -tého volného elektronu označíme τ_i . Rychlost i -tého volného elektronu je:

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{u}_i + \mathbf{a}\tau_i = \mathbf{u}_i + \frac{\mathbf{F}_e}{m_e}\tau_i = \mathbf{u}_i - \frac{e\mathbf{E}}{m_e}\tau_i, \quad (22.41)$$

kde \mathbf{u}_i je tepelná (chaotická) rychlost volného elektronu, která je, jak již víme, velmi vysoká, m_e je hmotnost elektronu, e značí elementární náboj a $\mathbf{a}\tau_i$ je rychlost, kterou elektron získá působením stacionárního elektrického pole \mathbf{E} a její velikost je v porovnání s \mathbf{u}_i velmi malá.

Střední rychlost volných elektronů je tzv. driftová rychlost \mathbf{v} :

$$\mathbf{v} = \frac{\sum_{i=1}^N \mathbf{v}_i}{N} = \frac{\sum_{i=1}^N (\mathbf{u}_i + \mathbf{a}\tau_i)}{N} = \underbrace{\frac{\sum_{i=1}^N \mathbf{u}_i}{N}}_{=0} + \frac{\mathbf{a} \sum_{i=1}^N \tau_i}{N} = \mathbf{a}\tau = -\frac{e\mathbf{E}}{m_e}\tau, \quad (22.42)$$

Driftovou (střední) rychlost elektronu jsme značili \mathbf{v} , jelikož víme, že vyšetřujeme elektrony, tak od tohoto indexu můžeme upustit.

⁵Např. u mědi dochází v průměru k 10^{14} srážkám za sekundu.

kde τ je střední doba mezi srážkami. Střední tepelnou rychlost volných elektronů jsme položili rovnu nulovému vektoru, protože všechny směry tepelné rychlosti jsou stejně pravděpodobné, takže pro velký počet N volných elektronů se vykompenzují.

Nechť koncentrace volných elektronů (počet elektronů v jednotkovém objemu daného vodiče) je n , potom pro objemovou hustotu volných elektronů můžeme psát $\rho = -ne$. Pak pro hustotu proudu na základě vztahů (22.16) a (22.42) dostáváme:

$$\mathbf{j} = \rho \mathbf{v} = -ne \left(-\frac{e\mathbf{E}}{m_e} \tau \right) = \frac{ne^2\tau}{m_e} \mathbf{E}. \quad (22.43)$$

Odtud můžeme psát tzv. **Ohmův zákon v diferenciálním tvaru**:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \gamma \mathbf{E}(\mathbf{r}), \quad (22.44)$$

kde

$$\gamma = \frac{ne^2\tau}{m_e} \quad (22.45)$$

se nazývá **měrná vodivost** (pro různé materiály nabývá různých hodnot), její jednotkou je $\text{S}\cdot\text{m}^{-1}$, kde $\text{S}=\text{A}/\text{V}$ je jednotka vodivosti **siemens**. Protože dobu τ nelze přímo měřit, určuje se měrná vodivost látky experimentálně (např. pro měď má měrná vodivost hodnotu: $\gamma_{\text{Cu}} \approx 5,7 \cdot 10^7 \text{ S}\cdot\text{m}^{-1}$).

Ohmův zákon v diferenciálním tvaru lze vyjádřit i ve tvaru:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\rho_R} \mathbf{E}(\mathbf{r}), \quad (22.46)$$

kde ρ_R je tzv. **měrný odpor** a jeho jednotkou je $\Omega\cdot\text{m}$, kde Ω značí jednotku elektrického odporu zvanou **ohm**.

Ze vztahu (22.44) plyne, že ve vodiči, kterým prochází elektrický proud, musí být intenzita elektrického pole vždy různá od nuly.

U některých vodičů závisí měrná vodivost γ také na intenzitě přiloženého elektrického pole. V takovémto případě není hustota proudu přímo úměrná intenzitě \mathbf{E} . Takovéto vodiče nazýváme **nelineární**. Vodiče, u kterých měrná vodivost nezávisí na intenzitě přiloženého elektrického pole, nazýváme **lineární**.

Pro vedení elektrického proudu v elektrolytech lze dospět k vyjádření Ohmova zákona rovněž ve tvaru (22.44). Avšak v tomto případě platnost Ohmova zákona je omezena pouze na slabá elektrická pole.

Z Ohmova zákona v diferenciálním tvaru, který je reprezentován vztahem (22.44), vyplývá, že proudová hustota a elektrická intenzita mají stejný směr. Vodiče, u kterých má hustota proudu stejný směr s intenzitou přiloženého elektrického pole, nazýváme **izotropní vodiče**. Nejedná-li se o vodič izotropní, pak hovoříme o **anizotropním vodiči**. Pro anizotropní vodiče platí, že vektory \mathbf{j} a \mathbf{E} nejsou obecně kolinéární. U lineárních anizotropních vodičů je měrná vodivost symetrickým tenzorem druhého řádu $\overleftrightarrow{\gamma}$. V takovémto případě můžeme Ohmův zákon v diferenciálním tvaru napsat jako

$$j_i = \sum_{j=1}^3 \gamma_{ij} E_j, \quad i = 1, 2, 3. \quad (22.47)$$

V případě homogenních vodičů platí Ohmův zákon až do velmi vysokých hodnot elektrického pole. U nehomogenních vodičů nelze zpravidla popsat vedení proudu

jen elektrickou vodivostí, ale je potřeba vzít v úvahu elektromotorická napětí (viz následující kapitola) jako jsou kontaktní potenciály, Seebeckovo termoelektrické napětí, Thomsonovo elektromotorické napětí.

Měrný odpor, resp. měrná vodivost, všech vodivých látek závisí na teplotě. Obecně řečeno, se vzrůstající teplotou elektrická vodivost klesá, tj. měrný odpor roste. V okolí pokojových teplot je možné s dobrou přesností vyjádřit měrný odpor jako lineární funkci teploty. V širším oboru teplot a při větších nárocích na přesnost, je možné teplotní závislost měrného odporu aproximovat polynomem druhého stupně. Označíme-li $\rho_R(t)$ měrný odpor při teplotě t v Celsiově stupnici, $\rho_{R,0}$ měrný odpor při teplotě 0°C , platí:

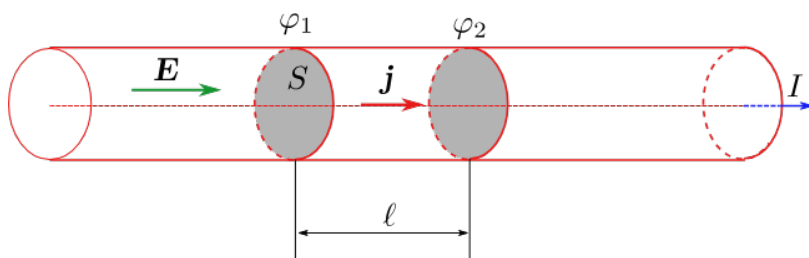
$$\rho_R(t) = \rho_{R,0}(1 + \alpha t + \beta t^2), \quad (22.48)$$

kde α a β je lineární a kvadratický teplotní součinitel odporu kovů, které je nutné pro jednotlivé kovy určit měřením.

Uvažujme lineární homogenní izotropní kovový vodič (představuje proudovou trubici) konstantního průřezu, viz obrázek 22.10. Část tohoto vodiče je vymezena ekvipotenciálními plochami S_1 a S_2 od sebe vzdálenými o ℓ , pro jejichž potenciály φ_1, φ_2 platí $\varphi_1 > \varphi_2$. Mezi uvažovanými plochami je tedy napětí U . K jeho vyjádření použijeme vztahu (22.44), ze kterého vyplývá, že $j = \gamma E$ a vztahu (22.8), na jehož základě platí, že $I = \mathbf{j} \cdot \mathbf{S} = jS \cos \pi/2 = jS$, tedy:

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = - \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi = - \int_1^2 (\nabla \varphi) \cdot d\mathbf{r} = \int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_1^2 E dr = \\ E \int_1^2 dr = E\ell = \frac{j\ell}{\gamma} = \frac{\ell}{\gamma S} I. \quad (22.49)$$

Zavedeme veličinu **elektrický odpor** odpovídající úseku vodiče délky ℓ



Obrázek 22.10: Kovový vodič konstantního průřezu.

$$R = \frac{\ell}{\gamma S} = \frac{\rho_R \ell}{S}, \quad (22.50)$$

jehož fyzikální jednotkou je **ohm** mající značku Ω . Jeho převrácenou hodnotu, tedy vodivost, značíme G a měříme ji v jednotkách **siemens**, pro které používáme značku S .

Pomocí elektrického odporu lze vyjádřit výsledek (22.49) jako

$$U = RI. \quad (22.51)$$

Tento vztah vyjadřuje **Ohmův zákon v integrálním tvaru**.

22.3.2 Jouleův zákon

Uvažujme vodivé prostředí, ve kterém se vlivem vnějšího elektrického pole \mathbf{E} pohybují náboje driftovou rychlostí \mathbf{v} . Jestliže se ve vodivém prostředí nachází volný náboj s objemovou hustotou ρ , potom síla působící na náboje v elementu objemu dV vodivého prostředí je dána vztahem:

$$d\mathbf{F} = dq\mathbf{E} = \rho\mathbf{E}dV. \quad (22.52)$$

Označíme-li orientovaný element dráhy, který urazí volný náboj za element času dt , jako $d\mathbf{r} = \mathbf{v}dt$, můžeme vyjádřit element práce⁶ W , kterou vnější elektrické pole vykoná, vztahem

$$dW = d\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{E} \cdot \underbrace{\rho\mathbf{v}}_{=\mathbf{j}} dVdt = \mathbf{E} \cdot \mathbf{j} dVdt, \quad (22.53)$$

Pro element výkonu můžeme psát:

$$dP = p dV = \frac{dW}{dt} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{j} dV, \quad (22.54)$$

kde p je objemová hustota výkonu. Z rovnosti (22.54) plyne, že

$$p = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}. \quad (22.55)$$

Tento vztah představuje **Jouleův zákon v diferenciálním tvaru**, který nám říká, že výkon dodaný jednotkovému objemu elektrickým polem se rovná skalárnímu součinu proudové hustoty a intenzity tohoto pole.

Celkový dodaný výkon související s objemem V vodiče je dán vztahem:

$$P = \iiint_V p dV = \iiint_V \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} dV, \quad (22.56)$$

který představuje **Jouleův zákon v integrálním tvaru**.

V případě, že se pohyb volných nábojů děje v rámci vodivého prostředí, dochází vlivem srážek nosičů elektrického náboje s ionty krystalové mřížky k disipaci výkonu dodaného elektrickým polem na teplo, které nazýváme **Jouleovo teplo** Q_j .

Pro vodiče, pro které platí Ohmův zákon (22.44), který použijeme při úpravě Jouleova zákona v diferenciálním tvaru (22.55):

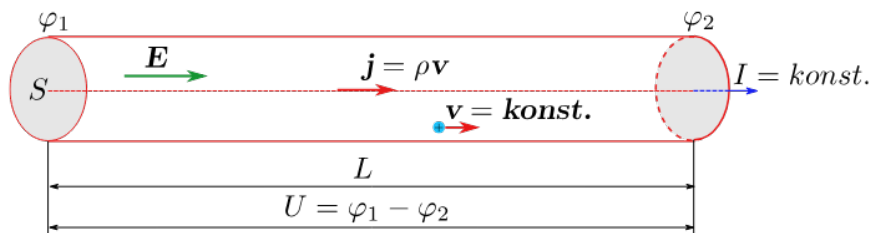
$$p = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} = \gamma \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} = \gamma E^2. \quad (22.57)$$

Pomocí tohoto vztahu je možné pro vodiče upravit i vztah vyjadřující Jouleovo teplo v integrálním tvaru (22.56):

$$P = \iiint_V \gamma E^2 dV. \quad (22.58)$$

Budeme-li uvažovat lineární homogenní izotropní vodič (kov) o konstantním průřezu S a délce L , mezi jehož konci je napětí U (viz obr. 22.11), můžeme velikost intenzity elektrického pole vyjádřit jako

⁶V rámci kapitol věnovaných stacionárnímu či nestacionárnímu elektrickému a magnetickému poli budeme značit práci jako W , protože značka A je rezervována pro označení magnetického vektorového potenciálu.



Obrázek 22.11: Kovový vodič konstantního průřezu protékaný konstantním proudem I .

$$E = \frac{U}{L}.$$

Tento vztah dosadíme do rovnice (22.58):

$$P = \iiint_V \gamma E^2 dV = \iiint_V \gamma \left(\frac{U}{L}\right)^2 dV = \gamma \left(\frac{U}{L}\right)^2 V = \gamma \left(\frac{U}{L}\right)^2 LS = \frac{\gamma S}{L} U^2. \quad (22.59)$$

S ohledem na vztah (22.50) můžeme tento výsledek vyjádřit vztahem:

$$P = \frac{U^2}{R}, \quad (22.60)$$

který pomocí Ohmova zákona (22.51) přepíšeme do tvaru:

$$P = RI^2. \quad (22.61)$$

Pomocí Ohmova zákona je možné přepsat vztah (22.61) jako⁷

$$P = UI. \quad (22.62)$$

Protože pro stacionární proud platí, že $I = konst.$, pak v uvažovaném homogenním vodiči konstantního průřezu musí platit, že $\mathbf{v} = \mathbf{konst.}$ ($I = \mathbf{j} \cdot \mathbf{S} = \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{S}$), tedy působící elektrická síla nemůže nosiče elektrického náboje urychlovat, a tak jí vykonaná práce ($W = Pt$) se celá přeměňuje na Jouleovo teplo Q_j tím, že nosiče elektrického náboje předávají svoji pohybovou energii iontům krystalové mřížky, což má za následek, že se vodič zahřívá (zvyšují se termické kmity jeho iontů). Jouleovo teplo je pak dané vztahem:

$$Q_j = W = Pt = UIt = RI^2t, \quad (22.63)$$

kde t je čas, po který dodává elektrické pole výkon P danému vodiči.

22.3.3 Elektromotorické napětí

Zavedení konceptu stacionárního elektrického pole a z něho plynoucího stacionárního elektrického proudu s sebou přináší řadu otázek, na které je nutné nalézt odpověď, aby teorie s touto koncepcí byla úplná.

Z klíčových rovnic (20.52) a (22.35) jsme se dozvěděli, že na jedné straně jsou čáry

⁷Nalezené vztahy (22.60) - (22.62) platí i pro vodiče proměnného průřezu.

elektrického pole \mathbf{E} otevřené a na druhé straně jsou čáry pole \mathbf{j} uzavřené; navíc, z Ohmova zákona $\mathbf{j} = \gamma \mathbf{E}$ je patrné, že čáry pole \mathbf{E} a \mathbf{j} by měly běžet paralelně. Nevíme odkud pochází energie potřebná k pohybu volných nábojů a odkud pochází teplo přenášené na mřížku vodiče procesy srážek elektronů (Jouleovy ztráty).

Uvažujme dva izolované vodiče, první z nich nechť je nabitý na elektrický potenciál φ_1 a druhý vodič na potenciál φ_2 , přičemž platí mezi těmito elektrickými potenciály následující relace: $\varphi_1 > \varphi_2$. Jestliže tyto dva vodiče propojíme v čase t_0 jiným vodičem, tak díky rozdílu elektrických potenciálů je mezi vodiči elektrické napětí $U = \varphi_1 - \varphi_2$ a tudíž začne tímto propojovacím vodičem procházet elektrický proud (elektrické náboje budou přecházet z místa vyššího elektrického potenciálu do místa, kde je potenciál nižší), který však nebude konstantní, ale bude se s časem měnit, tj. $I(t_0 + t)$, viz obr. 22.12(a), což je dáno tím, že se s postupem času budou elektrické potenciály vyrovnávat, takže bude klesat elektrické napětí mezi prvním a druhým vodičem. Po nějaké, poměrně krátké, době Δt se oba potenciály vyrovnají ($U = 0$) a tudíž propojovacím vodičem nepoteče elektrický proud, tj. $I(t_0 + \Delta t) = 0$, viz obr. 22.12(b).

Aby mohl protékat propojovacím vodičem stacionární (s časem neměnný) elek-

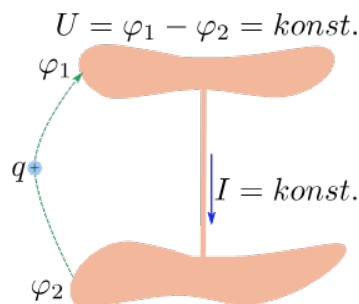


Obrázek 22.12: (a) Elektrický proud mezi dvěma vodiči o různých elektrických potenciálech. (b) Nulový proud mezi dvěma vodiči mající stejný elektrický potenciál.

trický proud, tak je nutné udržovat konstantní potenciálový rozdíl (tedy napětí) mezi uvažovanými vodiči. Toho lze dosáhnout jen tak, že kontinuálně opět budeme nosiče elektrického náboje z druhého vodiče přenášet na první vodič s tím, že budeme nuceni konat práci proti silám elektrického pole, které se mezi oběma vodiči nachází, viz 22.13. Tímto se nosiče elektrického náboje budou pohybovat po uzavřené trajektorii. Síly, které budou konat práci na přenos elektrických nábojů z druhého vodiče na první, budeme nazývat **elektromotorické síly** a značit \mathbf{F}^* . Jedná se o síly nekonzervativní, protože kompenzují disipativní síly spojené s přenosem nosičů elektrického náboje.

Předpokládejme, že elektromotorická síla je úměrná náboji q , jehož přenesení zajišťuje. Potom je možné v analogii s elektrickou intenzitou zavést veličinu $\mathbf{E}^* = \mathbf{F}^*/q$, kterou budeme nazývat **elektromotorickou intenzitou**.

Elektromotorické síly musí přitom konat práci na úkor nějaké energie. Následkem toho pak vzniká požadovaný trvalý potenciálový rozdíl. Velikost práce proti elektrostatickým silám, kterou vykonají elektromotorické síly při přemísťování jed-



Obrázek 22.13: Udržování konstantního potenciálového rozdílu mezi vodiči kontinuálním přesunem nosičů elektrického náboje.

notkového náboje, je číselně rovna tzv. **elektromotorickému napětí** (emn), které budeme značit \mathcal{E} . Princip činnosti zdroje emn je velmi jednoduchý. Z každého prostředí (pevného, kapalného i plynného) můžeme vyrobit zdroj emn, jestliže najdeme způsob, jak trvale separovat (oddělit) od sebe kladný a záporný náboj. Zdrojem emn je tedy každé zařízení, jehož energie (např. mechanická, chemická, tepelná) je využívána k silovému působení na nosiče elektrického náboje za účelem vytvoření elektrického proudu. Běžnými zdroji emn jsou galvanické, palivové, fotovoltaické či termoelektrické články. Nejvýznamnějším zdrojem emn jsou však elektrické generátory.

Protože, jak již bylo výše uvedeno, elektromotorická síla \mathbf{F}^* není silou konzervativní, tak pro emn musí platit:

$$\mathcal{E} = \oint_c \mathbf{E}^* \cdot d\mathbf{r} \neq 0. \quad (22.64)$$

Připomeňme, že stacionární elektrické pole \mathbf{E} je konzervativní, takže musí plat:

$$\oint_c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = 0. \quad (22.65)$$

Poznamenejme, že působení elektromotorické síly se zpravidla omezuje jen na jistou část proudové smyčky, viz obr. 22.14. Na tomto obrázku je zachyceno uskutečnění přenosu náboje proti silám elektrického pole pomocí zdroje emn, proudová čára (v našem případě proudová smyčka) je zachycena červeně, kdežto elektrická siločára je zachycena modře.

Z obr. 22.14 je vidět, že vztah mezi intenzitami a proudovou hustotou uvnitř zdroje emn může být vyjádřen jako

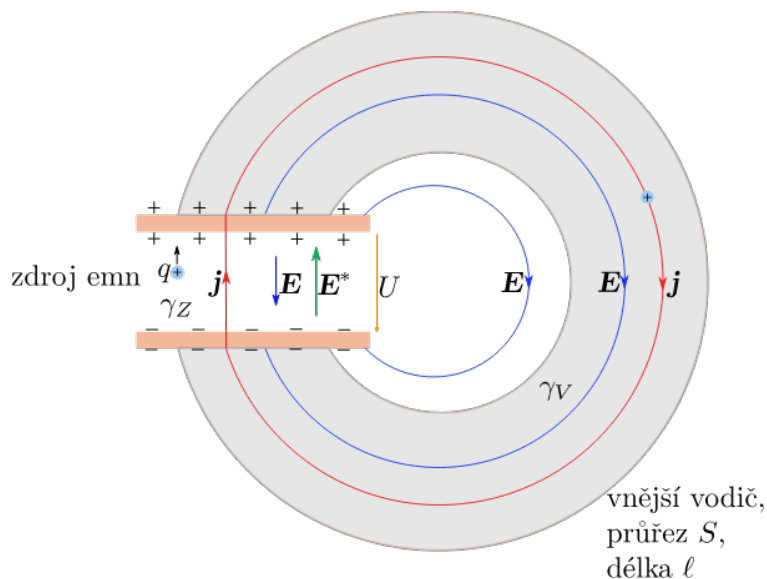
$$\mathbf{j} = \gamma_Z (\mathbf{E} + \mathbf{E}^*), \quad (22.66)$$

kde γ_Z je značí měrnou vodivost (jedná se vlastně o konstantu úměrnosti) uvnitř zdroje emn.

Ze vztahu (22.66) je zřejmé, že musí platit relace: $|\mathbf{E}^*| > |\mathbf{E}|$. V případě, že bychom rozpojili (přerušili) vnější vodič, tak $\mathbf{j} = \mathbf{0}$, a tudíž na základě vztahu (22.66) bude platit, že $\mathbf{E} = -\mathbf{E}^*$.

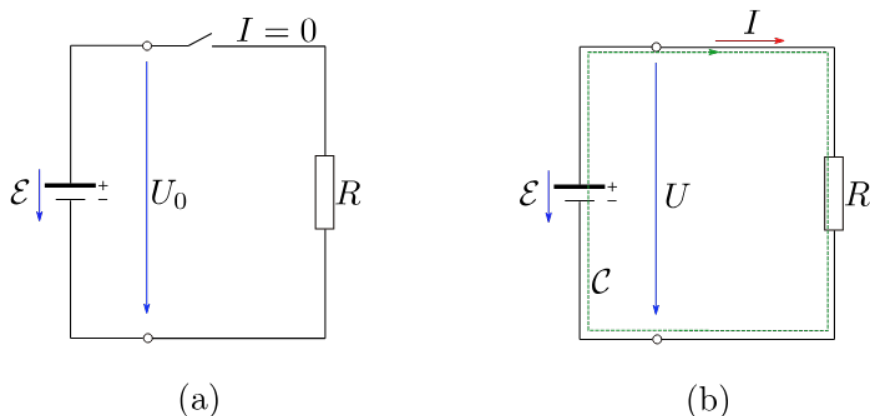
Protože elektromotorická intenzita \mathbf{E}^* je nenulová jen uvnitř zdroje emn, tak můžeme na základě vztahu (22.66) psát, že emn je:

$$\mathcal{E} = \oint_c \mathbf{E}^* \cdot d\mathbf{r} = \int_-^+ \mathbf{E}^* \cdot d\mathbf{r}. \quad (22.67)$$



Obrázek 22.14: Elektrický obvod se zdrojem emn.

Na obr. 22.15 je symbolicky překreslen elektrický obvod z obr. 22.14 pro případ rozpojené a nerozpojeného vnějšího vodiče. Symbol R značí elektrický odpor vnějšího vodiče. Uvažujeme-li případ rozpojeného vnějšího vodiče, viz obr. 22.15(a),



Obrázek 22.15: Symbolicky znázorněný vyšetřovaný elektrický obvod: (a) rozpojený vnější vodič, (b) nerozpojený vnější vodič.

pak pro $\mathbf{j} = \mathbf{0}$ ($\mathbf{E} = -\mathbf{E}^*$) a uvážením vztahu (22.67) musí platit:

$$U_0 = \int_{+}^{-} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = - \int_{+}^{-} \mathbf{E}^* \cdot d\mathbf{r} = \int_{-}^{+} \mathbf{E}^* \cdot d\mathbf{r} = \mathcal{E}. \quad (22.68)$$

Odtud vidíme, že napětí U_0 na svorkách rozpojeného vnějšího vodiče se rovná emn \mathcal{E} , tj. $U_0 = \mathcal{E}$.

Abychom určili napětí U na svorkách nerozpojeného vnějšího vodiče, tak spočítáme cirkulaci vektoru $\mathbf{E} + \mathbf{E}^*$ podél uzavřené křivky \mathcal{C} , která je naznačena na obr. 22.15(b), a můžeme ji rozdělit na dvě křivky, křivku \mathcal{C}_1 ($- \rightarrow +$), která se nachází uvnitř zdroje emn a má délku ℓ_Z a křivku \mathcal{C}_2 ($+ \rightarrow -$), která je součástí vnějšího vodiče, tj. $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2$. Cirkulaci (křivkový integrál přes uzavřenou křivku

\mathcal{C}) tohoto vektoru spočítáme dvěma způsoby, přičemž využijeme rovností (22.66), (22.65), (22.67), (22.68), (22.50) a vezmeme v úvahu skutečnost, že $\mathbf{E}^* = \mathbf{0}$ podél křivky \mathcal{C}_2 a také, že proudová hustota je uvnitř zdroje emn homogenní:

$$\oint_{\mathcal{C}} (\mathbf{E} + \mathbf{E}^*) \cdot d\mathbf{r} = \underbrace{\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}}_{=0} + \underbrace{\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{E}^* \cdot d\mathbf{r}}_{=\mathcal{E}} = \mathcal{E} = U_0, \quad (22.69)$$

$$\begin{aligned} \oint_{\mathcal{C}} (\mathbf{E} + \mathbf{E}^*) \cdot d\mathbf{r} &= \int_{\mathcal{C}_1} (\mathbf{E} + \mathbf{E}^*) \cdot d\mathbf{r} + \int_{\mathcal{C}_2} (\mathbf{E} + \mathbf{E}^*) \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathcal{C}_1} \frac{1}{\gamma_Z} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{r} + \int_{\mathcal{C}_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \\ &= \frac{j \ell_Z}{\gamma_Z} + U = \underbrace{\frac{\ell_Z}{\gamma_Z S_Z}}_{=R_i} I + U = R_i I + U, \end{aligned} \quad (22.70)$$

kde S_Z je průřez zdroje emn a R_i je vnitřní odpor zdroje emn.

Porovnáním výsledků (22.69) a (22.70) dostáváme:

$$U = U_0 - R_i I. \quad (22.71)$$

Poznamenejme, že pro ideální zdroj emn je $R_i = 0$.

Připojíme-li k vodiči elektrického proudu zdroj emn, vznikne tak nehomogenní obvod, pro který je potřeba diferenciální formu Ohmova zákona rozšířit na následující tvar

$$\mathbf{j} = \gamma (\mathbf{E} + \mathbf{E}^*), \quad (22.72)$$

kde měrná vodivost $\gamma = \gamma_Z$ uvnitř zdroje emn a $\gamma = \gamma_V$ ve vnějším vodiči, kde tedy γ_V je měrná vodivost vnějšího vodiče.

Poznámka

Abychom si objasnili, jak je možné využít chemické energie, na jejíž úkor elektromotorická síla koná práci, budeme uvažovat zředěný roztok elektrolytu jakým je např. kyselina chlorovodíková, HCl, jejíž koncentrace se prostorově mění. Necht' je uvažovaný elektrolyt téměř úplně disociován na ionty vodíku H^+ a chlórů Cl^- , přičemž ionty vodíku jsou výrazně lehčí než ionty chlórů. Díky této skutečnosti ionty vodíku difundují mnohem rychleji než ionty chlórů, tedy více iontů vodíku difunduje do oblasti s nízkou koncentrací. Vlivem koncentračního gradientu proud kladných nosičů náboje poteče do oblasti s nízkou koncentrací. Tento proces bude probíhat tak dlouho, dokud akumulovaný náboj nevytvoří natolik velké elektrické pole, které zabráni další difúzi. Na difúzi můžeme pohlížet jako na výsledek působení jisté síly \mathbf{F}^* , která zapříčiňuje pohyb iontů. Pomocí této síly můžeme napsat podmínku rovnováhy jako $\mathbf{F}^* + e\mathbf{E} = \mathbf{0}$. Odtud zřejmě v uvažovaném prostředí bude působit silové pole $\mathbf{F}^* = e\mathbf{E}^* = -e\mathbf{E}$. Na popsaném principu je možné zkonstruovat baterii, která se skládá z nádoby rozdělené na dvě části propustnou membránou. Jednu část nádoby pak naplníme kyselinou chlorovodíkovou a druhou čistou vodou.

Kapitola 23

Stacionární magnetické pole

Magnetické silové účinky byly známy již od starověku, avšak podstatný vývoj poznatků ohledně magnetizmu můžeme zaznamenat až od objevu magnetických účinků vodičů protékaných elektrickým proudem. Tento objev, který se připisuje dánskému fyzikovi H. Ch. Oerstedovi, odstartoval na počátku 19. století celou řadu experimentů, a z nich plynoucích objevů, vedoucích k zavedení pojmu **magnetického pole**. Na základě těchto objevů byl formulován Biotův-Savartův-Laplaceův zákon a Ampèrův zákon magnetické síly, které spolu s Coulombovým zákonem postačí k vybudování klasické elektrodynamiky. Teorie relativity z počátku 20. století přispěla k hlubšímu teoretickému pochopení již zavedeného elektrického a magnetického pole. Teorie relativity ukázala, že elektrické a magnetické pole jsou různými obrazy téhož tzv. **elektromagnetického pole**. Z teorie relativity vyplývá, že elektrické pole vzniká v klidové soustavě náboje, kdežto pole elektromagnetické vzniká ve vztažné soustavě, v níž se náboj vůči pozorovateli pohybuje. Využití relativistického popisu je základem tzv. **relativistické elektrodynamiky**, ze které, mimo jiné, vyplývá, že k vybudování elektrodynamiky bude stačit jen Coulombův zákon, jenž je zákonem empirickým, a relativistický vztah pro transformaci síly. V následujících kapitolách se přidržíme relativistickému pojetí elektrodynamiky. Vzhledem k tomu, že se budeme zabývat **stacionárním magnetickým polem**, tak všechny veličiny, které složí k jeho popisu nejsou explicitně závislé na čase, ale jen na prostorových souřadnicích.

23.1 Magnetická indukce a Lorentzova síla

Uvažujme náboj q , který se v inerciální čárkované soustavě \mathcal{S}' nachází v klidu a další náboj, jenž označíme Q , který se v této soustavě pohybuje libovolným způsobem rychlostí \mathbf{v}' . Dle Coulombova zákona na náboj Q bude vzhledem k soustavě \mathcal{S}' působit síla:

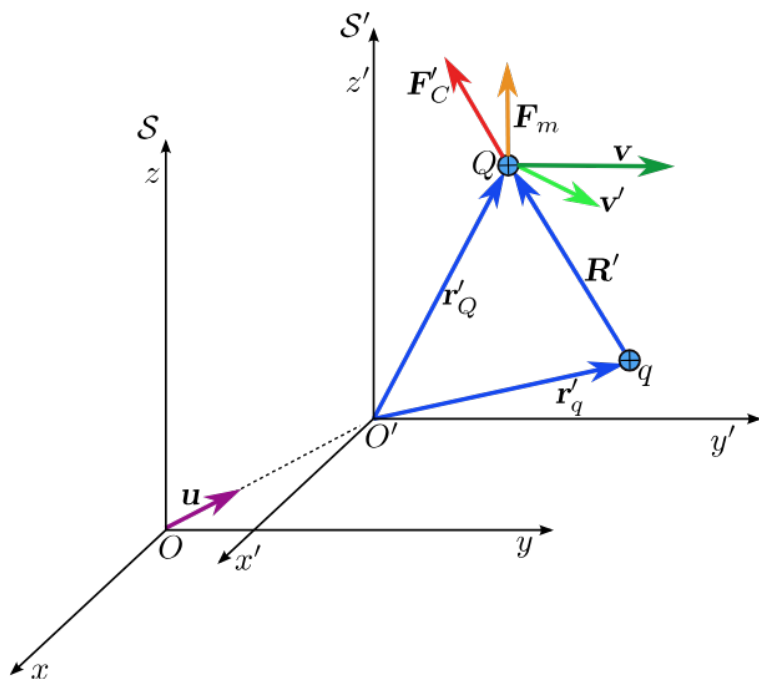
$$\mathbf{F}'_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{|\mathbf{r}'_Q - \mathbf{r}'_q|^3} (\mathbf{r}'_Q - \mathbf{r}'_q) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{R'^3} \mathbf{R}' = \mathbf{E}'Q. \quad (23.1)$$

Zde \mathbf{r}'_Q a \mathbf{r}'_q představují polohové vektory nábojů Q a q v soustavě \mathcal{S}' .

Zde porušujeme námi zavedenou konvenci tím, že čárkované souřadnice nepředstavují souřadnice zdrojového náboje, ale souřadnice spojené s čárkovanou inerciální vztažnou soustavou \mathcal{S}' , která se pohybuje vůči nečárkované inerciální soustavě \mathcal{S}

rychlostí \mathbf{u} ($\mathbf{u} = \text{konst.}$) a platí pro ni, že $|\mathbf{u}| \ll c$, viz obr. 23.1. Připomeňme, že náboj je **invariant**, jehož velikost nezávisí na volbě souřadnicové soustavy.

Abychom si nyní vyjádřili sílu působící ze strany náboje q na náboj Q v pů-



Obrázek 23.1: Situační obrázek k relativistické transformaci Coulombovy síly.

vodní laboratorní inerciální soustavě \mathcal{S} , vyjdeme ze vztahu pro transformaci síly (19.55), který si zde připomeneme s tím, že podle zavedeného označení, viz obr. 23.1, provedeme záměnu $\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{u}$, $\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{v}$:

$$\mathbf{F}' = \frac{\mathbf{F} + \mathbf{u} \left[\frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}}{u^2} (\gamma - 1) - \gamma \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}}{c^2} \right]}{\gamma \left(1 - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{c^2} \right)}. \quad (23.2)$$

Protože uvažujeme relaci $|\mathbf{u}| \equiv u \ll c$, tak můžeme položit Lorentzův faktor $\gamma \approx 1$ a transformační vztah (23.2) přejde do tvaru:

$$\mathbf{F}' = \frac{\mathbf{F} - \frac{(\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{u}}{c^2}}{1 - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{c^2}}, \quad (23.3)$$

který představuje tzv. **pomalou transformaci síly**.

Pro zpětnou pomalou transformaci síly (formální záměnou čárkovaných veličin za nečárkované a nečárkovaných za čárkované) dostáváme:

$$\mathbf{F} = \frac{\mathbf{F}' - \frac{(\mathbf{F}' \cdot \mathbf{v}') \mathbf{u}'}{c^2}}{1 - \frac{\mathbf{u}' \cdot \mathbf{v}'}{c^2}}, \quad (23.4)$$

kde $\mathbf{u}' = -\mathbf{u}$.

Abychom přešli na pravé straně rovnosti (23.4) k rychlostem \mathbf{u} a \mathbf{v} v laboratorní soustavě \mathcal{S} , použijeme transformační vztah mezi rychlostmi (18.94), který si opět

Ve většině případů rychlost \mathbf{u} představuje driftovou rychlost nosiče elektrického náboje, o které již víme, že je velmi malá.

připomeneme, avšak je nutné pro zavedené značení provést záměnu $\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{u}$, $\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{v}$, $\mathbf{u}' \rightarrow \mathbf{v}'$:

$$\mathbf{v}' = \frac{\mathbf{v} + \mathbf{u} \left[\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{u^2} (\gamma - 1) - \gamma \right]}{\gamma \left(1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{c^2} \right)}. \quad (23.5)$$

Provedeme-li opět pomalou transformaci rychlosti ($\gamma \approx 1$), pak dostaneme:

$$\mathbf{v}' = \frac{\mathbf{v} - \mathbf{u}}{1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{c^2}}. \quad (23.6)$$

Odtud za \mathbf{v}' dosadíme do transformačního vztahu (23.4), kde za \mathbf{u}' dosadíme $-\mathbf{u}$:

$$\mathbf{F} = \left[\mathbf{F}' + \frac{\mathbf{u}}{c^2} \left(\mathbf{F}' \cdot \frac{\mathbf{v} - \mathbf{u}}{1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{c^2}} \right) \right] \left[1 + \frac{\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u})}{c^2 \left(1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{c^2} \right)} \right]^{-1}. \quad (23.7)$$

Tento výsledek dále upravíme s tím, že zanedbáme členy řádu u^2/c^2 , čímž dostaneme:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}' \left(1 - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{c^2} \right) + \frac{\mathbf{F}' \cdot \mathbf{v}}{c^2} \mathbf{u} = \mathbf{F}' + \frac{1}{c^2} [\mathbf{u}(\mathbf{F}' \cdot \mathbf{v}) - \mathbf{F}'(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})]. \quad (23.8)$$

Zde pro finální úpravu použijeme identitu pro dvojitý vektorový součin (4.34), čímž dostáváme:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}' + \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{F}'). \quad (23.9)$$

Nyní do tohoto vztahu dosadíme Coulombovu sílu (23.1) s tím, že použijeme pomalou transformaci ($\gamma \approx 1$) pro polohové vektory \mathbf{r}'_Q a \mathbf{r}'_q na základě transformačního vztahu (18.39) (a provedeme záměnu $\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{u}$):

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'_Q &= \mathbf{r}_Q - \mathbf{u}t_Q, \quad \mathbf{r}'_q = \mathbf{r}_q - \mathbf{u}t_q \Rightarrow \\ \mathbf{R}' &= \mathbf{r}'_Q - \mathbf{r}'_q = \mathbf{r}_Q - \mathbf{r}_q - \mathbf{u}(t_Q - t_q) = \mathbf{R} - \mathbf{u}(t_Q - t_q), \end{aligned} \quad (23.10)$$

kde \mathbf{r}_Q a \mathbf{r}_q představují polohové vektory nábojů Q a q v soustavě \mathcal{S} a t_Q , t_q jsou odpovídající časy v soustavě \mathcal{S} , které si opět vyjádříme pro pomalou transformaci času ($\gamma \approx 1$) na základě transformačního vztahu (18.42) s tím, že v čárkované soustavě \mathcal{S}' určujeme polohu obou nábojů současně ($t'_Q = t'_q$), takže po záměně $\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{u}$ můžeme psát:

$$\begin{aligned} t_Q &= t'_Q + \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{r}_Q}{c^2}, \quad t_q = t'_q + \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{r}_q}{c^2} \Rightarrow t_Q - t_q = t'_Q - t'_q + \frac{\mathbf{u} \cdot (\mathbf{r}_Q - \mathbf{r}_q)}{c^2} = \\ &\quad \underbrace{t'_Q - t'_q}_{=0} + \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{R}}{c^2} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{R}}{c^2}. \end{aligned} \quad (23.11)$$

Tento výsledek dosadíme do transformačního vztahu (23.10):

$$\mathbf{R}' = \mathbf{R} - \mathbf{u}(t_Q - t_q) = \mathbf{R} - \mathbf{u} \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{R}}{c^2} \approx \mathbf{R}, \quad (23.12)$$

protože

$$\left| \mathbf{u} \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{R}}{c^2} \right| \approx \frac{u^2}{c^2} R \Rightarrow |\mathbf{R}| \gg \left| \mathbf{u} \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{R}}{c^2} \right|.$$

Tedy na základě těchto výsledků můžeme psát, že $\mathbf{R}' \approx \mathbf{R} \Rightarrow \mathbf{F}'_C \approx \mathbf{F}_C$, což uplatníme při dosazení Coulombovy síly (23.1) do transformačního vztahu (23.9), takže můžeme s přesností na veličiny řádu u^2/c^2 psát:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}'_C + \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{F}'_C) = \mathbf{F}_C + \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{F}_C) = \mathbf{F}_C + \mathbf{F}_m = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{R^3} \mathbf{R} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{qQ}{R^3} \mathbf{v} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{R}) , \quad (23.13)$$

kde

$$\mathbf{F}_m = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{qQ}{R^3} [\mathbf{v} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{R})] \quad (23.14)$$

je tzv. **magnetická síla**, která se vyznačuje, na rozdíl od Coulombovy síly, tím, že působí **jen na pohybující se elektrické náboje** Q .

Vztah (23.14) můžeme napsat ve tvaru:

$$\mathbf{F}_m = Q \mathbf{v} \times \mathbf{B} , \quad (23.15)$$

kde jsme zavedli novou vektorovou veličinu

$$\mathbf{B} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{q}{R^3} (\mathbf{u} \times \mathbf{R}) = \frac{\mu_0 q}{4\pi R^3} (\mathbf{u} \times \mathbf{R}) . \quad (23.16)$$

Při úpravě vztahu (23.16) jsme použili novou konstantu

$$\mu_0 = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} , \quad (23.17)$$

které říkáme **permeabilita vakua**, příp. **magnetická konstanta**. Nově zavedená veličina \mathbf{B} popisuje vektorové pole, které se nazývá **pole magnetické**, a toto pole je zcela určeno pohybem zdrojového náboje q . Vektorovou veličinu \mathbf{B} nazýváme **magnetická indukce**, jejíž velikost udáváme v jednotkách **tesla**, kterou značíme T. Výraz (23.16) můžeme přepsat do tvaru:

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c^2} (\mathbf{u} \times \mathbf{E}) , \quad (23.18)$$

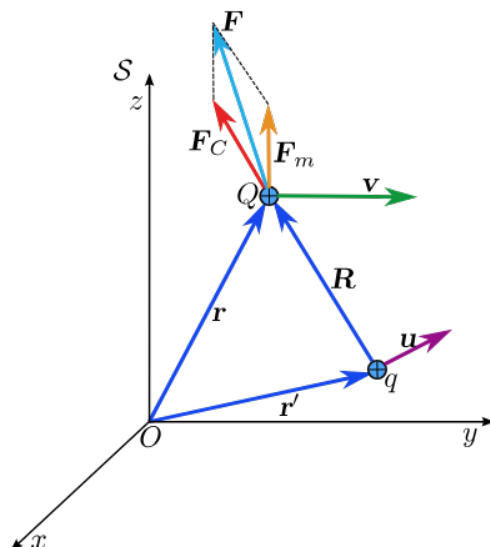
ze kterého vyplývá, že magnetické pole pohybujícího se náboje vzniká a existuje **současně** s elektrickým polem. Rovněž z tohoto vztahu je patrné, že vektor \mathbf{B} je v každém bodě kolmý k vektorům \mathbf{u} a \mathbf{E} . Vzhledem k elektrickému poli je magnetické pole relativistickým jevem druhého řádu. Ze vztahu (23.18) také vyplývá, že díky násobení vektorového součinu převrácenou hodnotou kvadrátu rychlosti světla ve vakuu přispívá magnetické pole k silovému působení na elektrický náboj v mnohem menší míře než pole elektrické. Z tohoto důvodu se může magnetické pole výrazněji projevit jen v případech, kdy je elektrické pole výrazně zeslabeno nebo zcela vzájemně elektricky kompenzováno, jak je tomu u vodičů, kterými prochází elektrický proud.

Pomocí vztahu (23.15) lze přepsat výraz (23.13) jako

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_C + \mathbf{F}_m = \mathbf{F}_C + Q \mathbf{v} \times \mathbf{B} = Q (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) , \quad (23.19)$$

sílu \mathbf{F} na levé straně této rovnice nazýváme **Lorentzova síla** (**Lorentzův vztah**).

Na obr. 23.2 je znázorněno působení Lorentzovy síly na elektrický náboj Q z



Obrázek 23.2: Působení Lorentzovy síly na elektrický náboj Q .

pohledu nečárkované (laboratorní) inerciální soustavy \mathcal{S} , kde je opět použito čárkovaných souřadnic pro zdrojové náboje, tj. $\mathbf{r}_Q \equiv \mathbf{r}$, $\mathbf{r}_q \equiv \mathbf{r}'$ a $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$. Ke grafickému znázornění magnetického pole používáme tzv. **indukční čáry**. Jde o orientované čáry, jejichž tečny v kterémkoliv jejich bodě mají směr vektoru magnetické indukce \mathbf{B} . Hustota indukčních čar se volí takovým způsobem, aby byla úměrná velikosti \mathbf{B} . Se zavedením indukčních čar souvisí skalární veličina Φ , kterou nazýváme **magnetický indukční tok**. Velikost této veličiny je úměrná celkovému počtu indukčních čar, které procházejí uvažovanou plochou v magnetickém poli. Z tohoto důvodu zavádíme magnetický indukční tok vztahem:

$$\frac{d\Phi}{dS_{\perp}} = B. \quad (23.20)$$

Odtud

$$d\Phi = BdS_{\perp} = BdS \cos \alpha = \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}, \quad (23.21)$$

kde α je úhel, který svírá normála k elementu plochy dS se směrem vektoru \mathbf{B} . Magnetický indukční tok Φ celou plochou S dostaneme součtem všech elementárních magnetických indukčních toků jejími elementy dS , tedy integrací přes celou plochu S :

$$\Phi = \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}. \quad (23.22)$$

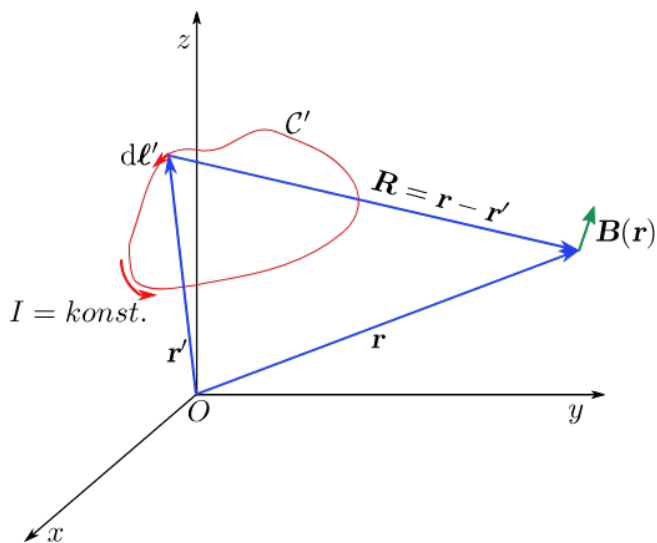
Jednotkou magnetického indukčního toku je **weber**, kterou značíme Wb.

23.2 Biotův-Savartův zákon

Ze vztahu (23.18) vyplývá, že zdrojem magnetického pole je pohybující se elektrický náboj. Avšak jeden pohybující se bodový náboj nemůže vytvořit stacionární magnetické pole. K vytvoření stacionárního magnetického pole je nutné mít uzavřený stacionární proud. Stacionární proud rozdělíme na proudové elementy a

výslednou magnetickou indukci popisující stacionární magnetické pole v daném místě určíme na základě principu superpozice. Princip superpozice pro magnetické pole nám umožňuje magnetická pole, vytvářená jednotlivými pohybujícími se náboji a proudy, nezávisle počítat.

Pro nalezení vztahu určujícího magnetickou indukci stacionárního magnetického pole v místě P o polohovém vektoru \mathbf{r} vyjdeme ze situace zachycené na obrázku 23.3. Na tomto obrázku je znázorněna proudová smyčka C' , kterou protéká stacionární elektrický proud I . Nejprve nalezneme vztah určující magnetickou indukci od proudového elementu $d\mathbf{l}$, pro který platí:



Obrázek 23.3: Situační obrázek k odvození Biotova-Savartova zákona.

$$d\mathbf{I} = I d\mathbf{l} = j \Delta S d\mathbf{l} = \mathbf{j} dV = \rho dV \mathbf{u} = dq \mathbf{u}, \quad (23.23)$$

kde $d\mathbf{l}$ je orientovaný oblouk vodiče ve směru protékaného proudu, ΔS je plocha příčného řezu uvažované proudové smyčky, ρ je objemová hustota náboje spojeného s proudovým elementem a \mathbf{u} představuje střední rychlost (driftovou rychlost) nosičů elektrického náboje.

S ohledem na obrázek 23.3 přepíšeme pro element náboje vztah (23.16):

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 dq}{4\pi} \frac{\mathbf{u} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \quad (23.24)$$

Do tohoto vztahu dosadíme za element náboje $dq = \rho(\mathbf{r}')dV'$:

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 \rho(\mathbf{r}') dV'}{4\pi} \frac{\mathbf{u} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \quad (23.25)$$

Tento vztah dále upravíme s ohledem na rovnost (23.23), ze které plyne, že $I d\mathbf{l}' = \rho dV' \mathbf{u}$, tedy

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\mathbf{l}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\mathbf{l}' \times \mathbf{R}}{R^3}. \quad (23.26)$$

S ohledem na princip superpozice a výše zmíněnou skutečnost, že stacionární magnetické pole může vytvořit stacionární proudová smyčka ($I = konst.$), provedeme

integraci příspěvků jednotlivých proudových elementů:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{C'} \frac{d\boldsymbol{\ell}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{C'} \frac{d\boldsymbol{\ell}' \times \mathbf{R}}{R^3}. \quad (23.27)$$

Vztah (23.27) nám umožňuje stanovit magnetické pole různých stacionárních proudových smyček, resp. stacionárních proudových vodičů. Tento vztah reprezentuje **Biotův-Savartův zákon**. Je nutné na tomto místě poznamenat, že vztah, který vyjadřuje Biotův-Savartův zákon lze použít pouze v případě vodičů, které mají natolik malý průřez, že je možné proud nosičů elektrického náboje považovat v průřezu za homogenní (homogenně rozložený)¹. V případě, že tomu tak není, je potřeba tento zákon vyjádřit v poněkud jiném tvaru. V takovémto případě je potřeba vyjít ze vztahu (23.25), který upravíme s ohledem na vztah $\mathbf{j}(\mathbf{r}') = \rho(\mathbf{r}')\mathbf{u}$:

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}') dV'}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \quad (23.28)$$

Provedeme integraci příspěvků jednotlivých objemových proudových elementů $\mathbf{j}(\mathbf{r}')dV'$:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V'} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V'} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \mathbf{R}}{R^3} dV'. \quad (23.29)$$

Vztah (23.29), vyjadřující Biotův-Savartův zákon v obecném tvaru, hraje v teorii magnetického pole stejnou roli jako Coulombův zákon v teorii elektrického pole. K další úpravě vztahu (23.29) použijeme následující rovnosti (viz dodatek B)

$$\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = -\nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (23.30)$$

Požijeme-li rovnost (23.30) ve vztahu (23.29) a identity:

$$\nabla \times (f\mathbf{F}) = (\nabla f) \times \mathbf{F} + f\nabla \times \mathbf{F} \Rightarrow (\nabla f) \times \mathbf{F} = \nabla \times (f\mathbf{F}) - f\nabla \times \mathbf{F}, \quad (23.31)$$

tak dostaneme:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V'} \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \times \mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V'} \left(\nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \times \mathbf{j}(\mathbf{r}') dV' = \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V'} \nabla \times \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' - \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V'} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \underbrace{\nabla \times \mathbf{j}(\mathbf{r}')}_{=0} dV' = \\ &= \underbrace{\nabla \times \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V'} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'}_{=\mathbf{A}(\mathbf{r})}, \quad (23.32) \end{aligned}$$

kde

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V'} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \quad (23.33)$$

¹Tedy aby bylo možné použít vztah $I = j\Delta S$.

je magnetický vektorový potenciál, kterému je věnována kapitola 23.6.

Při úpravách bylo použito skutečnosti, že je možné vytknout operátor ∇ , který operuje nad **nečárkovanými** souřadnicemi, kdežto integrace je prováděna vzhledem k souřadnicím čárkovaným, a rotace přes nečárkované souřadnice vektoru hustoty elektrického proudu $\mathbf{j}(\mathbf{r}')$, který je funkcí čárkovaných souřadnic, je rovna nulovému vektoru.

Provedeme-li divergenci vztahu (23.32), bude se jednat o divergenci rotace, která je vždy rovna nule (viz dodatek (A.10)), tedy

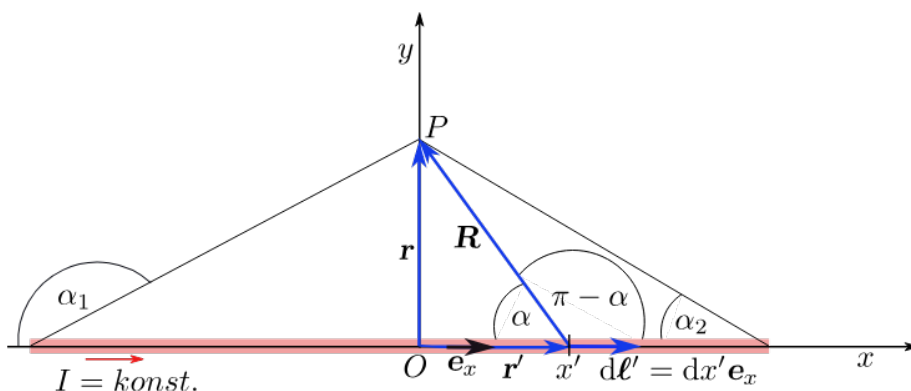
$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (23.34)$$

Tento výsledek nám říká, že magnetické pole (i nestacionární) je polem **solenoidálním** (**nezřídlovým**), to znamená, že indukční čáry se musí uzavírat samy do sebe nebo vycházet a končit v nekonečno. Solenoidální pole souvisí s experimentálně zjištěnou skutečností, že **neexistují magnetické náboje (magnetické monopóly)**².

Použijeme-li Gaussovu větu, pak je možné přepsat rovnici (23.34) do integrálního tvaru

$$\oiint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0. \quad (23.35)$$

Uvažujme nekonečný přímý vodič, kterým protéká proud $I = konst.$ ve směru osy x , viz obr. 23.4, kde je zachycen úsek uvažovaného vodiče. V bodě o polohovém vektoru \mathbf{r} určíme pomocí vztahu (23.27) velikost magnetické indukce. Z obrázku 23.4 plyne, že $d\ell' = dx' \mathbf{e}_x$ a $\mathbf{r}' = (x', 0, 0)$. S ohledem na tento situační obrázek lze napsat:



Obrázek 23.4: Úsek nekonečného přímého vodiče protékaného elektrickým proudem I .

$$R = \frac{r}{\sin \alpha}, \quad (23.36)$$

$$x' = \frac{r}{\tan \alpha}, \quad (23.37)$$

odtud

$$dx' = -\frac{r d\alpha}{\sin^2 \alpha}. \quad (23.38)$$

²Fyzik P. A. M. Dirac ukázal, že kvantová teorie pole připouští existenci magnetických monopolů, tedy částic nesoucích magnetický náboj. Takováto částice však doposud nebyla objevena.

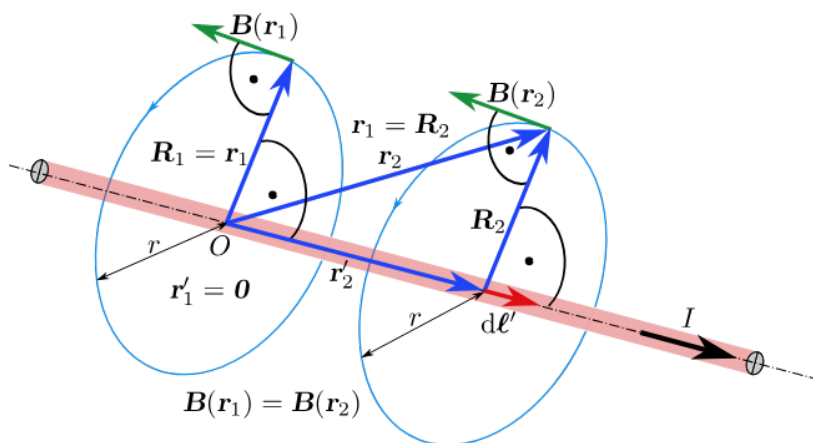
K určení velikosti vektoru magnetické indukce od úseku přímého vodiče v bodě P použijeme ve vztahu (23.27), do kterého dosadíme rovnosti (23.36) - (23.38), přičemž budeme předpokládat, že při probíhání elementu $d\ell'$ nabývá úhel α hodnot z intervalu $\langle \alpha_1; \alpha_2 \rangle$:

$$\begin{aligned} B(P) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{C'} \frac{|d\ell' \times \mathbf{R}|}{R^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{C'} \frac{|dx' \mathbf{e}_x \times \mathbf{R}|}{R^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{C'} \frac{R dx' \sin(\pi - \alpha)}{R^3} = \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{C'} \frac{dx' \sin \alpha}{R^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{C'} \frac{-\frac{r d\alpha}{\sin^2 \alpha} \sin \alpha}{\frac{r^2}{\sin^2 \alpha}} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi r} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin \alpha d\alpha = \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi r} (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1). \quad (23.39) \end{aligned}$$

Výsledek (23.39) představuje příspěvek přímého úseku vodiče protékaného proudem I k magnetické indukci. Bude-li vodič nekonečně dlouhý, potom bude $\alpha_1 = \pi$ a $\alpha_2 = 0$. Dosazením do výsledku (23.39) dostaneme:

$$B(P) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}. \quad (23.40)$$

Z výsledku vidíme, že velikost vektoru magnetické indukce v případě přímého



Obrázek 23.5: Orientace vektoru magnetické indukce pro nekonečně dlouhý vodič protékaný proudem I .

nekonečného vodiče protékaného konstantním proudem závisí jen na velikosti tohoto proudu a na kolmé vzdálenosti r od tohoto vodiče. To znamená, že ve všech bodech na obvodu kružnice poloměru r je velikost magnetické indukce stejná. Pro velmi dlouhý vodič můžeme rovněž použít pro velikost magnetické indukce vztah (23.40).

Pomocí obr. 23.4 můžeme určit i orientaci vektoru magnetické indukce v bodě P na základě vztahu (23.26), kde orientace je dána vektorovým součinem $d\ell' \times \mathbf{R}$, tedy jednotkový vektor vektoru magnetické indukce je v tomto místě shodný s jednotkovým souřadnicovým vektorem \mathbf{e}_z , který je tečný ke kružnici o poloměru r mající střed v počátku kartézské souřadnicové soustavy. V jiných bodech na této kružnici tedy bude mít vektor rovněž směr tečný k této kružnici, jehož orientaci můžeme určit na základě **Ampèrova pravidla pravé ruky**, které nám říká :

Zahnuté prsty pravé ruky ukazují orientaci indukčních čar, když vztyčený palec ukazuje ve směru proudu.

Již víme, že indukční čáry jsou uzavřené orientované křivky, pak v případě nekonečně dlouhého přímého vodiče protékaného konstantním proudem představují indukční čáry kružnice, přičemž jejich středy leží na ose uvažovaného vodiče. Na obr. 23.5 je ukázán vektor magnetické indukce v místech o daných polohovými vektory \mathbf{r}_1 a \mathbf{r}_2 , přičemž jejich kolmá vzdálenost od vodiče je stejná, tj. r .

Na základě výše uvedeného lze na základě vztahu (23.40) napsat vektor magnetické indukce pro nekonečně dlouhý přímý vodič protékaný konstantním proudem I :

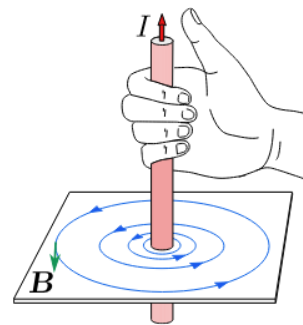
$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \boldsymbol{\tau}(\mathbf{r}), \quad (23.41)$$

kde $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{r})$ je jednotkový tečný vektor ke kružnici o poloměru r , jejíž střed je totožný s počátkem souřadnic ležícím na vodiči ($\mathbf{r}' = \mathbf{0}$).

V případě, že střed kružnic, reprezentujících uzavřené indukční čáry, může ležet mimo počátek souřadnic ležící na nekonečném přímém vodiči ($\mathbf{r}' \neq \mathbf{0}$), pak vektor magnetické indukce můžeme vyjádřit jako

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \boldsymbol{\tau}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \boldsymbol{\tau}(\mathbf{r}), \quad (23.42)$$

kde $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{r})$ je jednotkový tečný vektor ke kružnici o poloměru R , jejíž střed leží na vodiči v místě o polohovém vektoru \mathbf{r}' . V případě, že $\mathbf{r}' = \mathbf{0}$, redukuje se vztah (23.42) na vztah (23.41).



Jednotkový tečný vektor $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{r})$ mění svoji orientaci v závislosti na poloze určené polohovým vektorem \mathbf{r} .

Příklad 23.2.1

Nalezněte vztah pro vektor magnetické indukce na ose kruhového závitu totožnou s osou z protékaného konstantním proudem I o poloměru a v závislosti na souřadnici z , když tento proudový závit leží v rovině $z = 0$, viz obr. 23.6.

Řešení:

Při určení vektoru magnetické indukce vyjdeme ze vztahu (23.27), tj.

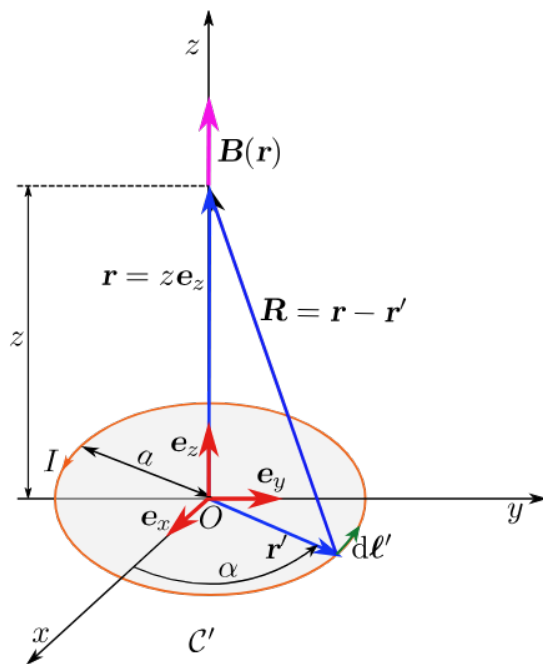
$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{C'} \frac{d\boldsymbol{\ell}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{C'} \frac{d\boldsymbol{\ell}' \times \mathbf{R}}{R^3}. \quad (23.43)$$

Z obr. 23.6 je vidět, že platí následující rovnosti:

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{\ell}' &= dx' \mathbf{e}_x + dy' \mathbf{e}_y, \quad \mathbf{r} = z \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{r}' = x' \mathbf{e}_x + y' \mathbf{e}_y, \quad r' = \sqrt{x'^2 + y'^2} = a, \\ \mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}' &= -dx' \mathbf{e}_x - dy' \mathbf{e}_y + z \mathbf{e}_z, \quad R = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z^2} = \sqrt{a^2 + z^2} \\ R^3 &= (a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}. \end{aligned} \quad (23.44)$$

Vzhledem k symetrii úlohy použijeme s výhodou polární souřadnice:

$$x' = a \cos \alpha \quad \Rightarrow \quad dx' = -a \sin \alpha d\alpha, \quad y' = a \sin \alpha \quad \Rightarrow \quad dy' = a \cos \alpha d\alpha. \quad (23.45)$$



Obrázek 23.6: Magnetické pole na ose kruhového závitu protékaného proudem I .

Pomocí polárních souřadnic můžeme přepsat první a pátý vztah v rovnostech (23.44) jako

$$d\ell' = -a \sin \alpha d\alpha \mathbf{e}_x + a \cos \alpha d\alpha \mathbf{e}_y, \quad \mathbf{R} = -a \cos \alpha \mathbf{e}_x - a \sin \alpha \mathbf{e}_y + z \mathbf{e}_z. \quad (23.46)$$

$$\begin{aligned} d\ell' \times \mathbf{R} &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ -a \sin \alpha d\alpha & a \cos \alpha d\alpha & 0 \\ -a \cos \alpha & -a \sin \alpha & z \end{vmatrix} = \\ &= az \cos \alpha d\alpha \mathbf{e}_x + az \sin \alpha d\alpha \mathbf{e}_y + \underbrace{(a^2 \sin^2 \alpha d\alpha + a^2 \cos^2 \alpha d\alpha)}_{a^2 d\alpha} \mathbf{e}_z = \\ &= za \cos \alpha d\alpha \mathbf{e}_x + za \sin \alpha d\alpha \mathbf{e}_y + a^2 d\alpha \mathbf{e}_z. \end{aligned} \quad (23.47)$$

Dosadíme tento výsledek vektorového součinu do vztahu (23.43), takže dostáváme:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mathbf{B}((0, 0, z)) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi (a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \left[az \underbrace{\left(\int_0^{2\pi} \cos \alpha d\alpha \right)}_{=0} \mathbf{e}_x + az \underbrace{\left(\int_0^{2\pi} \sin \alpha d\alpha \right)}_{=0} \mathbf{e}_y + \right. \\ &\quad \left. a^2 \underbrace{\left(\int_0^{2\pi} d\alpha \right)}_{=2\pi} \mathbf{e}_z \right] = \frac{\mu_0 I a^2}{2 (a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \mathbf{e}_z. \end{aligned} \quad (23.48)$$

Tedy hledaný vztah pro vektor magnetické indukce ležící na ose kruhového proudového závitu poloměru a ve vzdálenosti z je:

$$\mathbf{B}(z) = \frac{\mu_0 a^2 I}{2(a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \mathbf{e}_z. \quad (23.49)$$

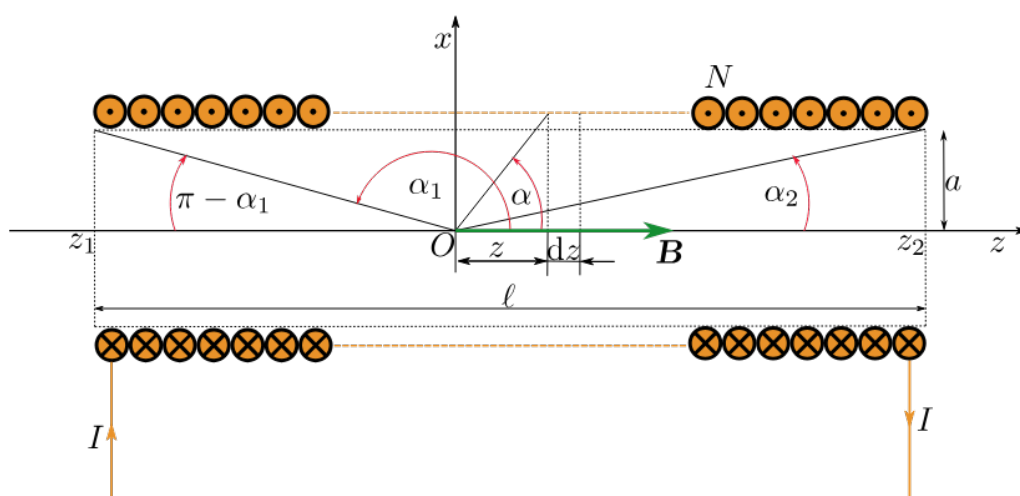
Ve středu uvažovaného proudového závitu ($z = 0$) je vektor magnetické indukce:

$$\mathbf{B}(0) = \frac{\mu_0 I}{2a} \mathbf{e}_z. \quad (23.50)$$

Cívkou, jejíž závity jsou navinuty v jedné vrstvě těsně vedle sebe na válcové ploše, nazýváme **solenoidem**.

Příklad 23.2.2

Nalezněte vztah pro vektor magnetické indukce na ose solenoidu totožnou s osou z protékaného konstantním proudem I o poloměru a v závislosti na souřadnici z , když tento solenoid má délku ℓ a obsahuje N závitů, viz obr. 23.7.



Obrázek 23.7: Magnetické pole na ose solenoidu protékaného proudem I .

Řešení:

Na jednotku délky solenoidu připadá N/ℓ závitů, takže na délce dz je počet závitů Ndz/ℓ .

Úlohu nejsnáze vyřešíme, použijeme-li principu superpozice a výsledku z předchozí úlohy (23.49), kdy ve vzdálenosti z od počátku souřadnic, viz obr. 23.7, můžeme psát:

$$d\mathbf{B}(z) = \frac{\mu_0 a^2 I}{2(a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{N}{\ell} dz \mathbf{e}_z, \quad (23.51)$$

což je příspěvek Ndz/ℓ závitů.

Výslednou hodnotu pero vektor magnetické indukce obdržíme následnou integrací vztahu (23.51):

$$B = \frac{\mu_0 a^2 I N}{2 \ell} \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{(a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu_0 I N}{2 \ell} \left[\frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right]_{z_1}^{z_2} = \frac{\mu_0 I N}{2 \ell} \left(\frac{|z_2|}{\sqrt{a^2 + z_2^2}} + \frac{|z_1|}{\sqrt{a^2 + z_1^2}} \right). \quad (23.52)$$

Substitute:

$$z = a \tan(u) \Rightarrow dz = a \cos^{-2} u du.$$

Z obr. 23.7 vidíme, že

$$\cos \alpha_2 = \frac{|z_2|}{\sqrt{a^2 + z_2^2}}, \quad \cos(\pi - \alpha_1) = -\cos \alpha_1 = \frac{|z_1|}{\sqrt{a^2 + z_1^2}}. \quad (23.53)$$

Dosadíme rovnosti (23.53) do výsledku integrace (23.52), tak dostáváme vztah pro vektor magnetické indukce na ose solenoidu:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I N}{2 \ell} (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1) \mathbf{e}_z. \quad (23.54)$$

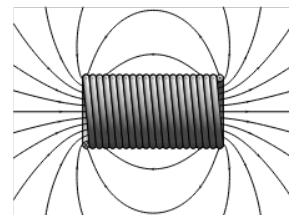
V případě, že budeme uvažovat velmi dlouhý solenoid, potom $\alpha_1 \rightarrow \pi$ a $\alpha_2 \rightarrow 0$, pak se vztah (23.54) redukuje na:

$$\mathbf{B} \approx \mu_0 I \frac{N}{\ell} \mathbf{e}_z. \quad (23.55)$$

Umístíme-li počátek souřadnicové soustavy do bodu $z = z_2$ (okraj solenoidu), potom v tomto místě bude $\alpha_2 = \pi/2$ a pro případ velmi dlouhého solenoidu bude platit, že $\alpha_1 \rightarrow \pi$, takže po osazení do vztahu (23.54) dostaneme:

$$\mathbf{B} \approx \frac{\mu_0 I N}{2 \ell} \mathbf{e}_z. \quad (23.56)$$

Odtud vidíme, že na okraji velmi dlouhého solenoidu bude hodnota magnetické indukce poloviční, než uvnitř takového solenoidu, což je zapříčiněno rozptylem magnetického pole.



23.3 Magnetická síla působící na proudový element a vzájemné silové působení dvou vodičů protékaných elektrickým proudem

V rámci této kapitoly vyšetříme působení magnetického pole o indukci \mathbf{B} (o jeho zdroji zprvu nic nepředpokládáme) na proudový element $d\mathbf{I} = I d\mathbf{\ell}$. Podle vztahu (23.15) bude magnetické pole působit silou \mathbf{F}_m jen na pohybující se elektrický náboj. Uvažujme pouze volný elektrický náboj ve vodiči, přičemž předpokládáme, že objem, v němž protéká proud, je elektricky neutrální, tj. pro objemovou hustotu

elektrického náboje platí: $\rho = 0$, čímž je možné z úvah o silovém působení na vodič vyloučit elektrickou sílu. Volný náboj ve vodiči se pohybuje driftovou rychlostí:

$$\mathbf{v} = \frac{d\boldsymbol{\ell}}{dt} . \quad (23.57)$$

Pro velikost volného náboje můžeme na základě vztahu (22.3) psát:

$$dQ = Idt . \quad (23.58)$$

Dosazením vztahů (23.57) a (23.58) do vztahu pro magnetickou sílu (23.15) dostaneme magnetickou sílu působící na proudový element:

$$d\mathbf{F}_m = dQ\mathbf{v} \times \mathbf{B} = Idt \frac{d\boldsymbol{\ell}}{dt} \times \mathbf{B} = Id\boldsymbol{\ell} \times \mathbf{B} . \quad (23.59)$$

Tedy magnetická síla působící na proudový element v místě o polohovém vektoru \mathbf{r} je dána vztahem:

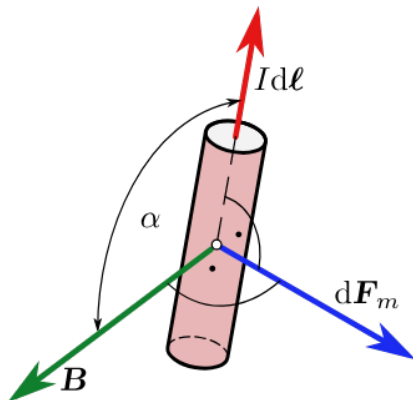
$$d\mathbf{F}_m(\mathbf{r}) = Id\boldsymbol{\ell} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) . \quad (23.60)$$

Velikost síly (23.60) je dána vztahem:

$$dF_m = BId\ell \sin \alpha , \quad (23.61)$$

kde α je úhel, který svírají vektor magnetické indukce \mathbf{B} s proudovým elementem $Id\boldsymbol{\ell}$, viz obr. 23.8.

K určení směru působící síly $d\mathbf{F}_m$ se užívá Flemingovo pravidlo levé ruky:



Obrázek 23.8: Magnetická síla působící na proudový element.

Levou ruku položíme na vodič tak, aby prsty ukazovaly směr proudu a indukční čáry vstupovaly do dlaně, pak vztyčený palec ukazuje orientaci síly, kterou magnetické pole působí na vodič protékaný proudem.

K určení orientace síly působící na proudový element můžeme samozřejmě použít i znalosti pro určení orientace vektorového součinu.

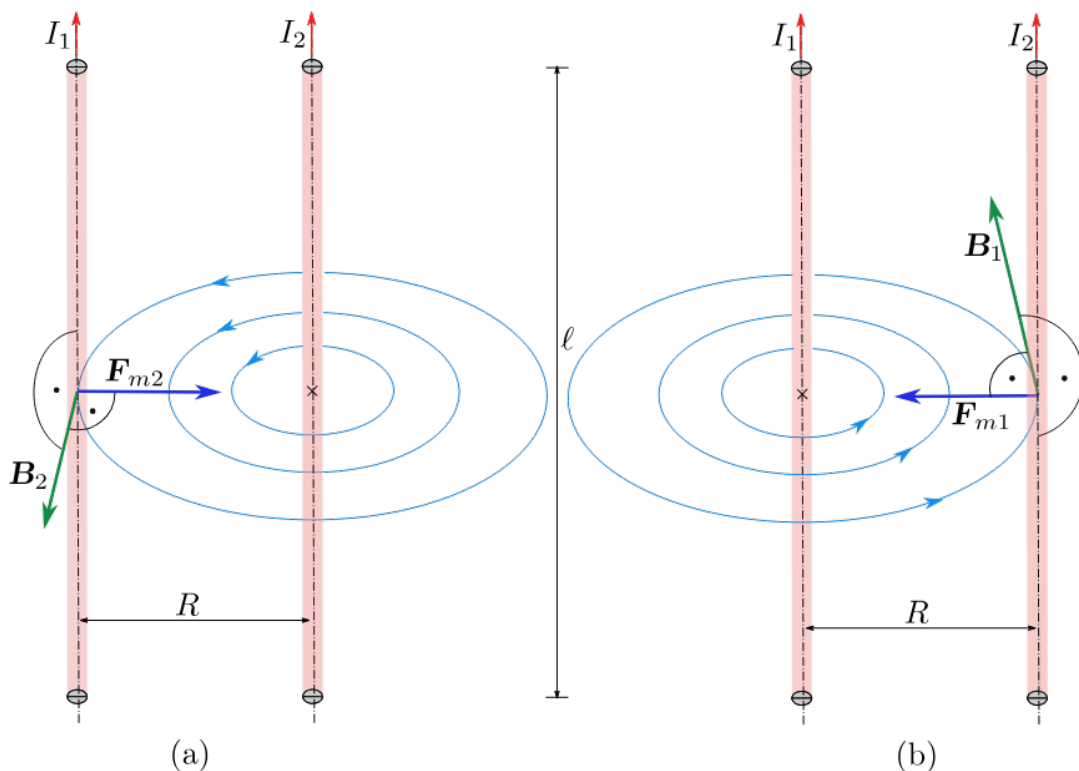
V případě, že uvažujeme dlouhý přímý vodič protékaný proudem I a tento vodič se nachází v homogenním magnetickém poli \mathbf{B} , které je k vodiči kolmé, potom na základě vztahu (23.61) můžeme vyjádřit velikost magnetické síly působící na délku vodiče ℓ jako

$$F_m = BIl , \quad (23.62)$$

příčměž orientace této magnetické síly určíme pomocí Flemingova pravidla levé ruky.

Nyní budeme uvažovat dva dlouhé tenké přímé rovnoběžné vodiče a protékané proudy I_1 a I_2 , které jsou od sebe vzdáleny R . Již víme, že přímé vodiče protékané elektrickým proudem kolem sebe vytváří magnetické pole, jehož indukční čáry představují kružnice, jejíž středy leží na ose vodiče. Tudíž magnetická pole uvažovaných vodičů budou mít za následek, že na sebe budou tyto vodiče působit vzájemnými magnetickými silami, viz obr. 23.9.

Velikost magnetické indukce od prvního vodiče B_1 je v kolmé vzdálenosti R podle



Obrázek 23.9: Vzájemné působení magnetickými silami mezi přímými dlouhými vodiči na délce vodiče ℓ při souhlasných proudech.

vztahu (23.42):

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi R} \quad (23.63)$$

a velikost magnetické indukce od druhého vodiče B_2 ve stejné vzdálenosti tedy je:

$$B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi R}. \quad (23.64)$$

Velikost magnetické síly, kterou působí druhý vodič na délce ℓ prvního vodiče je na základě vztahů (23.62) a (23.64) dána následujícím vztahem:

$$F_{m2} = B_2 I_1 \ell = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{R} \ell. \quad (23.65)$$

Orientaci této magnetické síly při souhlasném směru proudů I_1 a I_2 určíme pomocí Flemingova pravidla levé ruky, viz obr. 23.9(a).

Obdobným způsobem určíme magnetickou sílu, kterou působí první vodič na druhý, tj.

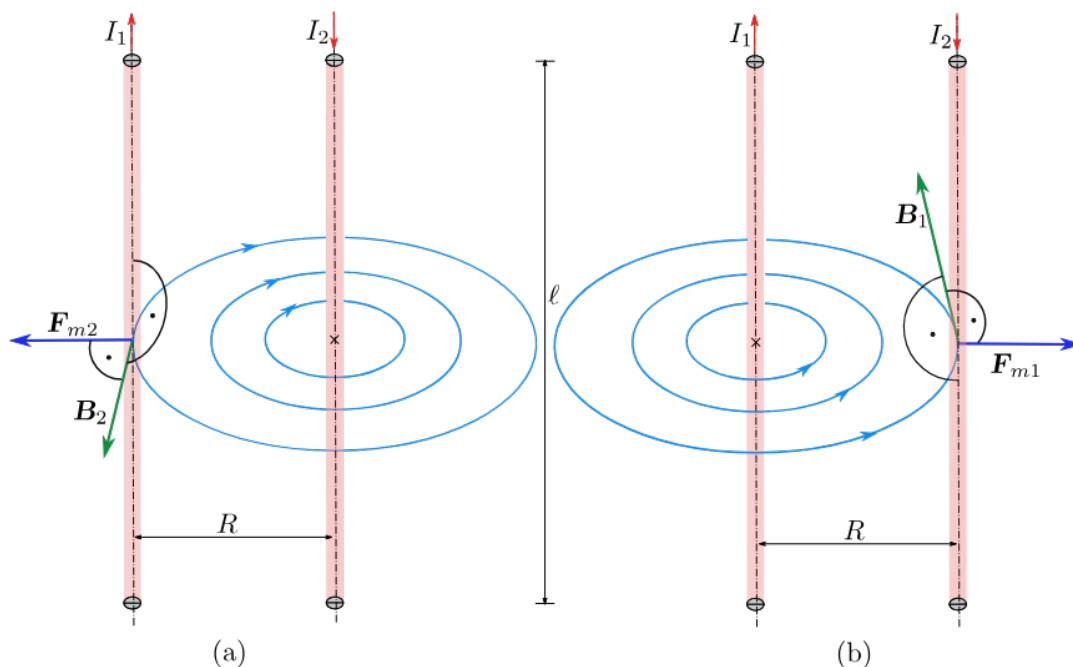
$$F_{m1} = B_1 I_2 \ell = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{2R} \ell. \quad (23.66)$$

Orientaci opět určíme pomocí Flemingova pravidla levé ruky, viz obr. 23.9(b).

Porovnáním sil vyjádřených vztahy (23.65) a (23.66) vidíme, že co do velikosti jsou obě magnetické síly stejné, tj. $F_{m1} = F_{m2}$.

Z obr. 23.9 vidíme, že vlivem vzájemných magnetických sil se oba vodiče protékající souhlasným proudem **přitahují**.

V případě, že vodiče jsou protékány nesouhlasnými proudy, tak dostaneme stejné velikosti magnetických sil F_{m1} a F_{m2} jako v případě vodičů protékáných souhlasnými elektrickými proudy, avšak na základě Flemingova pravidla levé ruky zjistíme, že jsou tyto síly orientovány opačně, tudíž se budou uvažované vodiče vzájemně **odpuzovat**, viz obr. 23.10.



Obrázek 23.10: Vzájemné působení magnetickými silami mezi přímými dlouhými vodiči na délce vodiče ℓ při nesouhlasných proudech.

23.4 Hallův jev

Hallův jev je jedním z nejznámějších galvanomagnetických jevů. Projevuje se vznikem tzv. **Hallova napětí** U_H na plochem vodiči ve směru kolmém ke směru proudu I i ke směru magnetického pole, do kterého je vodič vložen. Hallovo napětí je způsobeno silami, které působí v magnetickém poli na pohybující se nosiče elektrického náboje ve vodiči.

Je-li proud I ve vodivé destičce tvořen uspořádaným pohybem částic (elektronů) s nábojem $q = -e$, které se pohybují průměrnou driftovou rychlostí \mathbf{v} proti směru proudu, pak v magnetickém poli o indukcii \mathbf{B} na ně působí magnetická síla

(23.15)

$$\mathbf{F}_m = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} . \quad (23.67)$$

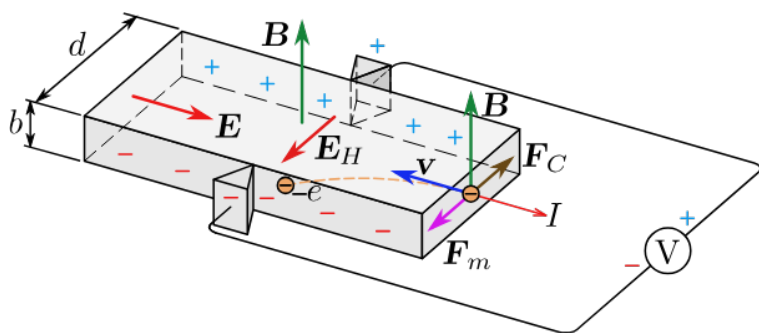
Tato síla způsobí zvýšení koncentrace nosičů náboje elektrického proudu u boční stěny vodiče, která se v důsledku toho nabije záporně. U protilehlé boční stěny se naopak koncentrace nosičů elektrického proudu sníží, takže tato stěna se nabije kladně. Tím vznikne napříč vodiče elektrické pole o intenzitě \mathbf{E}_H a na nosiče náboje bude současně působit síla elektrická (viz obr. 23.11)

$$\mathbf{F}_C = q\mathbf{E}_H . \quad (23.68)$$

V ustáleném stavu jsou obě síly stejné a opačně orientované, takže pro jejich velikosti platí

$$F_C = F_m \Rightarrow qE_H = q|\mathbf{v} \times \mathbf{B}| . \quad (23.69)$$

Je-li vodivá destička umístěna kolmo k magnetickým indukčním čarám, pak $\mathbf{v} \perp$



Obrázek 23.11: Situační obrázek k vysvětlení Hallova jevu.

\mathbf{B} , a tedy $|\mathbf{v} \times \mathbf{B}| = vB$. Velikost intenzity příčného elektrického pole vyjádříme pomocí Hallova napětí U_H

$$E_H = \frac{U_H}{d} , \quad (23.70)$$

kde d je šířka vodiče, viz obr. 23.11.

Tedy po dosazení do předchozí rovnice dostaneme

$$\frac{U_H}{d} = vB \quad (23.71)$$

a odtud

$$U_H = dvB . \quad (23.72)$$

Je-li n počet volných nosičů náboje v jednotkovém objemu vodiče, pak velikost hustoty proudu ve vodiči je $j = qnv$. Odtud

$$v = \frac{j}{nq} . \quad (23.73)$$

Dosazením tohoto vztahu do výrazu (23.72) dostaneme

$$U_H = dvB = \frac{1}{nq} d j B = \frac{1}{nq} \frac{b d j}{b} B , \quad (23.74)$$

kde b je tloušťka vodivé destičky. Pro kolmý průřez vodiče platí, že $S_{\perp} = bd$, takže $dbj = S_{\perp}j = I$, což je velikost proudu uvažovaným vodičem. Odtud můžeme přepsat vztah (23.74) do tvaru

$$U_H = \frac{1}{nq} \frac{I}{b} B, \quad (23.75)$$

Dále zavedeme veličinu

$$R_H = \frac{1}{nq}, \quad (23.76)$$

kteřou nazýváme **Hallova konstanta**. Z tohoto vztahu je vidět, že je nepřímo úměrná koncentraci volných nosičů náboje. Vztah pro Hallovo napětí můžeme s ohledem na rovnost (23.76) zapsat jako

$$U_H = R_H \frac{I}{b} B. \quad (23.77)$$

U polovodičů je koncentrace n volných nosičů náboje malá v porovnání s kovy, a proto Hallova konstanta R_H bude velká (např. pro vizmut je $R_H = -1.10^{-6} \text{ m}^3\text{C}^{-1}$). Odtud plyne, že Hallův jev u polovodičových materiálů se poměrně snadno měří. U kovů je Hallova konstanta R_H malá (např. pro měď je $R_H = -7.4.10^{-11} \text{ m}^3\text{C}^{-1}$), takže se Hallův jev měří obtížně. Proto je nutné v případě kovů použít tenké vzorky, viz vztah (23.77).

Ze vztahu pro Hallovo napětí (23.77) vyplývá, že pro danou vodivou nebo polovodičovou destičku, která je protékána konstantním proudem I , je Hallovo napětí U_H přímo úměrné velikosti magnetické indukce, čehož využívají přístroje pro měření magnetického pole zvané **teslametry**.

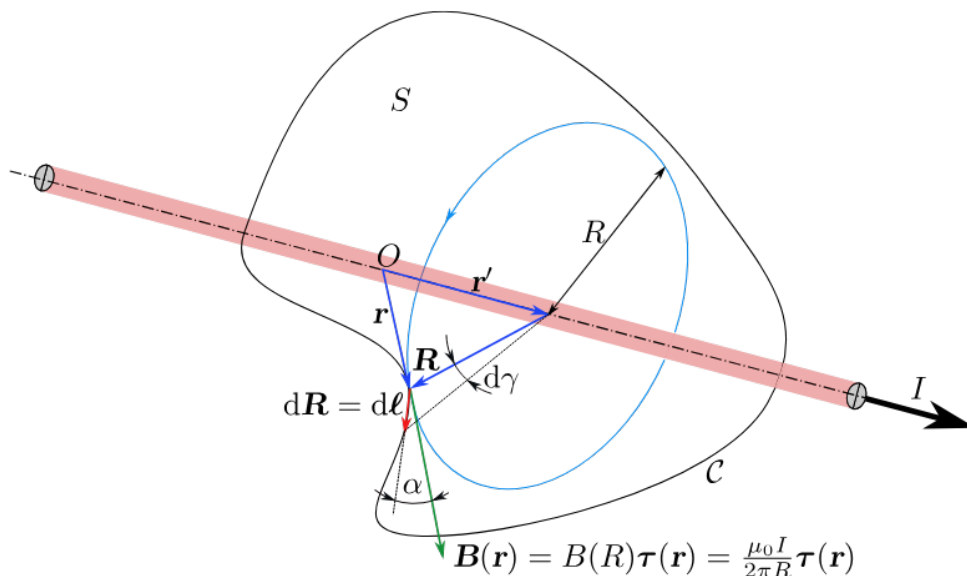
23.5 Ampèrovův zákon celkového proudu pro bezmateriálové prostředí

Ze vztahu (23.42) plyne, že vektor magnetická indukce, kterou vytvoří přímý nekonečně dlouhý vodič protékaný proudem I , má stejnou velikost podél kružnice o poloměru R , jejímž středem tento vodič prochází a jeho směr je tečný k této kružnici a orientace je dána Ampèrovým pravidlem pravé ruky. Uvažujme, že tento vodič prochází uzavřenou rovinnou křivkou \mathcal{C} , která leží v rovině kolmé na vodič, jak je ukázáno na obr. 23.12. Z tohoto obrázku lze vidět, že průmět vektoru $d\ell$ do směru jednotkového tečného vektoru $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{r})$ je dán skalárním součinem $d\ell \cdot \boldsymbol{\tau}(\mathbf{r}) = \cos \alpha d\ell$ a tento průmět se rovná délce oblouku na kružnici o poloměru R v daném místě, tj. $Rd\gamma$. Tedy můžeme psát:

$$\cos \alpha d\ell = Rd\gamma. \quad (23.78)$$

Nyní provedeme cirkulaci vektoru magnetické indukce $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ podél křivky \mathcal{C} , pro kterou použijeme vztah (23.42) a rovnost (23.78):

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot d\ell = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{\boldsymbol{\tau}(\mathbf{r}) \cdot d\ell}{R} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{\cos \alpha d\ell}{R} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R d\gamma}{R} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\gamma = \frac{\mu_0 I}{2\pi} 2\pi = \mu_0 I. \quad (23.79)$$



Obrázek 23.12: Situační obrázek k odvození Ampèrova zákona celkového proudu pro bezmateriálové prostředí.

Dostáváme důležitý vztah:

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \mu_0 I . \quad (23.80)$$

Tento vztah lze ještě zobecnit pro případ, kdy uvažovanou uzavřenou rovinnou křivkou \mathcal{C} prochází více vodičů s proudy I_1, I_2, \dots, I_N . Pro každý z těchto proudů bude platit vztah (23.80), tj.

$$\oint_C \mathbf{B}_n \cdot d\boldsymbol{\ell} = \mu_0 I_n , \quad n = 1, 2, \dots, N . \quad (23.81)$$

Poněvadž magnetické pole elektrických proudů splňuje princip superpozice, pak platí:

$$\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 + \dots + \mathbf{B}_N = \sum_{n=1}^N \mathbf{B}_n = \mathbf{B} . \quad (23.82)$$

Tedy při použití vztahů (23.80) a (23.82) dostáváme:

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \oint_C \left(\sum_{n=1}^N \mathbf{B}_n \right) \cdot d\boldsymbol{\ell} = \sum_{n=1}^N \oint_C \mathbf{B}_n \cdot d\boldsymbol{\ell} = \mu_0 \sum_{n=1}^N I_n = \mu_0 I , \quad (23.83)$$

kde I představuje celkový proud procházející plochou S ohraničenou křivkou \mathcal{C} . Tímto jsme dospěli k zobecnění původního vztahu (23.80), který upřesníme:

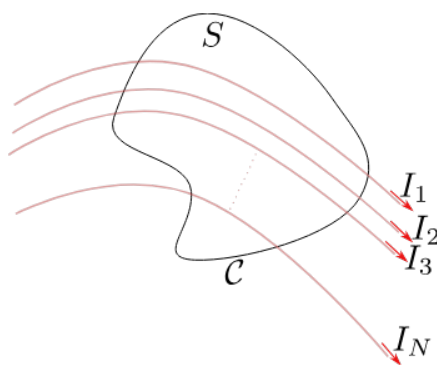
$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \mu_0 I , \quad I = \sum_{n=1}^N I_n . \quad (23.84)$$

Vztah (23.84) představuje tzv. **Ampèrův zákon celkového proudu v integrálním tvaru pro bezmateriálové prostředí**, který nám říká:

Křivkový integrál vektoru magnetické indukce podél uzavřené křivky se rovná μ_0

násobku celkového elektrického proudu procházejícího plochou, která je ohraničena touto křivkou³.

Při odvození Ampèrova zákona celkového proudu v integrálním tvaru pro bezmateriálové prostředí jsme předpokládali, že křivka C leží v rovině kolmé k vodiči, což nám umožnilo poměrně jednoduše dospět ke vztahu (23.84), který však platí obecněji, tj. křivka C nemusí být rovinná a vodiče procházející touto přímkou nemusí být přímé. Obecnější odvození Ampèrova zákona celkového proudu pro bezmateriálové prostředí je pro zájemce uvedeno až v závěru této kapitoly. V další části textu tedy budeme pohlížet Ampèrův zákon celkového proudu v integrálním tvaru pro bezmateriálové prostředí (23.84), že platí obecně, viz obr. 23.13. Celkový proud protékající plochou S si lze pomocí vztahu (22.7) vyjádřit jako



Obrázek 23.13: Ampèrův zákon celkového proudu pro bezmateriálové prostředí.

$$I = \iint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} ,$$

takže když použijeme Stokesovu větu (9.51) lze přepsat rovnost (23.84) vyjádřit následujícím způsobem:

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 I = \mu_0 \iint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mu_0 \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} . \quad (23.85)$$

Odtud můžeme psát:

$$\iint_S (\nabla \times \mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{j}) \cdot d\mathbf{S} = 0 . \quad (23.86)$$

Protože se jedná o libovolnou plochu S , tak lze obecně splnit tuto rovnici, když integrand bude roven nulovému vektoru, tj. $\nabla \times \mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{j} = \mathbf{0}$. Potom musí platit:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} . \quad (23.87)$$

Rovnice (23.87) představuje Ampèrův zákon celkového proudu v diferenciálním tvaru pro bezmateriálové prostředí.

³ $I = \sum_n I_n$.

Obecnější odvození Ampèrova zákona celkového proudu

Provedeme-li rotaci rovnosti (23.32), pak pomocí identity (A.13) dostaneme:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \nabla \times \left(\nabla \times \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V'} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \right) = \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V'} \nabla \left(\nabla \cdot \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) dV' - \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V'} \nabla^2 \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'. \end{aligned} \quad (23.88)$$

Integraci posledního integrálu můžeme provést přímo, použijeme-li následující rovnosti:

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') , \quad (23.89)$$

kde $\delta(\mathbf{r})$ je trojrozměrná Diracova funkce. Tedy

$$-\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V'} \nabla^2 \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' = \mu_0 \iiint_{V'} \mathbf{j}(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dV' = \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}) . \quad (23.90)$$

Porovnáním identit (A.26) a (A.31) můžeme psát:

$$\nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -\nabla' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} . \quad (23.91)$$

Protože ∇ operuje pouze s nečárkovanými souřadnicemi, je možné přepsat předposlední integrál v rovnosti (23.88) pomocí vztahu (23.91) přepsat jako

$$\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V'} \nabla \left(\nabla \cdot \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) dV' = -\frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \iiint_{V'} \mathbf{j}(\mathbf{r}') \cdot \nabla' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' . \quad (23.92)$$

Pro další úpravu pravé části této rovnice použijeme tuto identitu:

$$\nabla \cdot (f \mathbf{F}) = \mathbf{F} \cdot \nabla f + f \nabla \cdot \mathbf{F} . \quad (23.93)$$

Pomocí této identity tedy dostáváme:

$$\begin{aligned} -\frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \iiint_{V'} \mathbf{j}(\mathbf{r}') \cdot \nabla' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' &= \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \iiint_{V'} \frac{\nabla' \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' - \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \iiint_{V'} \nabla' \cdot \left(\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) dV' . \end{aligned} \quad (23.94)$$

Druhý integrál na pravé straně rovnice převedeme pomocí Gaussovy věty (12.56) na integrál plošný:

$$-\frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \iiint_{V'} \mathbf{j}(\mathbf{r}') \cdot \nabla' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \iiint_{V'} \frac{\nabla' \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' - \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \oint_{S'} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{S}' . \quad (23.95)$$

Protože v magnetostatice je nutné považovat elektrické proudy za stacionární, tak z rovnice kontinuity vyplývá, že $\nabla' \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}') = 0$. Z tohoto důvodu bude první integrál na pravé straně rovnice (23.95) roven nule. Zbývající plošný integrál bude však rovněž roven nule díky skutečnosti, že distribuce proudové hustoty je prostorově omezená a uzavřenou plochu, přes kterou integrujeme, můžeme neomezeně zvětšovat.

S ohledem na výsledky integrací nakonec dostáváme, že

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} . \quad (23.96)$$

Tento výraz vyjadřuje Ampèrův zákon celkového proudu v diferenciálním tvaru. Pomocí Stokesovy (9.51) věty můžeme ze vztahu (23.87) dostat Ampèrův zákon celkového proudu v integrálním tvaru, tedy

$$\iint_S \nabla \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \mu_0 \iint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 I , \quad (23.97)$$

kde I je celkový proud procházející plochou S , jejíž hranice je tvořena uzavřenou křivkou C (obecně se jedná o prostorovou křivku).

Tedy ze vztahu (23.97) napíšeme Ampèrův zákon celkového proudu v integrálním tvaru jako

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \mu_0 I . \quad (23.98)$$

23.6 Vektorový potenciál magnetického pole a Poissonova rovnice pro vektorový potenciál magnetického pole

Pro popis magnetického pole by bylo výhodné, kdyby bylo možné obecně odvodit vektor magnetické indukce \mathbf{B} jako gradient skalární funkce. Vzhledem k tomu, že rotace vektoru magnetické indukce není obecně rovna nulovému vektoru⁴, viz vztah (23.87), není tato možnost obecně reálnou.

Každé vektorové pole, jehož divergence je rovna nule, můžeme vyjádřit jako rotaci vektorové funkce, neboť platí, že divergence rotace je identicky rovna nule, viz identita (A.1). S ohledem na vztah (23.34) tedy můžeme vektor magnetické indukce vyjádřit pomocí nového vektoru (vektorového pole) $\mathbf{A}(\mathbf{r})$, který vyhovuje vztahu:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) , \quad (23.99)$$

které se nazývá **vektorovým potenciálem** magnetického pole nebo **magnetickým vektorovým potenciálem**.

Definiční vztah (23.99) však neurčuje vektorový potenciál jednoznačně. Je zřejmé, že pokud existuje alespoň jedna funkce vyhovující vztahu (23.99), vyhovuje tomuto vztahu také každá vektorová funkce tvaru:

$$\mathbf{A}'(\mathbf{r}) = \mathbf{A}(\mathbf{r}) + \nabla \zeta(\mathbf{r}) , \quad (23.100)$$

⁴Avšak kdekoli je proudová hustota nulová, můžeme vektor magnetické indukce vyjádřit pomocí gradientu skalární funkce, kterou nazýváme **skalární magnetický potenciál**.

kde $\zeta(\mathbf{r})$ je libovolná skalární funkce, pro niž existují příslušné diferenciální operace. Tato skutečnost vyplývá z identity (viz identita (A.9)):

$$\nabla \times (\nabla \zeta(\mathbf{r})) = \mathbf{0}.$$

Speciálně je vždy možné vektorový potenciál vybrat tak, aby byla splněna podmínka:

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) = 0 \quad (23.101)$$

nazývaná (Coulombova) kalibrační podmínka.

Kdyby platilo, že $\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}) \neq 0$, pak lze k vektorovému potenciálu $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ přičíst vektorovou funkci $\nabla \zeta(\mathbf{r})$, pro kterou platí, že $\nabla \cdot \nabla \zeta(\mathbf{r}) \equiv \nabla^2 \zeta(\mathbf{r}) = -f(\mathbf{r})$. Tímto dostáváme nový magnetický vektorový potenciál $\mathbf{A}'(\mathbf{r}) = \mathbf{A}(\mathbf{r}) + \nabla \zeta(\mathbf{r})$, který vyhovuje kalibrační podmínce, tj. $\nabla \cdot \mathbf{A}'(\mathbf{r}) = \nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) + \nabla^2 \zeta(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}) - f(\mathbf{r}) = 0$.

Dosadíme-li vztah (23.99) do Ampèrova zákona (23.87), tak dostaneme:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \mu_0 \mathbf{j}. \quad (23.102)$$

Použijeme identitu (A.13):

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{j}. \quad (23.103)$$

S ohledem na kalibrační podmínku (23.101) se tato rovnost zjednoduší na rovnici:

$$\nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}). \quad (23.104)$$

Tato rovnice se nazývá Poissonova rovnice pro vektorový potenciál magnetického pole.

Tuto vektorovou rovnici může vyjádřit ve složkovém tvaru jako

$$\nabla^2 A_i(\mathbf{r}) = -\mu_0 j_i(\mathbf{r}), \quad i = 1, 2, 3. \quad (23.105)$$

Dostali jsme tři Poissonovy rovnice pro jednotlivé kartézské složky. Vzhledem k tomu, že vztah (20.34) představuje řešení Poissonovy rovnice elektrostatického pole (20.65), můžeme na základě porovnání napsat i řešení pro Poissonovy rovnice (23.105):

$$A_i(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V'} \frac{j_i(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'. \quad (23.106)$$

Odtud je možné vyjádřit magnetický vektorový potenciál⁵ $\mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3)$:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V'} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'. \quad (23.107)$$

Pro vyšetřování magnetického pole vodičů malého průřezu ΔS s homogenně rozloženým proudem I je výhodné, pomocí rovností (23.23), přepsat vztah (23.107) jako

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{C'} \frac{d\ell'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{C'} \frac{d\ell'}{R}. \quad (23.108)$$

⁵Ke stejnému vztahu jsme dospěli při odvození vztahu (23.32).

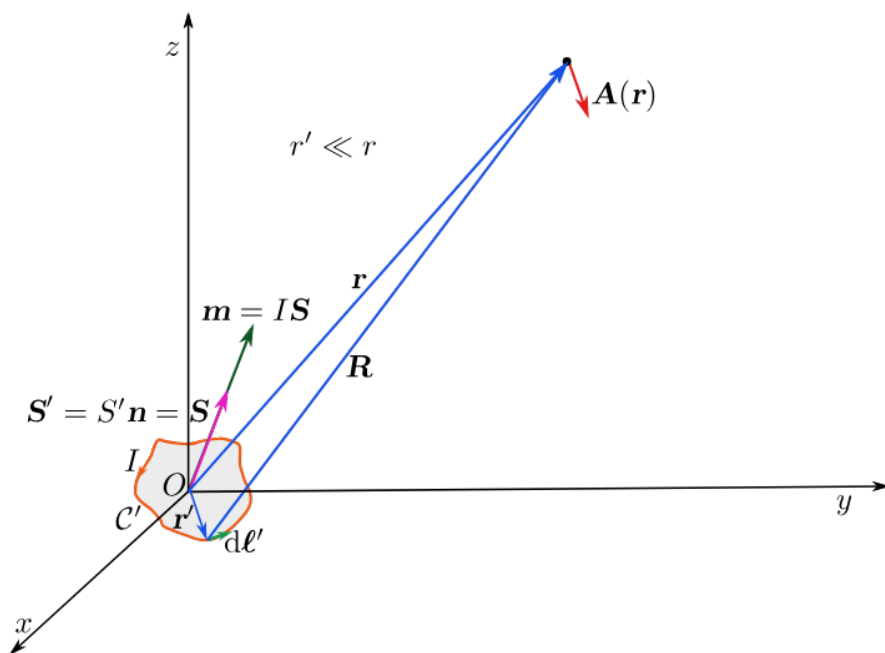
V některých případech má význam studovat magnetické pole makroskopických plošných proudů. Je-li dána lineární hustota proudu, viz vztah (22.9), tekoucího na ploše S' , je zřejmě možné vyjádřit vektorový magnetický potenciál vzorcem, který odpovídá vztahu (20.36), tedy

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_{S'} \frac{\boldsymbol{\xi}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS'. \quad (23.109)$$

23.7 Magnetický dipól

Pro popis vlastností stacionárního magnetického pole je pojem magnetického dipólu stejně důležitý jako elektrický náboj pro popis elektrostatického pole.

Uvažujme rovinnou proudovou smyčku C' libovolného tvaru protékanou konstantním proudem I . Takováto proudová smyčka představuje **magnetický dipól** (jak vyplýne z dalšího). Tuto smyčku, jejíž vlastní rozměry jsou malé v porovnání se vzdáleností, kde vyšetřujeme její magnetické pole, umístíme do počátku pravouhlé souřadnicové soustavy (součástí plochy S' vymezené proudovou smyčkou je počátek souřadnicové soustavy). V bodě o polohovém vektoru \mathbf{r} budeme vyšetřovat magnetické pole, které tato smyčka vybudí. Popisovaná situace je zachycena na obrázku 23.14. Magnetický vektorový potenciál proudové smyčky v místě o



Obrázek 23.14: Vektorový magnetický potenciál proudové smyčky.

polohovém vektoru \mathbf{r} spočítáme podle vztahu (23.108):

$$\mathbf{A}_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{C'} \frac{d\boldsymbol{\ell}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (23.110)$$

K další úpravě tohoto vztahu použijeme vektorovou identitu, kterou si nejdříve odvodíme. Uvažujme vektor $\mathbf{a} = \text{konst.}$ a skalární funkci f , pak můžeme pomocí

Stokesovy věty (9.51) psát:

$$\mathbf{a} \cdot \oint_C f d\boldsymbol{\ell} = \oint_C f \mathbf{a} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \iint_S [\nabla \times (f \mathbf{a})] \cdot d\mathbf{S}. \quad (23.111)$$

Pro rotaci součinu skalární a vektorové funkce platí: $\nabla \times (f \mathbf{F}) = \nabla f \times \mathbf{F} + f(\nabla \times \mathbf{F})$. V našem případě je vektorová funkce \mathbf{F} dána konstantním vektorem \mathbf{a} , pak $\nabla \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$, takže dostáváme, že $\nabla \times (f \mathbf{a}) = \nabla f \times \mathbf{a}$, což použijeme k úpravě rovnosti (23.111), kde dále použijeme pravidla pro smíšený součin (4.37):

$$\mathbf{a} \cdot \oint_C f d\boldsymbol{\ell} = \iint_S [\nabla \times (f \mathbf{a})] \cdot d\mathbf{S} = \iint_S (\nabla f \times \mathbf{a}) \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{a} \cdot (d\mathbf{S} \times \nabla f) = \mathbf{a} \cdot \iint_S d\mathbf{S} \times \nabla f. \quad (23.112)$$

Odtud můžeme napsat hledanou vektorovou identitu:

$$\oint_C f d\boldsymbol{\ell} = \iint_S d\mathbf{S} \times \nabla f. \quad (23.113)$$

V našem případě reprezentuje skalární funkci f skalární funkce $1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$, takže uplatněním identity (23.113) ve vztahu (23.110) dostáváme:

$$\mathbf{A}_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{C'} \frac{d\boldsymbol{\ell}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \iint_{S'} d\mathbf{S}' \times \nabla' \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right). \quad (23.114)$$

Dále využijeme rovnosti (A.31):

$$\nabla' \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3},$$

čímž dostáváme:

$$\mathbf{A}_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \iint_{S'} \frac{d\mathbf{S}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \quad (23.115)$$

Protože předpokládáme malou proudovou smyčku, tedy v dostatečné vzdálenosti od ní platí relace $r' \ll r$, tak lze upravit výsledek (23.115) jako

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{\text{dip}}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \iint_{S'} \frac{d\mathbf{S}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \approx \frac{\mu_0 I}{4\pi} \iint_{S'} \frac{d\mathbf{S}' \times \mathbf{r}}{r^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left(\iint_{S'} d\mathbf{S}' \right) \times \frac{\mathbf{r}}{r^3} = \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \underbrace{\left(\iint_{S'} d\mathbf{S}' \right)}_{=\mathbf{S}'} \times \frac{\mathbf{r}}{r^3} \equiv \frac{\mu_0 I}{4\pi} \underbrace{\left(\iint_S d\mathbf{S} \right)}_{=\mathbf{S}} \times \frac{\mathbf{r}}{r^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\mathbf{S} \times \mathbf{r}}{r^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\mathbf{S} \times \mathbf{r}}{r^3}, \end{aligned} \quad (23.116)$$

kde $\mathbf{n} = \textit{konst.}$ je jednotkový vektor normálový vektor k ploše S , resp. S' .

Získaný vztah je možné přepsat do tvaru

$$\mathbf{A}_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3}, \quad (23.117)$$

kde $\mathbf{m} = IS$ nazýváme **Ampèrův magnetický dipólový moment** proudové smyčky. Poznamenejme, že při použití aproximace ve vztahu (23.116) má za následek, že na tvaru proudové smyčky \mathcal{C}' **nezáleží**, určující je jen velikost plochy, kterou uzavírá, a její orientace (samozřejmě proudovou smyčkou musí protékat stejný proud). Vektor magnetické indukce námi uvažovaného magnetického dipólu \mathbf{B}_{dip} určíme pomocí vztahu (23.99), tj.

$$\mathbf{B}_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \left(\mathbf{m} \times \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right). \quad (23.118)$$

K vyjádření tohoto výsledku použijeme následující vektorovou identitu pro rotaci vektorového součinu dvou vektorových funkcí \mathbf{a} a \mathbf{b} :

$$\nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{b} + \mathbf{a}(\nabla \cdot \mathbf{b}) - \mathbf{b}(\nabla \cdot \mathbf{a}). \quad (23.119)$$

V našem případě reprezentuje vektorovou funkci \mathbf{a} Ampèrův magnetický dipólový moment $\mathbf{m} = \text{konst.}$ a vektorová funkce \mathbf{b} je reprezentována vektorovou funkcí \mathbf{r}/r^3 , takže s ohledem na vektorovou identitu (23.119) můžeme psát:

$$\begin{aligned} \nabla \times \left(\mathbf{m} \times \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) &= -(\mathbf{m} \cdot \nabla) \frac{\mathbf{r}}{r^3} + \mathbf{m} \left(\nabla \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) = \\ &= -\nabla \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}}{r^3} + \mathbf{m} \underbrace{\left(\nabla \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right)}_{=0} = -\nabla \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}}{r^3} = 3 \frac{(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{m}}{r^3}. \end{aligned} \quad (23.120)$$

Tento výsledek dosadíme do vztahu (23.118), čímž dostaneme:

$$\mathbf{B}_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(3 \frac{(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{m}}{r^3} \right). \quad (23.121)$$

Pro jednoduchost budeme uvažovat orientaci plochy vymezenou proudovou smyčkou v kladném směru osy z a vzhledem k tomu, že na tvaru proudové smyčky **nezáleží**, jak je uvedeno výše, tak budeme pro snazší představivost uvažovat kruhovou proudovou smyčku, které tímto musí ležet v rovině $z = 0$. Vzhledem k symetrii zvolíme pro popis vektoru magnetické indukce buzeného touto proudovou smyčkou kulové souřadnice, viz obr.23.15. V námi uvažovaném případě pro Ampèrův dipólový magnetický moment platí, že $\mathbf{m} = (0, 0, m)$. Skalární součin $\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}$ ve vztahu (23.121) si vyjádříme pomocí vztahu (4.92), tj. $\mathbf{r} = (r \sin \vartheta \cos \varphi, r \sin \vartheta \sin \varphi, r \cos \vartheta)$:

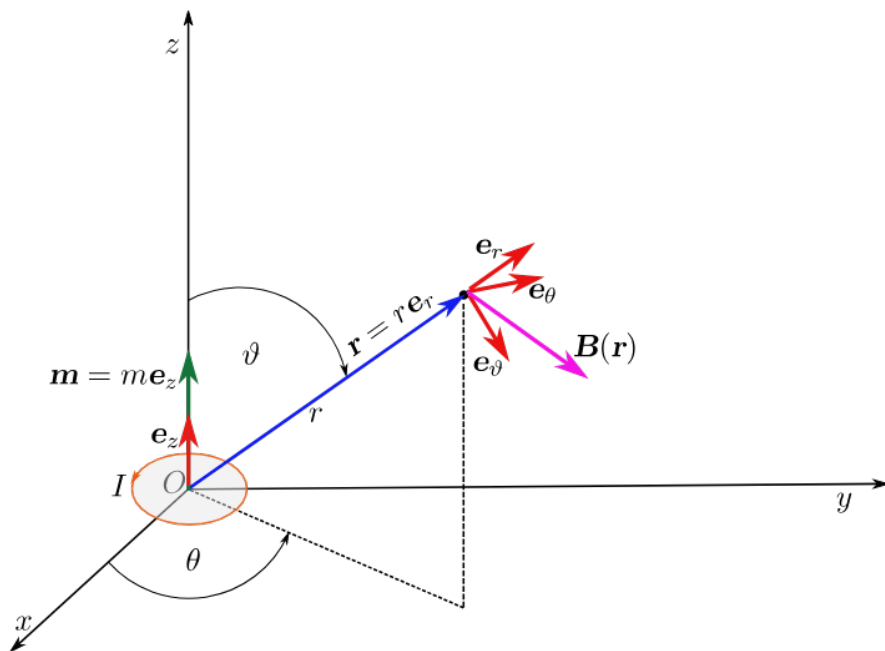
$$\mathbf{m} \cdot \mathbf{r} = (0, 0, m) \cdot (r \sin \vartheta \cos \varphi, r \sin \vartheta \sin \varphi, r \cos \vartheta) = mr \cos \vartheta. \quad (23.122)$$

S ohledem na obr. 23.15 je možné polohový vektor zapsat také jako $\mathbf{r} = r \mathbf{e}_r$, potom pomocí skalárního součinu (23.122) můžeme psát:

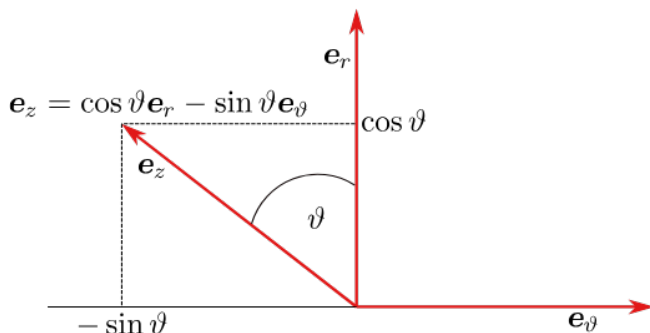
$$(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{r} = mr^2 \cos \vartheta \mathbf{e}_r. \quad (23.123)$$

Protože jednotkový vektor \mathbf{e}_r leží v rovině určené jednotkovými vektory \mathbf{e}_r a \mathbf{e}_ϑ , je možné ho rozložit do směrů vektorů \mathbf{e}_r a \mathbf{e}_ϑ , jak je ukázáno na obr. 23.16, tedy $\mathbf{e}_z = \cos \vartheta \mathbf{e}_r - \sin \vartheta \mathbf{e}_\vartheta$. Potom můžeme Ampèrův dipólový magnetický moment vyjádřit jako

$$\mathbf{m} = m \mathbf{e}_z = m \cos \vartheta \mathbf{e}_r - m \sin \vartheta \mathbf{e}_\vartheta. \quad (23.124)$$



Obrázek 23.15: Ampèrův dipólový magnetický moment.



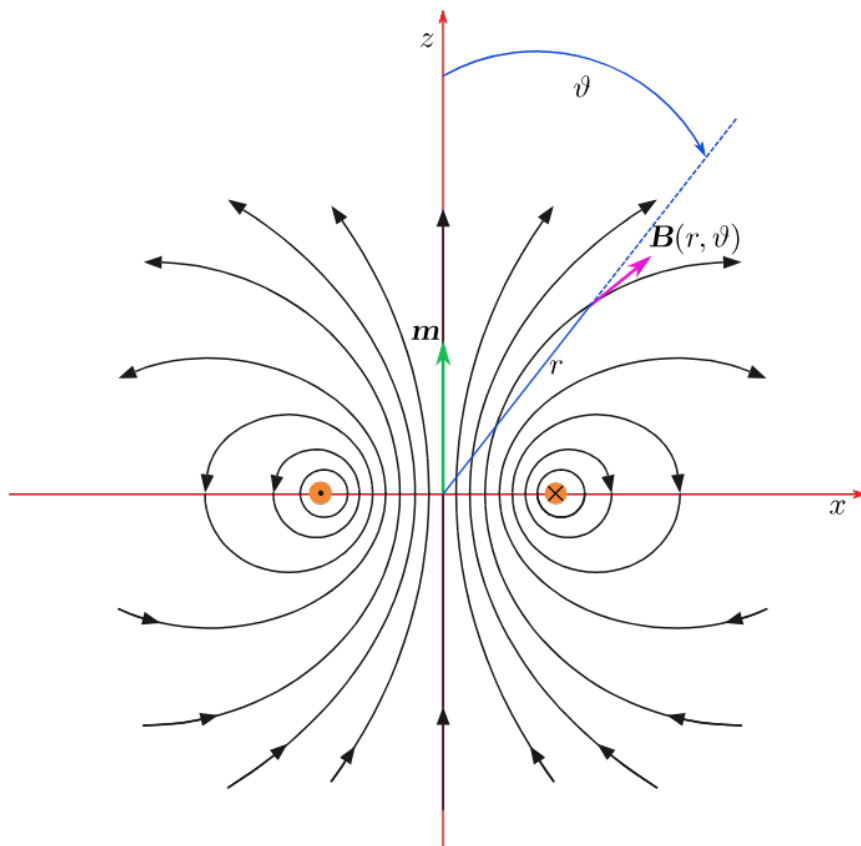
Obrázek 23.16: Rozklad jednotkového souřadnicového vektoru \mathbf{e}_z .

Do vztahu (23.121) dosadíme ze vztahů (23.123) a (23.124), čímž po úpravě dostaneme:

$$\mathbf{B}_{\text{dip}}(r, \vartheta) = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} (2 \cos \vartheta \mathbf{e}_r + \sin \vartheta \mathbf{e}_\vartheta) . \quad (23.125)$$

Tento vztah je formálně shodný se vztahem (20.129). Díky této shodě dostaneme pro proudovou smyčku průběh indukčních čar analogický s průběhem siločar u elektrického dipólu, viz obr. 23.17. Proudová smyčka protékaná elektrickým proudem pak představuje magnetický dipól. Na závěr poznamenejme, že kdyby se Ampèrův dipólový magnetický moment nenacházel v počátku souřadnic, ale v místě o polohovém vektoru \mathbf{r}' , potom lze snadno ukázat, že by vztah (23.117) musel být nahrazen vztahem:

$$\mathbf{A}_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{R}}{R^3} . \quad (23.126)$$



Obrázek 23.17: Magnetické pole dipólu kruhové proudové smyčky.

23.8 Moment sil působících na proudovou smyčku

Uvažujme proudovou obdélníkovou proudovou smyčku o stranách a a b , jejíž střed je totožný se středem kartézské souřadnicové soustavy a její jedna osa leží na souřadnicové ose x . Tato smyčka je protékána konstantním proudem I a nachází se v homogenním magnetickém poli, kdy odpovídající vektor magnetické indukce je rovnoběžný s osou y a je orientován v jejím kladném směru, tj. $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_y$, viz obr. 23.18. Na jednotlivé strany obdélníkové proudové smyčky působí magnetické síly, jejichž orientaci můžeme snadno určit pomocí Flemingova pravidla levé ruky. Vektory těchto sil určíme pomocí vztahu (23.60), tedy

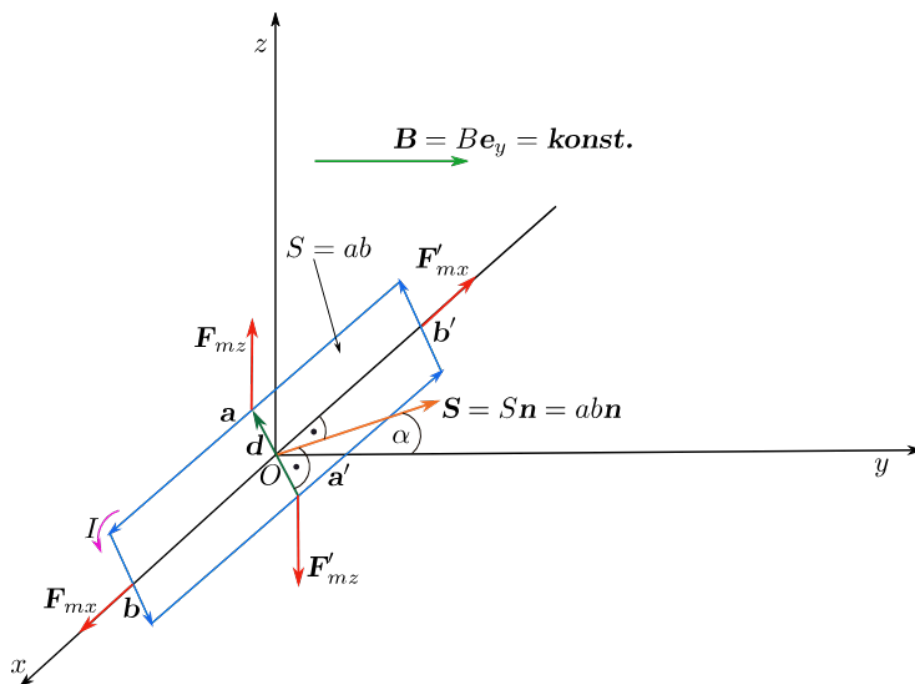
$$\mathbf{F}_{mx} = I\mathbf{b} \times \mathbf{B}, \quad \mathbf{F}'_{mx} = I\mathbf{b}' \times \mathbf{B}, \quad \mathbf{F}_{mz} = I\mathbf{a} \times \mathbf{B}, \quad \mathbf{F}'_{mz} = I\mathbf{a}' \times \mathbf{B}, \quad (23.127)$$

kde vektory \mathbf{a} , \mathbf{a}' , \mathbf{b} a \mathbf{b}' jsou zachyceny na obr. 23.18 a je vidět, že jsou orientovány ve směru elektrického proudu. Z tohoto obrázku je také zřejmé, že $\mathbf{a}' = -\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}' = -\mathbf{b}$. Díky této skutečnosti musí platit, že $\mathbf{F}'_{mx} = -\mathbf{F}_{mx}$ a $\mathbf{F}'_{mz} = -\mathbf{F}_{mz}$. Z tohoto obrázku je také zřejmé, že síly \mathbf{F}_{mx} a \mathbf{F}'_{mx} nezpůsobují žádným silovým momentem. Jinak je tomu u sil \mathbf{F}_{mz} a \mathbf{F}'_{mz} , kdy moment této dvojice sil daný vztahem (13.3) je nenulový, jak lze vidět lépe z obr. 23.19:

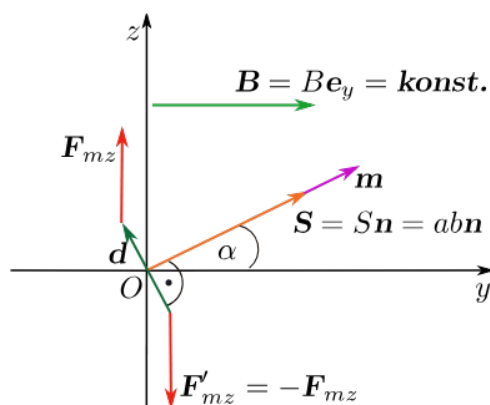
$$\mathbf{M}_D = \mathbf{d} \times \mathbf{F}_{mz} = \mathbf{d} \times F_{mz}\mathbf{e}_z = F_{mz}\mathbf{d} \times \mathbf{e}_z = F_{mz}d\mathbf{e}_x. \quad (23.128)$$

Protože platí, že $\mathbf{e}_x = \mathbf{n} \times \mathbf{e}_y$, $d = b$ a $F_{mz} = IaB$, tak můžeme tento výsledek dále upravit:

$$\mathbf{M}_D = F_{mz}d\mathbf{e}_x = IaBb(\mathbf{n} \times \mathbf{e}_y) = Iab\mathbf{n} \times B\mathbf{e}_y = I\mathbf{S} \times \mathbf{B} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}. \quad (23.129)$$



Obrázek 23.18: Obdélníková proudová smyčka v homogenním magnetickém poli.



Obrázek 23.19: Moment silové dvojice působící na uvažovanou proudovou smyčku.

Tedy můžeme konstatovat, že na proudovou smyčku, které přísluší Ampèrův dipólový magnetický moment \mathbf{m} nacházející se v homogenním magnetickém poli \mathbf{B} působí moment dvojice magnetických sil:

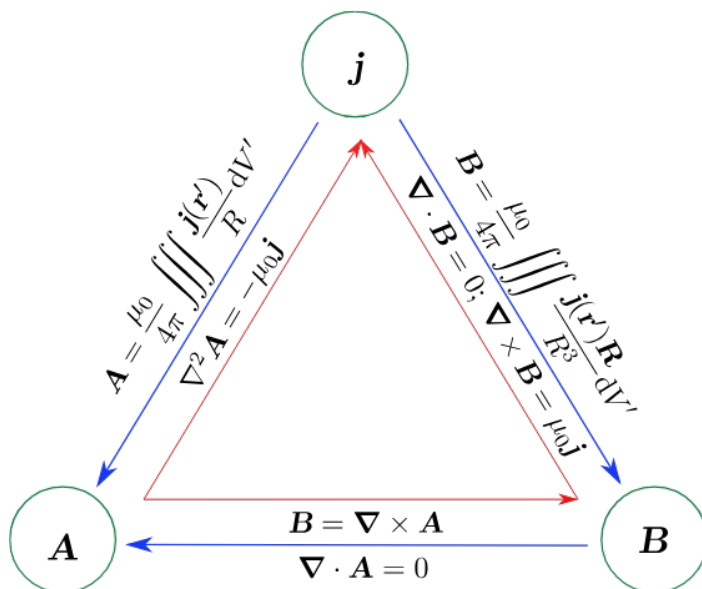
$$\mathbf{M}_D = \mathbf{m} \times \mathbf{B} . \quad (23.130)$$

Poznamenejme, že tento vztah platí obecněji, tj. pro proudové smyčky různého tvaru, které se nacházejí v homogenním magnetickém poli.

Je zřejmé, že vložíme-li proudovou smyčku do homogenního magnetického pole, pak dojde vlivem působícího momentu magnetických sil k jejímu nasměrování tak, že Ampèrův dipólový magnetický moment \mathbf{m} bude stejně orientovaný jako je homogenní magnetické pole, tedy $\mathbf{M}_D = \mathbf{0}$. Tento proces nazýváme **magnetizace**.

23.9 Schematické shrnutí výsledných vztahů

Výsledky, ke kterým jsme dospěli v předcházejících kapitolách můžeme schematicky shrnout pomocí obrázku 23.20. Tento obrázek nám znázorňuje, jakými vztahy jsou navzájem spojeny vždy dvě ze tří veličin důležitých pro popis stacionárního magnetického pole ve vakuu: \mathbf{A} , \mathbf{j} a \mathbf{B} .



Obrázek 23.20: Schematické shrnutí získaných poznatků.

23.10 Stacionární magnetické pole v materiálovém prostředí

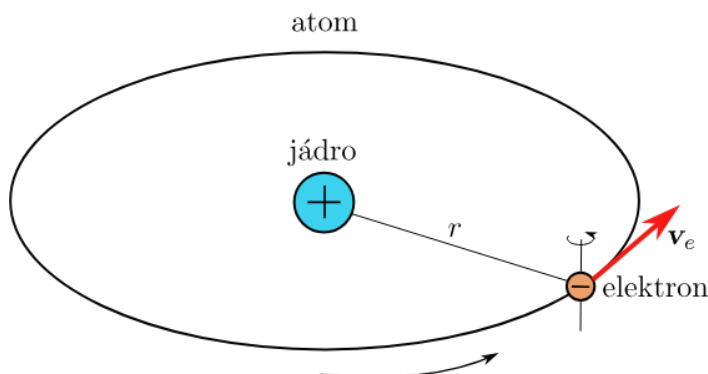
23.10.1 Vliv materiálového prostředí na magnetické pole

Vložíme-li látku do vnějšího magnetického pole, vytvořeného ve vakuu pohybem nosičů elektrického náboje v pozorovací soustavě anebo elektrickým proudem, dojde k interakci vnějšího magnetického pole s látkou. Každá látka je schopna se ve vnějším magnetickém poli magnetizovat, tj. získat nenulový makroskopický magnetický moment, čímž se stává zdrojem magnetického pole o magnetické indukci \mathbf{B}_i . Magnetická indukce \mathbf{B}_i se skládá s vnějším magnetickým polem \mathbf{B}_o , takže výsledné magnetické pole má magnetickou indukci:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_o + \mathbf{B}_i. \quad (23.131)$$

Protože magnetický stav látky se zachovává i při jejím dělení, byla vyslovena hypotéza o tzv. **molekulárních (atomárních) proudcích** (Ampèrův model). Tato hypotéza má dnes oporu v kvantové mechanice, která umožňuje plně popsat magnetické vlastnosti materiálů. Vzhledem k tomu, že použití kvantové mechaniky překračuje rámec tohoto učebního textu, pokusíme se některé magnetické vlastnosti látek vysvětlit pomocí jednoduchého nekvantového modelu atomu. Tento model vychází z představy, že kolem kladně nabitého jádra atomu obíhají konstantní

rychlostí elektrony. Navíc předpokládáme, že se elektron otáčí kolem své osy⁶, viz obr. 23.21. Magnetický moment způsobený oběhem elektronu kolem jádra nazývá-



Obrázek 23.21: Orbitální a spinální pohyb elektronu.

váme **magnetickým momentem orbitálním**, magnetický moment spojený s rotací elektronu kolem své osy nazýváme **spinový magnetický moment**. Výsledný magnetický moment atomu je dán vektorovým součtem orbitálních a spinových magnetických momentů všech elektronů. Tento výsledný magnetický moment atomu vytváří magnetické pole. Toto magnetické pole si můžeme představit jako magnetické pole elementární proudové smyčky (magnetického dipólu). Není-li přítomné vnější magnetické pole, pak magnetické dipóly, kterým přísluší Ampèrovy magnetické momenty⁷ \mathbf{m}_i , jsou orientovány nahodile, a tedy výsledné magnetické pole molekulárních proudů má nulovou magnetickou indukci, $\mathbf{B}_i = \mathbf{0}$ a též výsledný Ampèrův magnetický moment v objemu ΔV je nulový, tj.

$$\Delta \mathbf{m}_i = \sum_{\alpha}^{\Delta V} \mathbf{m}_{i\alpha} = \mathbf{0} . \quad (23.132)$$

Působením vnějšího magnetického pole se Ampèrovy magnetické momenty molekul (atomů) $\mathbf{m}_{i\alpha}$ orientují do jednoho směru, tj. dochází k magnetické polarizaci. Výsledný Ampèrův magnetický moment $\Delta \mathbf{m}_i$ makroskopického objemu látky ΔV je již nenulový a tedy výsledné magnetické pole již není nulové, $\mathbf{B}_i \neq \mathbf{0}$.

Tak jako jsme v případě polarizace dielektrika v elektrickém poli zavedli pro kvalitativní popis tohoto jevu vektor elektrické polarizace \mathbf{P} , zavedeme podobně i v případě magnetizace látky **vektor magnetizace** \mathbf{M} jako vektorový součet všech Ampèrových magnetických momentů molekulárních proudů v jednotkovém objemu látky. Je-li v makroskopickém objemu látky ΔV vektorový součet všech Ampèrových magnetických momentů molekulárních proudů roven:

$$\Delta \mathbf{m}_i = \sum_{\alpha}^{\Delta V} \mathbf{m}_{\alpha i} , \quad (23.133)$$

pak vektor magnetizace je dán vztahem:

$$\mathbf{M} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{m}_i}{\Delta V} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum_{\alpha}^{\Delta V} \mathbf{m}_{\alpha i}}{\Delta V} . \quad (23.134)$$

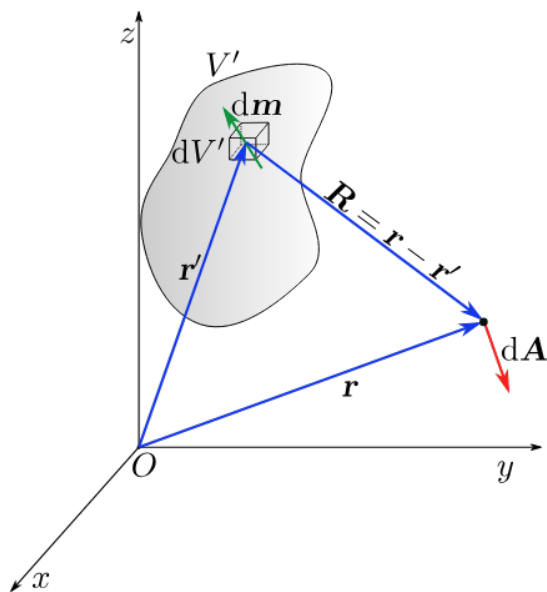
⁶Popsaný model jen velmi hrubě odpovídá kvantověmechanickému popisu chování atomu.

⁷U Ampèrových magnetických momentů budeme používat dolního indexu i , abychom zdůraznili souvislost s vnitřním magnetickým polem B_i .

23.11 Pole magneticky polarizovaného materiálu

Vektor magnetizace je funkcí prostorových souřadnic, $\mathbf{M}(\mathbf{r})$. Na vektor magnetizace je možné rovněž pohlížet jako na vektor udávající objemovou hustotu Ampèrových magnetických momentů v daném místě.

Uvažujme magneticky polarizovanou látku o objemu V' . Pro uvažovaný objem magneticky zpolarizované látky je znám vektor magnetizace $\mathbf{M}(\mathbf{r})$. Objemovému elementu magneticky zpolarizované látky dV' v místě \mathbf{r}' odpovídá Ampèrův magnetický dipólový moment $d\mathbf{m} = \mathbf{M}(\mathbf{r}')dV'$, viz obr. 23.22. Pomocí vztahu (23.126) můžeme určit magnetický vektorový potenciál uvažovaného magneticky zpolarizované látky v místě o polohovém vektoru \mathbf{r} jako



Obrázek 23.22: Magneticky polarizovaná látka o objemu V' .

$$d\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{d\mathbf{m} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV'. \quad (23.135)$$

Pro další úpravu tohoto vztahu použijeme identitu (viz (A.31)):

$$\nabla' \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (23.136)$$

kde ∇' je nabla operátor podle čárkovaných souřadnic.

Tedy pomocí této identity můžeme upravit vztah (23.135) jako

$$d\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \nabla' \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) dV'. \quad (23.137)$$

K další úpravě použijeme následující identitu:

$$\nabla \times (f\mathbf{F}) = f\nabla \times \mathbf{F} + \nabla f \times \mathbf{F} = f\nabla \times \mathbf{F} - \mathbf{F} \times \nabla f. \quad (23.138)$$

S pomocí této identity je možné dále upravit vztah (23.137):

$$d\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{\nabla' \times \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \nabla' \times \left(\frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \right] dV'. \quad (23.139)$$

Abychom získali příspěvek k magnetickému vektorovému potenciálu v bodě o polohovém vektoru \mathbf{r} od všech objemových elementů magneticky zpolarizované látky, provedeme následující integraci přes celý uvažovaný objem látky V' :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V'} \left[\frac{\nabla' \times \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \nabla' \times \left(\frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \right] dV' = \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V'} \frac{\nabla' \times \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' - \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V'} \nabla' \times \left(\frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) dV'. \end{aligned} \quad (23.140)$$

Pro další úpravu nalezeného vztahu použijeme identitu:

$$\iiint_V \nabla \times \mathbf{F} dV = \oint_S d\mathbf{S} \times \mathbf{F}, \quad (23.141)$$

kteřou získáme tak, že vynásobíme integrál na levé straně skalárně pomocným konstantním vektorem \mathbf{c} , pak použijeme vzorce pro smíšený součin (4.37) a Gaussovu větu (12.56):

$$\iiint_V \mathbf{c} \cdot \nabla \times \mathbf{F} dV = \iiint_V \nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{c}) dV = \oint_S (\mathbf{F} \times \mathbf{c}) \cdot d\mathbf{S} = \oint_S \mathbf{c} \cdot d\mathbf{S} \times \mathbf{F}. \quad (23.142)$$

Vytknutím pomocného vektoru dostaneme identitu (23.141). Tuto identitu použijme k úpravě posledního členu v rovnosti (23.140):

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V'} \frac{\nabla' \times \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' + \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{S'} \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \times d\mathbf{S}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (23.143)$$

Zavedeme následující označení

$$\mathbf{j}_v(\mathbf{r}') = \nabla' \times \mathbf{M}(\mathbf{r}'), \quad (23.144)$$

$$\boldsymbol{\xi}_v(\mathbf{r}') = \mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \mathbf{n}, \quad (23.145)$$

kde \mathbf{n} je jednotkový vektor vnější normály plochy S' v daném místě ($d\mathbf{S}' = \mathbf{n} dS'$). Pomocí zavedeného označení je možné přepsat integrandy v integrálech nacházející se ve vztahu (23.143):

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V'} \frac{\mathbf{j}_v(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' + \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{S'} \frac{\boldsymbol{\xi}_v(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS'. \quad (23.146)$$

Porovnáním prvního integrálu se vztahem (23.107) je zřejmé, že vztah (23.144) představuje vektor proudové hustoty objemového proudu. Jedná se vlastně o výše zmíněné molekulární proudy, na které můžeme pohlížet jako na proudy vázané. Z toho důvodu bude pro nás vektor proudové hustoty \mathbf{j}_v ve vztahu (23.144) představovat **vektor proudové hustoty vázaných proudů** (proudová hustota vázaných proudů) v objemu magneticky zpolarizované látky. Podobně můžeme porovnat druhý integrál ve vztahu (23.146) se vztahem (23.109). Na základě tohoto porovnání můžeme konstatovat, že vztah (23.145) představuje **vektor lineární hustoty**

vázaného proudu (lineární hustota vázaného proudu) na ploše ohraničující objem uvažované magneticky zpolarizované látky. Vázané proudy se někdy nazývají magnetizačními proudy.

Vztah (23.146) můžeme interpretovat následujícím způsobem:

Magnetické pole vytvořené prostorovým rozložením magnetických dipólů s objemovou hustotou $\mathbf{M}(\mathbf{r})$ v objemu V je totožné s magnetickým polem vytvořeným objemovými proudy hustoty $\mathbf{j}_v(\mathbf{r})$ tekoucími v objemu a plošnými proudy hustoty $\mathbf{j}_s(\mathbf{r})$ tekoucími na ploše S ohraničující objem V .

23.12 Ampèrův zákon celkového proudu v materiálovém prostředí

V předchozí kapitole jsme si ukázali, že vázané proudy magneticky zpolarizované látky jsou zdrojem magnetického pole. Celkové magnetické pole lze považovat za pole, jehož zdrojem jsou jak vázané proudy, tak volné proudy, což jsou všechny proudy, které nejsou proudy vázanými.

Celkovou proudovou hustotu tedy můžeme vyjádřit jako

$$\mathbf{j}_c = \mathbf{j} + \mathbf{j}_v . \quad (23.147)$$

Celkovou proudovou hustotu dosadíme do Ampèrova zákona celkového proudu (23.87):

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}_c = \mu_0 (\mathbf{j} + \mathbf{j}_v) . \quad (23.148)$$

Podělíme tento vztah permeabilitou vakua μ_0 a za proudovou hustotu vázaných nábojů \mathbf{j}_v dosadíme ze vztahu (23.144):

$$\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{j} + \nabla \times \mathbf{M} , \quad (23.149)$$

odtud

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M} \right) = \mathbf{j} . \quad (23.150)$$

Veličinu v závorce označíme \mathbf{H} :

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M} = \frac{\mathbf{B} - \mathbf{P}_m}{\mu_0} . \quad (23.151)$$

kde $\mathbf{P}_m = \mu_0 \mathbf{M}$ je magnetická polarizace. Veličinu \mathbf{H} nazýváme intenzita magnetického pole.

Tedy Ampèrův zákon celkového proudu v diferenciálním tvaru pro materiálové prostředí má tvar:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} . \quad (23.152)$$

Pomocí Stokesovy věty (9.51) můžeme ze vztahu (23.152) dostat Ampèrův zákon celkového proudu v integrálním tvaru pro materiálová prostředí, tedy

$$\iint_S \nabla \times \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{H} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \iint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = I , \quad (23.153)$$

kde I je celkový proud procházející plochou S , jejíž hranice je tvořena uzavřenou křivkou \mathcal{C} (obecně se jedná o prostorovou křivku).

Maxwellovy rovnice pro stacionární magnetické pole v materiálovém prostředí jsou v diferenciálním tvaru dány rovnicemi:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (23.154)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}. \quad (23.155)$$

Maxwellovy rovnice stacionárního magnetického pole v materiálovém prostředí v integrálním tvaru mají tvar:

$$\oiint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0, \quad (23.156)$$

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{H} \cdot d\boldsymbol{\ell} = I. \quad (23.157)$$

23.13 Magnetické vlastnosti látek

Jak magnetická polarizace \mathbf{P}_m , tak magnetizace \mathbf{M} charakterizují stupeň uspořádání Ampèrových magnetických momentů⁸ \mathbf{m}_i molekulárních proudů do směru vnějšího magnetického pole, tj. charakterizují stupeň magnetizace látky. Podobně jako při polarizaci dielektrika závisela polarizace na výsledné intenzitě elektrického pole v dielektriku, tak i v případě látky v magnetickém poli bude magnetizace záviset na výsledné intenzitě magnetického pole v látce. Pokud se omezíme na lineární magnetika, můžeme potom psát

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} \quad (23.158)$$

a tedy

$$\mathbf{P}_m = \mu_0 \chi_m \mathbf{H}, \quad (23.159)$$

kde χ_m je magnetická susceptibilita a je zřejmě bezrozměrnou veličinou. Může nabývat kladných i záporných hodnot a pro vakuum je rovna nule.

Dosadíme-li vztah (23.159) do vztahu (23.151), tak po úpravě dostaneme

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mathbf{P}_m = \mu_0 \mathbf{H} + \mu_0 \chi_m \mathbf{H} = \mu_0 \underbrace{(1 + \chi_m)}_{=\mu_r} \mathbf{H} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H} = \mu \mathbf{H}, \quad (23.160)$$

kde μ_r je relativní permeabilita prostředí (rovněž bezrozměrná veličina) a μ se nazývá permeabilita.

Vztahy $\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}$, $\mathbf{P}_m = \mu_0 \chi_m \mathbf{H}$ a $\mathbf{B} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H} = \mu \mathbf{H}$ nazýváme materiálové vztahy.

Pro magneticky izotropní látky jsou vektory \mathbf{P}_m , \mathbf{M} a \mathbf{H} kolineární. U anizotropních látek nemá obecně vektor \mathbf{P}_m stejný směr jako vektor \mathbf{H} , potom magnetická susceptibilita již nemůže být skalární veličinou, ale veličinou tenzorovou (tenzorem druhého řádu).

⁸Vedle Ampèrova magnetického momentu se můžeme setkat s Coulombovým magnetickým momentem $\mathbf{p}_{mi} = \mu_0 \mathbf{m}_i$.

23.13.1 Rozdělení látek podle jejich magnetických vlastností

U látek nacházejících se v magnetickém poli pozorujeme rozdílné chování. Přiblížíme-li vzorky materiálů k permanentnímu magnetu, tak zjistíme, že některé vzorky jsou silně k magnetu přitahovány, zatímco vzorky jiných materiálů na přítomnost magnetického pole magnetu téměř nereagují. Díky této pozorované skutečnosti můžeme materiály rozdělit do dvou skupin:

1. **Slabě magnetické látky** - jedná se o látky, které slabě reagují na přítomnost magnetického pole. Citlivým měřením bylo zjištěno, že na základě chování vzorků látek spadajících do této skupiny, které se nachází v nehomogenním magnetickém poli, je možné je dále rozdělit na další dvě skupiny. Látky jedné skupiny jsou do nehomogenního magnetického pole slabě vtahovány. Jejich magnetická susceptibilita má malou kladnou hodnotu, tj. $\chi_m > 0$ ($\mu_r > 1$). Tuto skupinu slabě magnetických látek nazýváme **látky paramagnetické** či **paramagnetika**. Druhou skupinou jsou látky, které jsou z nehomogenního magnetického pole naopak slabě vytlačovány. Magnetická susceptibilita u těchto látek má malou zápornou hodnotu, tj. $\chi_m < 0$ ($\mu_r < 1$). Látky patřící do této skupiny se nazývají **látky diamagnetické** či **diamagnetika**.
2. **Silně magnetické látky** - jedná se o látky, které silně reagují na přítomnost magnetického pole. Jejich magnetická susceptibilita dosahuje vysokých kladných hodnot, tj. $\chi_m \gg 0$ ($\mu_r \gg 1$). Významnou skupinou látek patřící mezi silně magnetické látky jsou **látky feromagnetické** či jen **feromagnetika**. U feromagnetik není magnetická susceptibilita, a tedy i relativní permeabilita, konstantní, ale závisí na velikosti intenzity magnetického pole v látce. Jedná se tedy o nelineární magnetika.

Látky diamagnetické

Jejich magnetická susceptibilita χ_m je záporná a většinou v absolutní hodnotě značně menší než magnetická susceptibilita ostatních látek. Je to způsobeno tím, že atomy nebo molekuly těchto látek mají bez přítomnosti vnějšího magnetického pole nulový Ampèrův magnetický moment (elektrony jsou spárovány a jejich spinové magnetické momenty jsou vzájemně vykompenzovány), tj. je-li $\mathbf{B}_o = \mathbf{0}$ je $\mathbf{m}_{i\alpha} = \mathbf{0}$, a tudíž i $\Delta\mathbf{m}_i = \mathbf{0}$.

Působením vnějšího magnetického pole získá každý elektron přídavný, tzv. **indukovaný magnetický moment**, který je orientován proti vnějšímu magnetickému poli (výsledné pole v diamagnetické látce má tedy menší indukci než primární pole ve vakuu). Jedná se o indukovanou magnetickou polarizaci \mathbf{P}_m , resp. magnetizaci \mathbf{M} a tyto vektory mají opačnou orientaci než vektor magnetické indukce \mathbf{B}_o vnějšího magnetického pole. Jejich magnetická susceptibilita χ_m nezávisí na teplotě ani na velikosti intenzity magnetického pole.

Do této skupiny látek patří některé kovy (Cu, Ag, Pb, Bi aj.), některé další látky pevného, kapalného či plynného skupenství (např. voda, HCl, vzácné plyny) a většina látek organického původu.

Látky paramagnetické

Do této skupiny patří látky, jejichž atomy či molekuly mají vlastní nenulový Ampèrov magnetický moment, $\mathbf{m}_i \neq \mathbf{0}$. Nepůsobí-li na látku z této skupiny magnetické pole, jsou Ampèrovy magnetické momenty těchto látek chaoticky orientovány, takže jejich vektorový součet v makroskopickém objemu ΔV je roven nule, tj. $\Delta \mathbf{m}_i = \sum_{\alpha}^{\Delta V} \mathbf{m}_{\alpha i} = \mathbf{0}$.

Vložíme-li do vnějšího magnetického pole paramagnetikum, dojde k částečnému uspořádání Ampèrových magnetických momentů molekul, takže jsou orientovány shodně s vektorem magnetické indukce \mathbf{B}_o (zesilují vnější magnetické pole). Toto uspořádání je však narušováno tepelným pohybem molekul paramagnetika, a proto magnetická susceptibilita χ_m paramagnetických látek závisí nepřímo úměrně na absolutní teplotě látky, tj.

$$\chi_m = \frac{C}{T}, \quad (23.161)$$

kde T je absolutní teplota látky a C Couriero va konstanta.

Magnetická polarizace \mathbf{P}_m paramagnetických látek v nepřilíš silných magnetických polích je při dané teplotě lineární funkcí intenzity magnetického pole (lineární magnetikum).

Do této skupiny patří např. Al, Pt, Cr, Mn, vzduch.

Feromagnetické látky

Mezi tyto látky patří např. Fe, Co, Ni, nebo některé slitiny. Jejich magnetické vlastnosti se výrazně odlišují od vlastností slabě magnetických látek. Jde zejména o následující rozdíly:

- Vzhledem k vysokým hodnotám magnetické susceptibility χ_m , a tedy relativní permeability μ_r , dosahuje magnetická polarizace vysokých hodnot již v přítomnosti slabých vnějších magnetických polí, takže magnetická indukce \mathbf{B} ve feromagnetických látkách je značně větší než magnetická indukce \mathbf{B}_o vnějšího magnetického pole.
- Jedná se o nelineární magnetika.
- Feromagnetické látky dosahují **nasyceného stavu**, tj. souhlasná orientace Ampèrových magnetických momentů všech molekul s vnějším magnetickým polem, již v poměrně slabých magnetických polích. Po dosažení nasyceného stavu zůstává magnetická polarizace konstantní i při dalším zvyšování intenzity vnějšího magnetického pole.
- Magnetická susceptibilita χ_m feromagnetické látky závisí nejen na intenzitě přiloženého magnetického pole, ale i na předchozím stavu látky, tj. **jeví hysterezi**.
- Magnetická susceptibilita χ_m závisí na teplotě látky způsobem, že pro každou feromagnetickou látku existuje tzv. **Curierova teplota** T_c , při jejímž překročení se látka stává parametrickou⁹. V paramagnetickém stavu se magne-

⁹Pro železo je $T_c = 769^\circ\text{C}$, pro nikl $T_c = 358^\circ\text{C}$

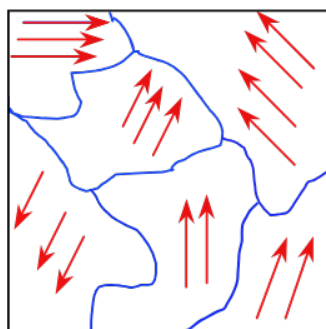
tická susceptibilita χ_m řídí Curierovým-Weissovy zákonem

$$\chi_m = \frac{C}{T - T_p}, \quad (23.162)$$

který platí pro teploty $T \gg T_c$. Teplota $T_p < T$ je tzv. paramagnetická Curierova teplota, která je o několik desítek stupňů vyšší než Curierova teplota T_c .

Atomy či molekuly feromagnetické látky mají i bez přítomnosti vnějšího magnetického pole nenulový Ampèrův magnetický moment $\mathbf{m}_{i\alpha} \neq \mathbf{0}$, podobně jako u paramagnetik, avšak existuje dostatečně silné vzájemné působení se sousedními atomy, tzv. výměnná interakce. Výsledkem tohoto působení je vznik malých oblastí, tzv. magnetických domén, které jsou spontánně zmagnetovány do nasyceného stavu, viz obr. 23.23. Objem feromagnetických domén může být řádově v rozmezí 10^{-3} mm^3 až mm^3 . Zahřátím feromagnetické látky nad Curierovu teplotu T_c vymizí v látce doménová struktura a tím i spontánní magnetizace domén. Při snížení teploty látky pod Curierovu teplotu se v látce ustanoví nová doménová struktura. Pokud není vzorek látky ve vnějším magnetickém poli, jsou magnetické momenty těchto domén chaoticky orientovány, takže vektorový součet všech jejich magnetických momentů v makroskopickém objemu látky ΔV je roven nule. V takovém případě je látka nezmagnetována.

Sledujme nyní závislost magnetické indukce pole ve feromagnetiku v závislosti

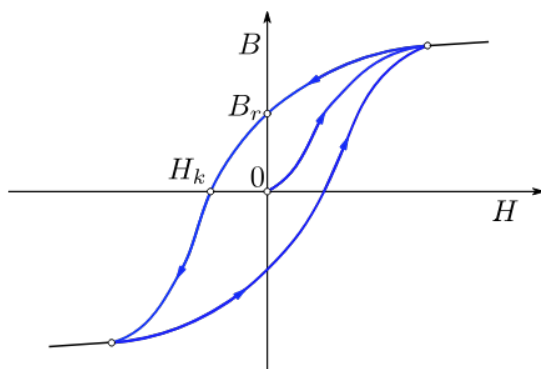


Obrázek 23.23: Oblasti spontánní magnetizace - domény.

na velikosti intenzity vnějšího magnetického pole, $B = f(H)$, ze stavu $H = 0$ dosud nemagnetovaného feromagnetika. S rostoucí hodnotou intenzity vnějšího magnetického pole se zvyšuje i velikost magnetické indukce (případně velikost magnetizace) v uvažovaném feromagnetiku. Nárůst magnetické indukce se děje po tzv. křivce prvotní magnetizace. Při jisté hodnotě intenzity vnějšího magnetického pole H se dosáhne nasyceného stavu, kdy jsou již magnetické momenty všech domén orientovány souhlasně s vnějším magnetickým polem, takže magnetizace M feromagnetika zůstává konstantní při dalším zvyšování intenzity H a magnetická indukce B jen nepatrně roste vlivem zvyšujícího se vnějšího magnetického pole.

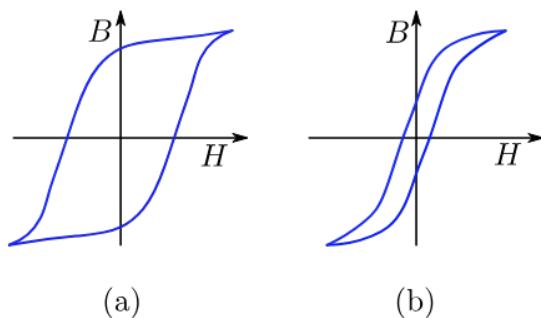
Budeme-li nyní intenzitu vnějšího magnetického pole snižovat, nebude se magnetická indukce B snižovat po křivce prvotní magnetizace, ale po tzv. hysterezní křivce. Při $H = 0$, tj. při vypnutí vnějšího magnetického pole, zůstane látka částečně zmagnetována a magnetická indukce bude mít hodnotu $B = B_r$, která

se nazývá **remanentní magnetická indukce**. Změní-li se orientace magnetické intenzity \mathbf{H} , tak dochází k postupnému snižování magnetické indukce B až dosáhne nulové hodnoty, které odpovídá hodnota magnetické indukce $H = H_k$, jež se nazývá **koercitivní intenzita**. Další magnetování probíhá po hysterezní křivce. Provedeme-li celý magnetizační cyklus, dostaneme uzavřenou hysterezní křivku zvanou **hysterezní smyčka feromagnetika**. Celá popsaná situace je zachycena na obrázku 23.24. Hysterezní smyčky různých feromagnetických látek se od sebe liší



Obrázek 23.24: Hysterezní smyčka feromagnetika.

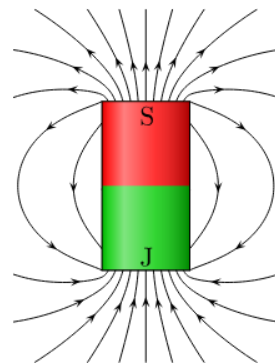
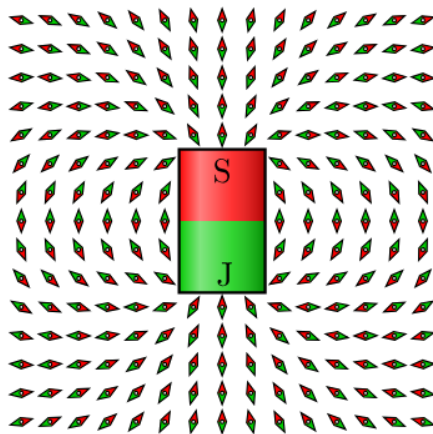
jak tvarem, tak i plošným obsahem, který smyčka ohraničuje. Velikost této plochy souvisí s hysterezními ztrátami (čím větší plocha, tím jsou větší). Feromagnetika se širokou hysterezní smyčkou se nazývají **magneticky tvrdá** (vhodná pro výrobu permanentních magnetů), viz obr. 23.25 (a), kdežto feromagnetika se úzkou hysterezní smyčkou se nazývají **magneticky měkká** (vhodná pro použití ve střídavých magnetických polích), viz obr. 23.25 (b).



Obrázek 23.25: Hysterezní smyčka feromagnetika (a) tvrdého (b) měkkého.

Poznámka

Trvale zmagnetované (magneticky polarizované) látky nazýváme (permanentní) **magnety**. Přírodní, ani uměle zhotovené, magnety však nevykazují magnetické vlastnosti po celém povrchu stejně. Dvě místa, kde se magnetické jevy projevují nejvýrazněji, se nazývají **magnetické póly**. Jeden z magnetických pólů zpravidla nazýváme jako **jižní**, značíme ho **J** a druhý jako **severní**, značíme ho **S**. Indukční čáry vystupují ze severního pólu a vstupují do pólu jižního, viz obr. 23.26. Přiblížíme-li dva magnety k sobě jejich nesouhlasnými póly, tak zjistíme, že se



Obrázek 23.26: Zachycení magnetického pole tyčového magnetu pomocí střepek kompasu.

magnety budou k sobě přitahovat, kdežto v případě přiblížení jejich souhlasných pólů se magnety budou vzájemně odpuzovat. Na obrázku 23.26 je zobrazen tyčový magnet a jeho magnetické pole.

23.13.2 Stacionární magnetické pole na rovinném rozhraní dvou prostředí

Uvažujme rovinné rozhraní dvou látek s relativními permeabilitami μ_{r1} a μ_{r2} . Jak vektor magnetické intenzity \mathbf{H} , tak vektor magnetické indukce \mathbf{B} rozložíme na normálovou a tečnou složku vzhledem k rozhraní uvažovaných dvou dielektrik, viz obr. 23.27 a 23.28. Budeme vyšetřovat, jak se budou složky těchto vektorů měnit při přechodu z jednoho dielektrika do druhého.

Nejdříve se zaměříme na tečné složky magnetické intenzity. K tomuto účelu sestrojíme v těsné blízkosti rozhraní uzavřenou dráhu ve tvaru úzkého obdélníku $ABCD$. Necháme-li cirkulovat vektor intenzity magnetického pole podél tohoto obdélníku, pak na základě Ampèrova zákona celkového proudu platí:

$$\oint_{ABCD} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I. \quad (23.163)$$

Integrál v tomto vztahu rozepíšeme na čtyři integrály podél jednotlivých stran uvažovaného obdélníku, přičemž budeme uvažovat, že vektory intenzity magnetického pole pro obě magnetika budou mít složky $\mathbf{H}_1 = \mathbf{H}_{t1} + \mathbf{H}_{n1}$ a $\mathbf{H}_2 = \mathbf{H}_{t2} + \mathbf{H}_{n2}$ (viz obr. 23.27):

$$\int_A^B H_{t1} d\ell + \int_B^C H_{n1} d\ell - \int_C^D H_{t2} d\ell - \int_D^A H_{n1} d\ell = I. \quad (23.164)$$

Protože vyšetřujeme pole v těsné blízkosti rozhraní, bude v limitním případě $BC \rightarrow 0$ a $DA \rightarrow 0$, tedy můžeme integrály s normálovými složkami vektoru magnetické intenzity (tedy druhý a čtvrtý integrál) v rovnici (23.164) položit rovny nule. Předpokládáme-li, že rozhraním dielektrik neteče plošný proud, pak pro uvažovaný limitní případ dostáváme:

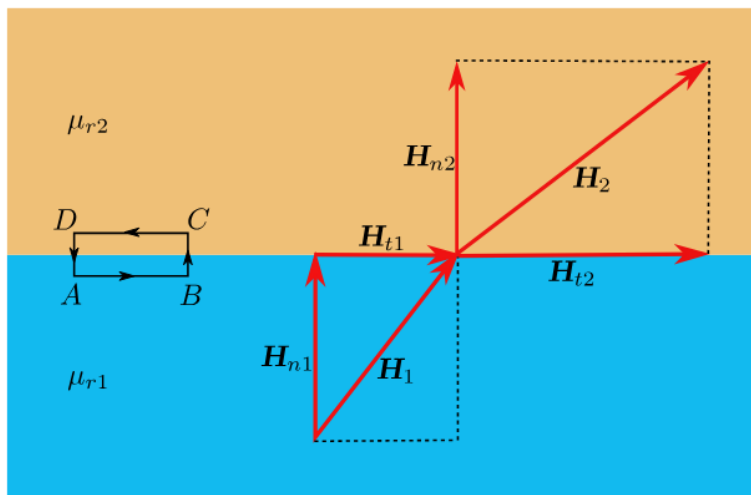
$$\int_A^B H_{t1} d\ell - \int_C^D H_{t2} d\ell = 0. \quad (23.165)$$

Vzhledem k tomu, že délky stran obdélníku mezi body AB a CD se rovnají, tak odtud vyplývá:

$$H_{t1} = H_{t2} . \quad (23.166)$$

Tedy můžeme konstatovat, že *velikost tečné složky intenzity magnetického pole se na rozhraní dvou prostředí nemění*.

S ohledem na vztah (23.160) lze výsledek (23.166) přepsat:



Obrázek 23.27: Složky vektoru magnetické intenzity na rovinném rozhraní dvou prostředí.

$$\frac{B_{t1}}{\mu_0 \mu_{r1}} = \frac{B_{t2}}{\mu_0 \mu_{r2}} \quad (23.167)$$

a odtud dostáváme:

$$\frac{B_{t1}}{B_{t2}} = \frac{\mu_{r1}}{\mu_{r2}} , \quad (23.168)$$

tedy *velikost tečné složky vektoru magnetické indukce se na rozhraní dvou prostředí změnila v poměru odpovídajících relativních permeabilit*.

Nyní vyšetříme, jak se změnila normálová složka vektoru magnetické indukce při přechodu z jednoho prostředí do druhého. Za tímto účelem na rozhraní uvažovaných prostředí zvolíme uzavřenou plochu S_v ve tvaru válce, jehož podstavy jsou rovnoběžné s rozhraním. Podle vztahu (23.35) dostaneme:

$$\oiint_{S_v} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 . \quad (23.169)$$

Integrál na levé straně této rovnice rozepíšeme na tok vektoru magnetické indukce \mathbf{B} základnami válce ΔS a tok plochou jeho pláště S_{pl} :

$$- \iint_{\Delta S} B_{n1} dS + \iint_{S_{pl}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{\Delta S} B_{n2} dS = 0 . \quad (23.170)$$

U prvního integrálu je znaménko minus, protože magnetický indukční tok vstupuje spodní základnou do uzavřené plochy. Dále předpokládáme, že se základny

válce ΔS neomezeně blíží k rozhraní, tj. $h \rightarrow 0$, a tedy $S_{pl} \rightarrow 0$. Díky tomuto předpokladu je možné integrál pro tok magnetické indukce pláštěm válcové plochy (prostřední integrál) položit roven nule, takže dostáváme:

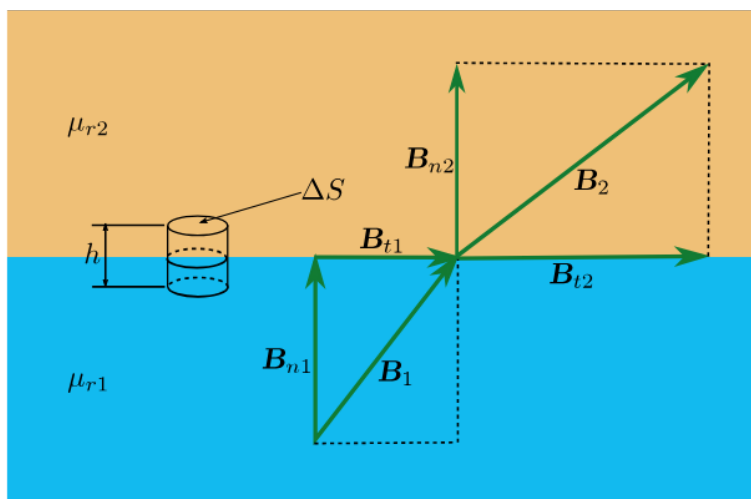
$$-\iint_{\Delta S} B_{n1} dS + \iint_{\Delta S} B_{n2} dS = 0. \quad (23.171)$$

Jelikož základy válce jsou samozřejmě stejně velké, tak odtud vyplývá

$$B_{n1} = B_{n2}. \quad (23.172)$$

Odtud můžeme konstatovat, že *velikost normálové složky vektoru magnetické indukce se na rozhraní dvou prostředí nemění*.

Opět pomocí vztahu (23.160) přepíšeme tuto rovnost:



Obrázek 23.28: Složky vektoru magnetické indukce na rovinném rozhraní dvou prostředí.

$$\mu_0 \mu_{r1} H_{n1} = \mu_0 \mu_{r2} H_{n2} \quad (23.173)$$

a odtud dostáváme:

$$\frac{H_{n1}}{H_{n2}} = \frac{\mu_{r2}}{\mu_{r1}}. \quad (23.174)$$

Z tohoto vztahu lze vidět, že *velikost normálové složky vektoru magnetické intenzity se na rozhraní dvou prostředí mění skokem a to v obráceném poměru relativních permeabilit*.

Odtud je zřejmé, že v případě, kdy magnetické pole není kolmé k rozhraní dvou prostředí, dochází k lomu magnetických vektorových čar i magnetických indukčních čar.

Kapitola 24

Elektromagnetické pole

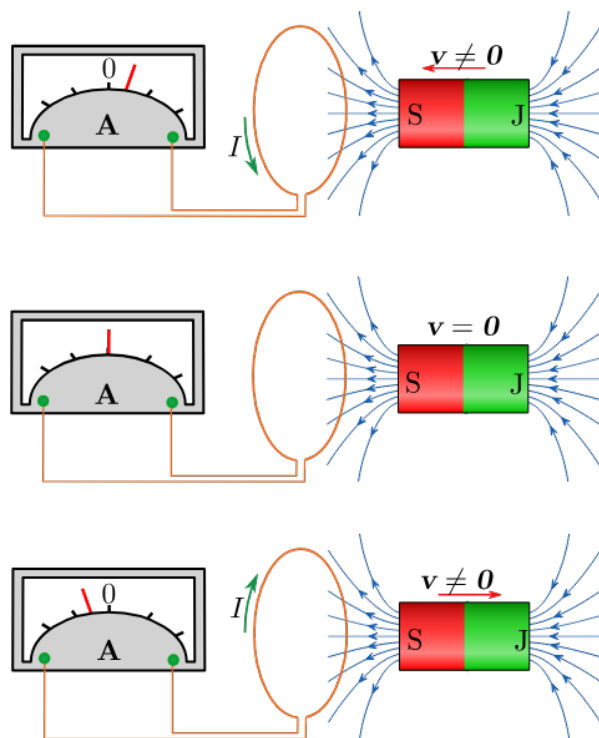
24.1 Faradayův zákon elektromagnetické indukce

Zákon elektromagnetické indukce souvisí se skutečností, že v uzavřené vodivé smyčce vzniká elektrický proud, jestliže v jeho okolí dochází k jakýmkoliv změnám magnetického pole.

Jev elektromagnetické indukce lze pozorovat v několika situacích. Uvažujme vodičovou uzavřenou smyčku zhotovenou z homogenního vodiče, která je umístěna v blízkosti zdrojů magnetického pole (soustava vodičů protékaná elektrickým proudem či zmagnetovaných těles). Předpokládejme dále, že máme možnost měřit proud protékající uvažovanou smyčkou. Zjistíme, že smyčkou nepoteče žádný proud, jestliže magnetické pole v jejím okolí bude neproměnné a smyčka bude v klidu. Naopak smyčkou začne protékat elektrický proud v těchto případech:

1. vodivá smyčka (uzavřený vodič) se začne vhodným způsobem pohybovat vzhledem ke klidové laboratorní soustavě (pohybuje se jako celek nebo jen se mění plocha, kterou uzavírá) v magnetickém poli,
2. vhodným způsobem se začnou pohybovat zdroje magnetického pole, kdežto vodivá smyčka je v klidu vůči klidové laboratorní soustavě,
3. vodivá smyčka i zdroje magnetického pole zůstanou v klidu vůči laboratorní (pozorovací) soustavě, ale začne se měnit magnetické pole uvnitř smyčky (např. tím, že se začnou s časem měnit elektrické proudy ve vodičích vytvářejících magnetické pole),
4. kombinace výše zmíněných způsobů.

Na obr. 24.1 je zachycen druhý ze zmiňovaných způsobů buzení (elektromagnetické indukce) elektrického proudu ve vodivé smyčce, kdy jako zdroj magnetického pole je použit tyčový magnet, který se pohybuje, kdežto v laboratorní soustavě je vodivá smyčka v klidu. Jsou zde zachyceny celkem tři případy. V prvním případě se tyčový magnet pohybuje doleva a budí ve smyčce nenulový elektrický proud, jehož směr je zachycen na obrázku. Druhý příklad demonstruje skutečnost, že samotná přítomnost zdroje magnetického pole, který se nepohybuje, nevybudí v uvažované smyčce žádný elektrický proud. Ve třetím případě se tyčový magnet pohybuje v opačném směru oproti prvnímu případu, což má za následek, že se rovněž budí elektrický proud ve smyčce, ale má opačný směr.



Obrázek 24.1: Buzení elektrického proudu ve vodivé smyčce pomocí tyčového magnetu.

Dříve než si uvedeme znění Faradayova zákona elektromagnetické indukce, budeme zkoumat modelovou situaci, kdy vodivá tyč orientovaná podél osy z dané laboratorní (inerciální) vztažné soustavy se pohybuje konstantní rychlostí \mathbf{v} ve směru osy x v homogenním magnetickém poli orientovaném v záporném směru osy z , tj. $\mathbf{B} = -B\mathbf{e}_z$, viz obr. 24.2.

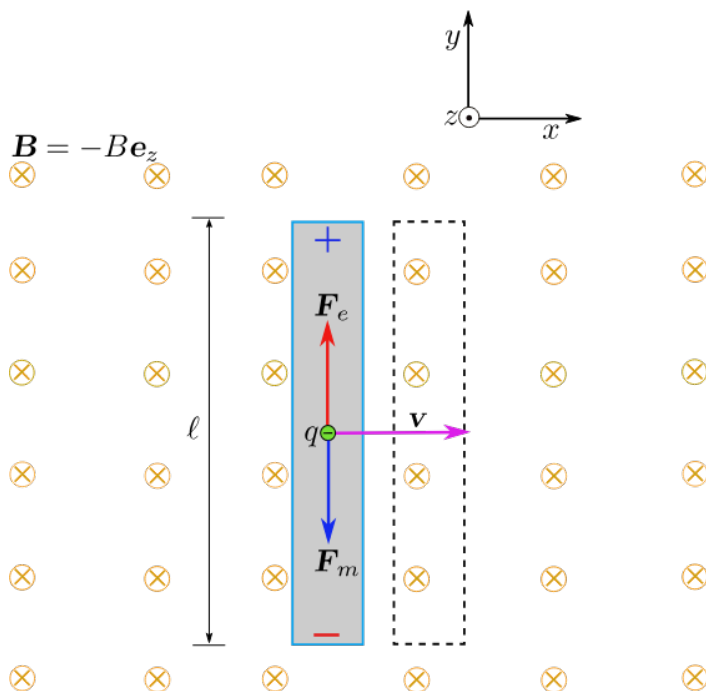
Spolu s tyčí se pohybují i v ní se nacházející volné nosiče elektrického náboje (elektrony), takže, jak již víme z předchozí kapitoly, na tyto nosiče elektrického náboje bude působit magnetická síla. Díky této skutečnosti se tyto volné nosiče náboje začnou pohybovat k dolnímu konci uvažované vodivé tyče. Na dolním konci uvažovaného vodiče, pak vzroste koncentrace záporně nabitých elektronů, což má za následek, že na horním konci vodiče vznikne úbytek elektronů (kladně nabitě ionty). Tímto se bude v této tyči utvářet elektrické (elektrostatické) pole a pohyb elektronů uvnitř tyče ustane, jakmile bude síla působící na náboje vlivem magnetického pole vykompenzována silou elektrickou, tedy nastane stav, kdy $\mathbf{F}_e = -\mathbf{F}_m$, což můžeme na základě vztahu (23.15) zapsat jako

$$\mathbf{F}_e = q\mathbf{E} = -q\mathbf{v} \times \mathbf{B} = -\mathbf{F}_m, \quad (24.1)$$

kde $q = -e$ a \mathbf{E} je intenzita vzniklého ustáleného elektrického pole. V ustáleném stavu mají nosiče elektrického náboje rychlost právě \mathbf{v} . Porovnáním levé a pravé strany této rovnice dostáváme:

$$\mathbf{E} = -\mathbf{v} \times \mathbf{B}, \quad (24.2)$$

vyjadřující intenzitu elektrického pole v ustáleném stavu, která je důsledkem silových účinků magnetického pole na pohybující se náboje.



Obrázek 24.2: Rovnoměrně přímočaře pohybující se vodič v konstantním homogenním magnetickém poli.

Pro její velikost je tedy dána vztahem ($\mathbf{B} \perp \mathbf{v}$):

$$E = |-\mathbf{v} \times \mathbf{B}| = vB . \quad (24.3)$$

Elektrické napětí U mezi konci tyče je pak rovno indukovanému elektromotorickému napětí \mathcal{E}_i , tj.

$$U = E\ell = vB\ell = \mathcal{E}_i . \quad (24.4)$$

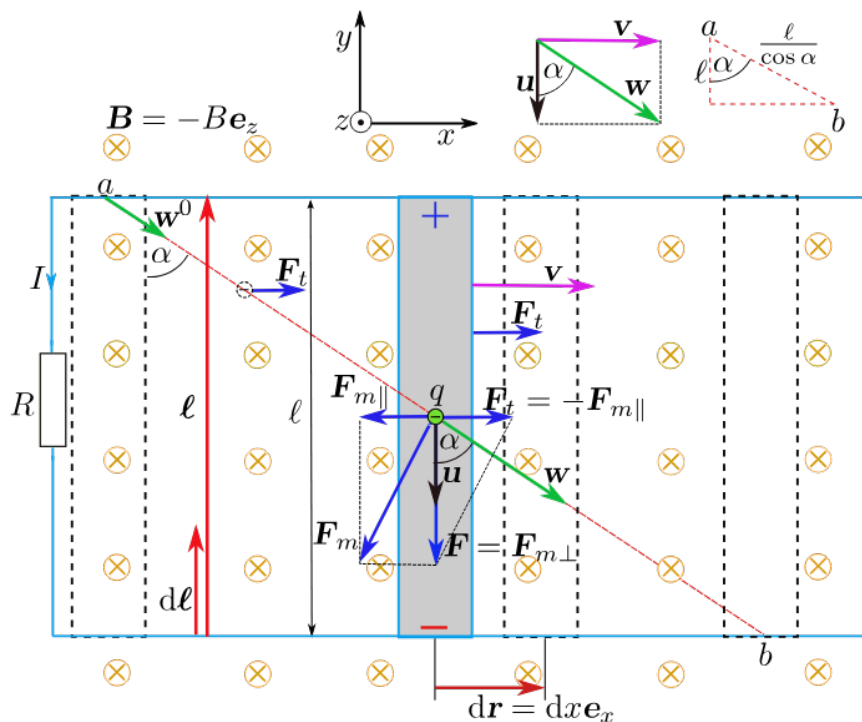
Působení magnetické síly na elektrony ve vodiči vyjadřujeme o intenzitě:

$$\mathbf{E}_F = \frac{\mathbf{F}_m}{q} = \frac{\mathbf{F}_m}{-e} = \mathbf{v} \times \mathbf{B} . \quad (24.5)$$

Intenzita (24.5) představuje elektromotorickou (vtištěnou) intenzitu, tj. $\mathbf{E}_F \equiv \mathbf{E}^*$, a tedy magnetická síla představuje elektromotorickou (vtištěnou) sílu, tj. $\mathbf{F}_m \equiv \mathbf{F}^*$.

Nyní uvažujme, že takto nabitá tyč při svém pohybu najede na vodivé kolejnice, po kterých se bude pohybovat bez tření stejnou rychlostí \mathbf{v} v nezměněném konstantním homogenním magnetickém poli $\mathbf{B} = -B\mathbf{e}_z$, jak je zachyceno na obr. 24.3. Jelikož je pohybující se vodivá tyč zdrojem elektromotorického napětí, tak uvažovanými kolejnicemi poteče konstantní elektrický proud I . Driftovou rychlost nosičů elektrického náboje v pohybující se tyči označíme jako \mathbf{u} (již víme, že je velmi malá). Výsledná rychlost těchto nábojů \mathbf{w} je pak dána vektorovým součtem driftové rychlosti a rychlosti pohybu tyče, viz obr. 24.3, tj.

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v} . \quad (24.6)$$



Obrázek 24.3: Rovnoměrně přímočaře pohybující se vodič po vodivé koleji v konstantním homogenním magnetickém poli \mathbf{B} .

Magnetická síla působící na náboje tedy bude dána vztahem:

$$\mathbf{F}_m = q \mathbf{w} \times \mathbf{B} = -e \mathbf{w} \times \mathbf{B}. \quad (24.7)$$

Protože magnetická síla je silou gyroskopickou, tak nekoná práci a vzhledem k tomu, že vzniklou smyčkou (obvodem) protéká konstantní elektrický proud I , dochází tímto ke ztrátám energie jouleovým teplem. Proto je nutné tuto energii dodávat konáním práce vnější silou \mathbf{F}_t , která táhne vodivou tyč rychlostí \mathbf{v} a je stejně s touto rychlostí orientovaná. Tato síla působí přes strukturu vodivé tyče také na pohybující se náboje, takže výsledná síla \mathbf{F} , která na ně působí, je dána vektorovým součtem magnetické síly \mathbf{F}_m a tažné síly \mathbf{F}_t (viz obr. 24.3), tj.

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_m + \mathbf{F}_t. \quad (24.8)$$

Aby se mohla vodivá tyč pohybovat konstantní rychlostí \mathbf{v} , tak musí pro ní platit, že $\mathbf{F}_t = -\mathbf{F}_{m\parallel}$, viz obr. 24.3, tímto je zajištěno, že se tato tyč bude pohybovat bez zrychlení, jelikož výsledná síla bude rovna nulovému vektoru, tj. $\mathbf{F}_{m\parallel} + \mathbf{F}_t = \mathbf{F}_{m\parallel} - \mathbf{F}_{m\parallel} = \mathbf{0}$.

Vztáhneme-li sílu \mathbf{F} na jednotkový náboj a vezmeme-li v úvahu vztahy (24.6), (24.7), (24.8), (24.5) a (24.3), pak následující integrací podél vodivé tyče dostá-

váme:

$$\begin{aligned}\int_{-}^{+} \frac{\mathbf{F}}{q} \cdot d\boldsymbol{\ell} &= \int_{-}^{+} \frac{\mathbf{F}_m + \mathbf{F}_t}{q} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \int_{-}^{+} \frac{\mathbf{F}_m}{q} \cdot d\boldsymbol{\ell} + \underbrace{\int_{-}^{+} \frac{\mathbf{F}_t}{q} \cdot d\boldsymbol{\ell}}_{=0} = \int_{-}^{+} \frac{\mathbf{F}_m}{q} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \\ \int_{-}^{+} (\mathbf{w} \times \mathbf{B}) \cdot d\boldsymbol{\ell} &= \int_{-}^{+} [(\mathbf{v} + \mathbf{u}) \times \mathbf{B}] \cdot d\boldsymbol{\ell} = \int_{-}^{+} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\boldsymbol{\ell} + \underbrace{\int_{-}^{+} (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \cdot d\boldsymbol{\ell}}_{=0} = \\ \int_{-}^{+} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\boldsymbol{\ell} &= (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \underbrace{\left(\int_{-}^{+} d\boldsymbol{\ell} \right)}_{=\ell} = \underbrace{(\mathbf{v} \times \mathbf{B})}_{=\mathbf{E}_F} \cdot \ell = vB\ell = \mathcal{E}_i . \quad (24.9)\end{aligned}$$

Z tohoto výsledku je vidět, že tažná síla \mathbf{F}_t nijak nepřispívá k indukovanému elektromotorickému napětí \mathcal{E}_i , protože tažná síla je kolmá k pohybující se tyči.

Jak lze vidět z obr. 24.3, tak platí, že $\mathbf{F}_{m\perp} = (\mathbf{F}_m \cdot \mathbf{e}_y)\mathbf{e}_y = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = \mathbf{F}$, takže integraci (24.9) bychom mohli provést jednodušeji, tj.

$$\begin{aligned}\int_{-}^{+} \frac{\mathbf{F}}{q} \cdot d\boldsymbol{\ell} &= \int_{-}^{+} \frac{\mathbf{F}_{m\perp}}{q} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \int_{-}^{+} \frac{q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})}{q} \cdot d\boldsymbol{\ell} = (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \underbrace{\left(\int_{-}^{+} d\boldsymbol{\ell} \right)}_{=\ell} = \\ &\underbrace{(\mathbf{v} \times \mathbf{B})}_{=\mathbf{E}_F} \cdot \ell = vB\ell = \mathcal{E}_i . \quad (24.10)\end{aligned}$$

Z obr. 24.3 také vidíme, že $\mathbf{F}_m = \mathbf{F}_{m\parallel} + \mathbf{F}_{m\perp}$. Magnetická síla $\mathbf{F}_m = q\mathbf{w} \times \mathbf{B} = q\mathbf{u} \times \mathbf{B} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$. Vzhledem k tomu, že výše jsme si ukázali, že $\mathbf{F}_{m\perp} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$, potom musí platit, že $\mathbf{F}_{m\parallel} = q\mathbf{u} \times \mathbf{B}$.

Protože indukované elektromotorické napětí vzniká jen v úseku pohybující se vodivé tyče, tak na základě vztahu (24.9), resp. (24.10) lze psát:

$$\mathcal{E}_i = \oint_C \mathbf{E}_F \cdot d\boldsymbol{\ell} = \int_{-}^{+} \mathbf{E}_F \cdot d\boldsymbol{\ell} = \int_{-}^{+} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\boldsymbol{\ell} = (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \ell = v\ell B . \quad (24.11)$$

Poznamenejme, že musí také platit:

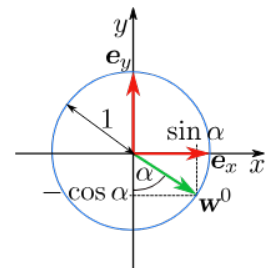
$$\begin{aligned}\mathcal{E}_i &= \oint_C \mathbf{E}_F \cdot d\boldsymbol{\ell} = \oint_C \frac{\mathbf{F}_m}{q} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \oint_C \frac{q\mathbf{w} \times \mathbf{B}}{q} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \\ &\oint_C (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\boldsymbol{\ell} + \underbrace{\oint_C (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \cdot d\boldsymbol{\ell}}_{=0} = \oint_C (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\boldsymbol{\ell} . \quad (24.12)\end{aligned}$$

Na obr. 24.3 je červenou přerušovanou čarou zachycena dráha (úsečka), po které se pohybuje nosič elektrického náboje z místa a do místa b . Práce W , kterou po této dráze (viz doplňující obrázek vpravo na hoře v obr. 24.3) vykoná tažná síla \mathbf{F}_t je dána následujícím vztahem:

$$W = \mathbf{F}_t \cdot \frac{\ell}{\cos \alpha} \mathbf{w}^0 , \quad (24.13)$$

kde \mathbf{w}^0 je jednotkový vektor rychlosti \mathbf{w} a je možné pomocí souřadnicových vektorů vyjádřit jako

$$\mathbf{w}^0 = \sin \alpha \mathbf{e}_x - \cos \alpha \mathbf{e}_y . \quad (24.14)$$



$(\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \perp d\boldsymbol{\ell}$

S pomocí tohoto vyjádření jednotkového vektoru \mathbf{w}^0 je možné dále upravit vztah pro práci (24.13) následujícím způsobem:

$$W = \mathbf{F}_t \cdot \frac{\ell}{\cos \alpha} \mathbf{w}^0 = F_t \mathbf{e}_x \cdot \frac{\ell}{\cos \alpha} (\sin \alpha \mathbf{e}_x - \cos \alpha \mathbf{e}_y) = F_t \ell \tan \alpha . \quad (24.15)$$

Z obr. 24.3 je vidět, že $F_t = F_m \cos \alpha$, kde $F_m = qBw$, což dosadíme do výsledku (24.15):

$$W = (F_m \cos \alpha) \ell \tan \alpha = F_m \ell \sin \alpha = qB\ell w \sin \alpha . \quad (24.16)$$

Z prostředního doplňující obrázku v horní části obr. 24.3 vidíme, že $v = w \sin \alpha$, takže můžeme dále výsledek (24.16) zapsat jako

$$W = qB\ell \underbrace{w \sin \alpha}_{=v} = qB\ell v . \quad (24.17)$$

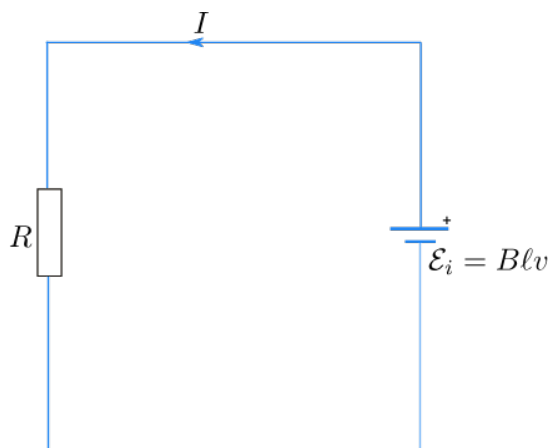
Vztáhneme-li tuto práci na jednotkový náboj, pak na základě vztahu (24.4) můžeme psát:

$$\frac{W}{q} = B\ell v = \mathcal{E}_i . \quad (24.18)$$

Tedy na základě tohoto výsledku můžeme konstatovat, že práce vykonaná tažnou silou vztažená na jednotkový náboj je přesně rovna indukovanému elektromotorickému napětí. Poznamenejme, že po úsečce vymezenou body a a b je práce magnetické síly nulová, jelikož je k této úsečce kolmá.

Na obrázku 24.4 je zachycen ekvivalentní obvod k situaci zachycené obrázkem 24.3.

Ze vztahu (24.11) můžeme při použití pravidla o záměně členů smíšeného součinu



Obrázek 24.4: Ekvivalentní obvod k situaci zachycené na obrázku 24.3.

(4.37) psát:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_i &= (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \boldsymbol{\ell} = (\boldsymbol{\ell} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{B} = -(\mathbf{v} \times \boldsymbol{\ell}) \cdot \mathbf{B} = - \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \boldsymbol{\ell} \right) \cdot \mathbf{B} = \\ &= - \frac{d\mathbf{r} \times \boldsymbol{\ell}}{dt} \cdot \mathbf{B} = - \frac{d\mathbf{S}}{dt} \cdot \mathbf{B} , \quad (24.19) \end{aligned}$$

kde $d\mathbf{S} = d\mathbf{r} \times \boldsymbol{\ell}$ je vektorový element plochy, kterou opíše vodivá tyč za čas dt . Uvážíme-li, že pro element magnetického indukčního toku platí $d\Phi = \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$, můžeme vztah pro indukované elektromotorické napětí (24.19) napsat ve tvaru:

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt} . \quad (24.20)$$

Odtud vidíme že indukované emn je rovno záporně vzaté časové změně magnetického indukčního toku. V uzavřené smyčce se indukoval elektrický proud vlivem časové změny velikosti plochy, kterou uvažovaná smyčka uzavírala.

Příklad 24.1.1

Uvažujme výše popisovanou situaci, kdy se kolmo k homogennímu magnetickému poli $\mathbf{B} = -B\mathbf{e}_z$ pohybuje po koleji bez tření tyčový vodič o hmotnosti m , viz obr. 24.3. Spočítejte velikost proudu I , který protéká elektrickým odporem R a časovou závislost rychlosti této tyče, když víme, že v čase $t = 0$ byla její rychlost v_0 . Dále ověřte, zda kinetická energie tyče v čase $t = 0$ byla dodána uvažovanému elektrickému odporu R .

Řešení:

Elektrickým odporem R protéká elektrický proud:

$$I = \frac{\mathcal{E}_i}{R} .$$

Dosadíme za emn ze vztahu (24.11):

$$I = \frac{B\ell v}{R} .$$

Pomocí vztahu (23.60) spočítáme magnetickou sílu, která působí na tyč protékající proudem I :

$$\mathbf{F}_m = -I\ell B\mathbf{e}_x = -\frac{B^2\ell^2 v}{R}\mathbf{e}_x .$$

Odtud můžeme psát pohybovou rovnici tyče:

$$m\frac{dv}{dt}\mathbf{e}_x = \mathbf{F}_m = -\frac{B^2\ell^2 v}{R}\mathbf{e}_x ,$$

tedy

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{B^2\ell^2}{mR}v \quad \Rightarrow \quad v = v_0 \exp\left(-\frac{B^2\ell^2}{mR}t\right) ,$$

kde $v_0 = v(t=0)$.

Na základě vztahu (22.61) můžeme spočítat dodaný výkon:

$$P = \frac{dW}{dt} = RI^2 = R\frac{B^2\ell^2 v^2}{R^2} = \frac{B^2\ell^2 v^2}{R} = \frac{B^2\ell^2}{R}v_0^2 \exp\left(-2\frac{B^2\ell^2}{mR}t\right) = amv_0^2 e^{-2at} ,$$

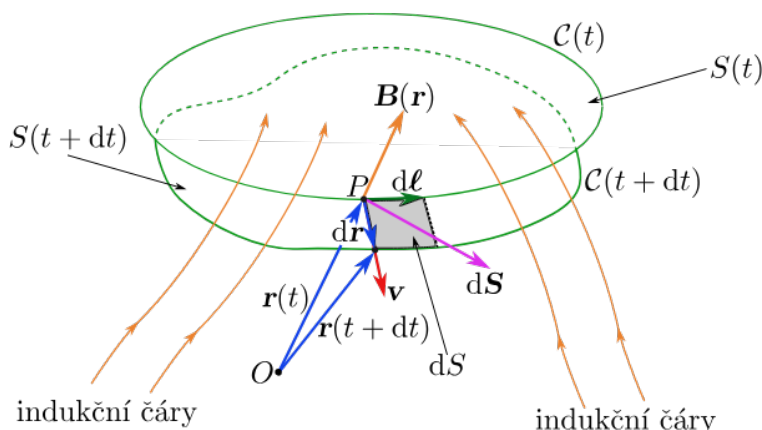
kde

$$a = \frac{B^2\ell^2}{mR} .$$

Odtud

$$Q_j = W = amv_0^2 \int_0^\infty e^{-2at} dt = amv_0^2 \frac{1}{2a} = \frac{1}{2}mv_0^2 = T_0 .$$

V následující části textu nalezneme vztah pro indukované emn i pro obecnější případ, kdy magnetická indukce není homogenní, avšak $\partial \mathbf{B} / \partial t = \mathbf{0}$, a vodič představuje obecnou proudovou smyčku, která se pohybuje okamžitou rychlostí \mathbf{v} libovolným směrem a navíc s časem mění i svůj tvar (deformuje se). Situace je



Obrázek 24.5: Pohyb proudové smyčky v nehomogenním magnetickém poli $\mathbf{B}(\mathbf{r})$.

zachycena na obrázku 24.5, kde je zobrazena smyčka v čase t a v čase $t + dt$. Na proudové smyčce uvažujeme orientovaný délkový element vodiče $d\ell$. Plocha, kterou opíše délkový element vodiče $d\ell$ při pohybu vodiče za čas dt , je dS . Tomuto elementu plochy odpovídá vektor:

$$d\mathbf{S} = d\mathbf{r} \times d\ell = \mathbf{v}dt \times d\ell = (\mathbf{v} \times d\ell)dt , \quad (24.21)$$

kde \mathbf{v} je okamžitá rychlost bodu P proudové smyčky o polohovém vektoru $\mathbf{r}(t)$, který za čas dt přejde do bodu $\mathbf{r}(t + dt)$.

Na obrázku 24.5 jsou zobrazeny dvě křivky, které reprezentují uvažovanou proudovou smyčku (vodič) v čase t a čase $t + dt$. Můžeme si představit, že tyto křivky jsou spojeny pomyslným proužkem. Potom indukční tok $\Phi(t + dt)$ plochou $S(t + dt)$ je dán součtem indukčního toku $\Phi(t)$ plochou $S(t)$ a toku $\Phi_{\text{proužek}}$ oním pomyslným proužkem. Tedy pro změnu indukčního toku dostáváme:

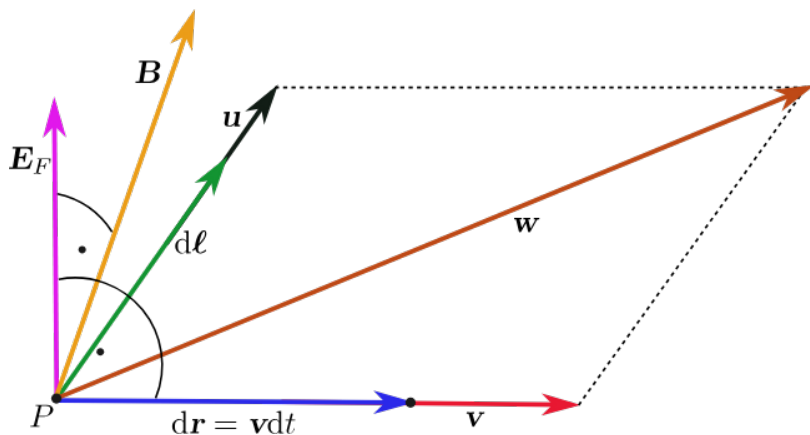
$$d\Phi = \Phi(t + dt) - \Phi(t) = \Phi_{\text{proužek}} = \iint_{\text{proužek}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} , \quad (24.22)$$

kde vektor elementu plochy proužku $d\mathbf{S}$ je dán vztahem (24.21), který dosadíme do výrazu (24.22):

$$d\Phi = \oint_C \mathbf{B} \cdot (\mathbf{v} \times d\ell)dt . \quad (24.23)$$

Odtud dostaneme:

$$\frac{d\Phi}{dt} = \oint_C \mathbf{B} \cdot (\mathbf{v} \times d\ell) . \quad (24.24)$$



Obrázek 24.6: Skládání rychlostí náboje \mathbf{u} a proudové smyčky \mathbf{v} .

Označíme-li rychlost náboje v proudové smyčce (vodiči) \mathbf{u} , pak výsledná rychlost pohybu náboje v bodě P v laboratorní soustavě \mathbf{w} je dána jejím součtem s rychlostí proudové smyčky \mathbf{v} , tedy $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$, viz obr. 24.6. Jelikož je rychlost \mathbf{u} je kolineární s elementem $d\boldsymbol{\ell}$, tedy $\mathbf{u} \times d\boldsymbol{\ell} = \mathbf{0}$, můžeme přepsat vztah (24.24) do tvaru :

$$\mathbf{u} \parallel d\boldsymbol{\ell}$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = \oint_C \mathbf{B} \cdot (\mathbf{w} \times d\boldsymbol{\ell}) = \oint_C \mathbf{B} \cdot (\mathbf{v} \times d\boldsymbol{\ell}) . \quad (24.25)$$

Odtud vyplývá, že není nutné při hledání časové změny indukčního toku uvažovat celkovou rychlost náboje \mathbf{w} , ale stačí pracovat jen s rychlostí \mathbf{v} .

Smíšený součin v integrandu lze přepsat jako

$$\mathbf{B} \cdot (\mathbf{v} \times d\boldsymbol{\ell}) = (\mathbf{B} \times \mathbf{v}) \cdot d\boldsymbol{\ell} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\boldsymbol{\ell} , \quad (24.26)$$

čímž dostáváme:

$$\frac{d\Phi}{dt} = - \oint_C (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\boldsymbol{\ell} . \quad (24.27)$$

Integrand v tomto vztahu vlastně představuje elektromotorickou intenzitu $\mathbf{E}_F = \mathbf{v} \times \mathbf{B}$, viz rovnost (24.11), takže můžeme přepsat vztah (24.27) do tvaru:

$$\frac{d\Phi}{dt} = - \oint_C \mathbf{E}_F \cdot d\boldsymbol{\ell} . \quad (24.28)$$

Protože platí, že

$$\mathcal{E}_i = \oint_C \mathbf{E}_F \cdot d\boldsymbol{\ell} = \oint_C (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\boldsymbol{\ell} , \quad (24.29)$$

lze porovnáním vztahů (24.28) a (24.29) dospět opět ke vztahu:

$$\mathcal{E}_i = - \frac{d\Phi}{dt} . \quad (24.30)$$

Tímto jsme ukázali, že vztah (24.30) je totožný se vztahem (24.20), který tedy platí i pro obecnější případ.

Nutno poznamenat, že časově proměnného indukčního toku lze dosáhnout i časově proměnným magnetickým polem. V případě, že máme nepohybující se vodivou smyčku a současně neměnnou plochu, kterou uzavírá, tak na základě experimentů

je potvrzeno, že vztah (24.30) platí i pro tento případ.

Na základě obecné platnosti vztahu (24.30) lze formulovat **Faradayův zákon elektromagnetické indukce**¹:

Faradayův zákon elektromagnetické indukce

Velikost indukovaného elektromotorického napětí ve vodivé smyčce je rovna velikosti záporně vzaté totální (úplné) časové derivace celkového magnetického toku smyčkou.

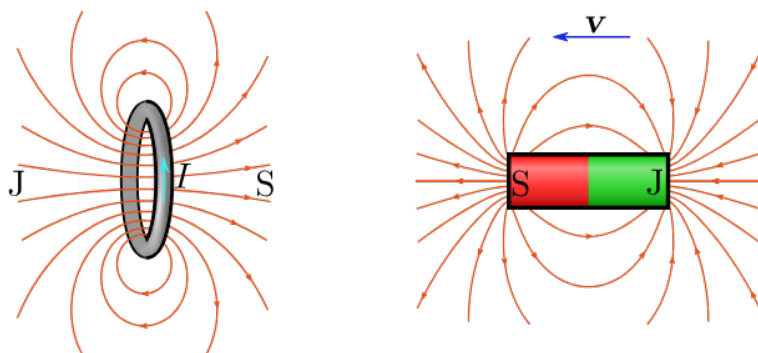
Matematická formulace tohoto zákona má tvar:

$$\mathcal{E}_i(t) = -\frac{d\Phi}{dt} . \quad (24.31)$$

Směr indukovaného proudu určujeme pomocí **Lenzova zákona (pravidla)**.

Lenzův zákon

Směr indukovaného proudu ve vodivé smyčce je vždy takový, že magnetické pole vytvořené tímto proudem se vždy snaží kompenzovat změny magnetického toku odpovědné za vznik indukovaného proudu.

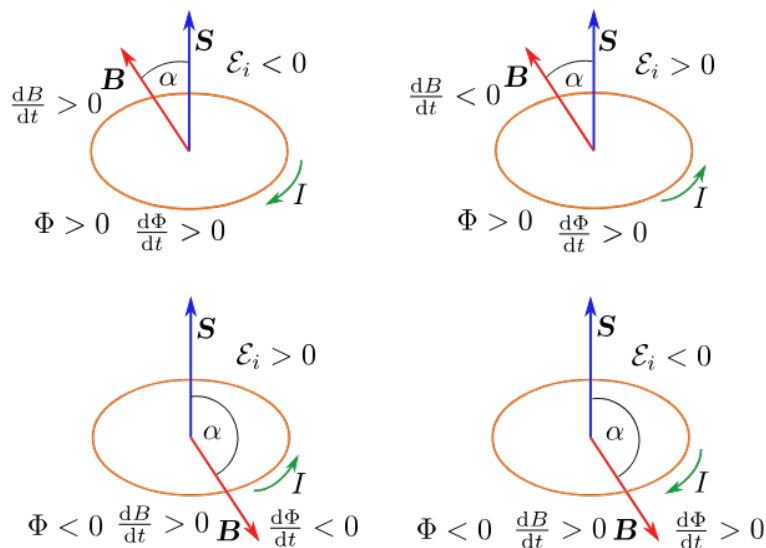


Obrázek 24.7: Situační obrázek k Lenzovu zákonu.

Na obr. 24.7 je ukázána indukce elektrického proudu ve vodivé smyčce, který je způsoben pohybem tyčového magnetu. Indukovaný elektrický proud v proudové smyčce je zdrojem magnetického pole, u kterého na základě analogie s magnetickým polem tyčového magnetu lze vyznačit severní a jižní pól. Souhlasné póly znamenají, že se magnety odpuzují, čímž je demonstrováno, že vzniklé magnetické pole se snaží kompenzovat, v souladu s Lenzovým zákonem, změnu magnetického toku způsobenou pohybem tyčového magnetu tím, že brání jeho pohybu.

K určení směru indukovaného elektrického proudu je potřeba si nejdříve zvolit orientaci vektoru plochy smyčky **S**. Je-li indukované elektromotorické napětí kladné, tak uchopíme vektor plochy pravou rukou tak, aby palec ukazoval ve

¹Někdy je se zákon označuje jen jako Faradayův zákon. V roce 1831 anglický fyzik Michael Faraday zveřejnil výsledky svých experimentů ohledně elektromagnetické indukce, takže tento zákon nese jeho jméno.

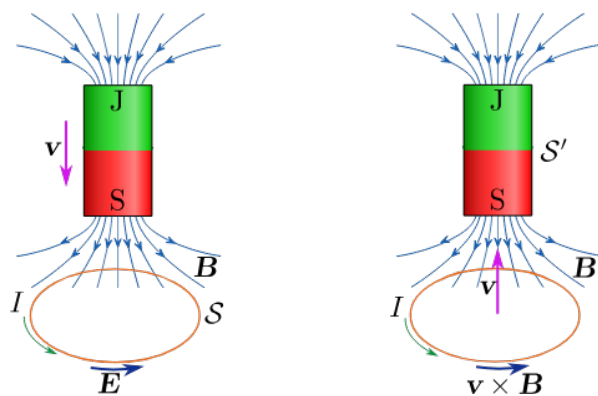


Obrázek 24.8: Určení směru indukovaného elektrického proudu I ve vodivé smyčce.

směru orientace tohoto vektoru a zahnuté prsty pak ukazují směr indukovaného elektrického proudu. Je-li indukované elektromotorické napětí záporné, pak provedeme to samé, ale pomocí levé ruky, viz obr. 24.8, kde jsou zachyceny orientace indukovaného proudu ve vodivé smyčce pro různé případy.

Uvažujme případ, kdy máme vodivou smyčku a tyčový magnet. Aby došlo k elektromagnetické indukci, tak se buď tento magnet nebo tato smyčka musí pohybovat. Když zvolíme laboratorní soustavu \mathcal{S} pevně spojenou se smyčkou, tak se bude tyčový magnet pohybovat rychlostí \mathbf{v} , zvolíme-li laboratorní soustavu \mathcal{S}' pevně spojenou s tyčovým magnetem, tak se z pohledu této soustavy naopak bude pohybovat vodivá smyčka rychlostí \mathbf{v} , jak je zachyceno na obr. 24.9.

Pozorovatel v soustavě \mathcal{S} vidí, že vodivou smyčkou protéká proud I . Teče-li touto



Obrázek 24.9: Elektromagnetická indukce pozorovaná z pohledu dvou různých soustav: \mathcal{S} a \mathcal{S}' .

smyčkou proud, musí být podél prstence elektrické pole, které zajistí pohyb nosičů elektrického náboje q . Tímto na něj působí elektrická síla $\mathbf{F}_e = q\mathbf{E}$, protože elektrický náboj je vůči pozorovateli v klidu ($\mathbf{v} = \mathbf{0}$), takže na něj nemůže působit síla $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$. Pozorovatel vidí pohybující se magnet, takže indukované elektrické pole \mathbf{E} musí být vyvoláno měnícím se magnetickým indukčním tokem a je právě tak

reálné jako elektrické pole vytvořené statickými elektrickými náboji. Na druhou stranu pozorovatel v soustavě \mathcal{S}' vidí vodivou smyčku pohybující se rychlostí \mathbf{v} v magnetickém poli \mathbf{B} , kterou protéká proud I daný pohybem elektrických nábojů. Pozorovatel dospěje k závěru, že příčinou tohoto pohybu je magnetická síla $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$. Protože síly působící na elektrický náboj pozorované z pohledu obou inerciálních soustav ($\mathbf{v} = \text{konst.}$) musí být stejné, co do velikosti a orientace (jinak by tekla z pohledu uvažovaných soustav rozdílný elektrický proud), pak musí platit, že $q\mathbf{E} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$, tedy

$$\mathbf{E} = \mathbf{v} \times \mathbf{B} . \quad (24.32)$$

Provedeme-li cirkulaci podél uvažované vodivé smyčky vektorů na obou stranách této rovnice, tak můžeme psát:

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \oint_C (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\boldsymbol{\ell} . \quad (24.33)$$

S ohledem na vztahy (24.29) a (24.30), pak můžeme rovnici (24.33) zapsat následujícím způsobem

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} , \quad (24.34)$$

kde C odpovídající vodivé smyčce a S je plocha, kterou tato smyčka uzavírá.

Z tohoto výsledku vidíme, že integrace indukovaného elektrického pole podél uzavřené křivky se nerovná nule, tudíž indukované elektrické pole je polem **nekonzervativním**, na rozdíl od elektrického pole statického či stacionárního. Protože magnetické pole nekoná práci, tak nenulová práce vykonaná na volných pohybujících se nábojích musí být elektrická a elektrické pole v takovémto případě nemůže být konzervativní.

Tento výsledek platí obecně pro různé způsoby indukování elektrického nekonzervativního pole a rovnice (24.34) je rovněž matematickým vyjádřením zákona elektromagnetické indukce. V tomto tvaru, mimo jiné, nám říká, že *měnícím se magnetickým polem je indukováno elektrické pole*.

Rovnice (24.34) představuje Maxwellovu rovnici týkající se elektromagnetické indukce v integrálním tvaru a zahrnuje v sobě Maxwellovu rovnici (21.26), která platí pro elektrostatické a stacionární elektrické pole, protože jeho přítomnost se v cirkulaci podél libovolné uzavřené křivky neprojevuje, jelikož je rovna nule.

J. C. Maxwell zobecnil rovnici (24.34) pro smyčky, resp. křivky, (i jen myšlené²) v libovolném prostředí.

Jestliže uvažujeme plochu S vymezenou křivkou C za nehybnou, tj. křivka nemění s časem ani svoji polohu ani tvar, pak časová derivace ve vztahu (24.34) se aplikuje jen na časově proměnné magnetické pole \mathbf{B} . V takovém případě můžeme vztah (24.34) přepsat jako

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = -\iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} . \quad (24.35)$$

²Rovnice (24.34) nám říká, že měnící se magnetické pole vytváří pole elektrické a pozoruhodné je, že odtud plyne, že elektrické pole se indukuje i tehdy, když uzavřená vodivá smyčka je nahrazena jen myšlenou uzavřenou křivkou.

Tento vztah vyjadřuje zákon elektromagnetické indukce v integrálním tvaru pro stacionární (nepohyblivou) smyčku, která je vložena do časově proměnného magnetického pole³.

Použijeme-li Stokesovu větu (9.51) na integrál na levé straně rovnice (24.35), můžeme snadno převést integrální tvar zápisu zákona elektromagnetické indukce na tvar diferenciální, tj.

$$\iint_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} = - \iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}, \quad (24.36)$$

odtud

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (24.37)$$

Pravou stranu rovnice (24.35) můžeme položit rovnu indukovanému emn souvisejícímu čistě jen s časovou změnou vektoru \mathbf{B} při nehybné smyčce, které označíme jako

$$\mathcal{E}_{it} = - \iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}. \quad (24.38)$$

V případě, že indukované emn souvisí jen s pohybem smyčky (magnetické pole považujeme za neměnné), potom toto emn označíme jako \mathcal{E}_{ip} a na základě vztahu (24.29) je určeno jako

$$\mathcal{E}_{ip} = \oint_C (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\boldsymbol{\ell}. \quad (24.39)$$

V případě, že se smyčka (obvod) pohybuje v časově proměnném magnetickém poli, je celkové indukované emn dáno vztahem:

$$\mathcal{E}_i = \mathcal{E}_{it} + \mathcal{E}_{ip} = - \iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} + \oint_C (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\boldsymbol{\ell}. \quad (24.40)$$

S ohledem na vztah (24.34) můžeme tuto rovnost vyjádřit jako

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \mathcal{E}_{it} + \mathcal{E}_{ip} = - \iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} + \oint_C (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\boldsymbol{\ell}. \quad (24.41)$$

Použitím Stokesovy věty dostaneme:

$$\iint_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} = - \iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} + \iint_S [\nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B})] \cdot d\mathbf{S}. \quad (24.42)$$

Protože plocha S je ohraničena libovolnou křivkou C , bude tato rovnice splněna jen v případě následující rovnosti integrandů:

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (24.43)$$

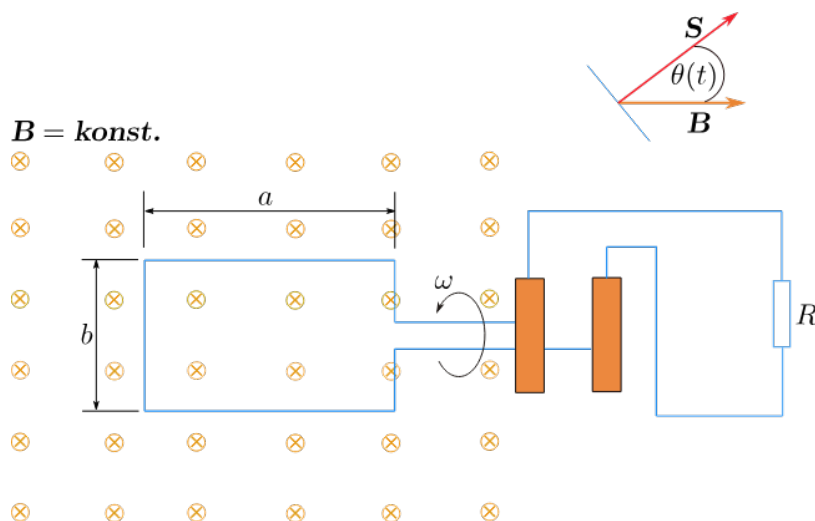
Tato rovnice představuje zákon elektromagnetické indukce v nejobecnějším diferenciálním tvaru. Umožňuje nám určit elektrické pole v bodě pozorovatele pohybujícího se rychlostí \mathbf{v} v časově proměnném magnetickém poli \mathbf{B} , viz obr. 24.10.

³Náhrada úplné časové derivace parciální časová derivací souvisí s tím, že časová změna souvisí pouze se změnou magnetické indukce \mathbf{B} , a jelikož je plocha S s časem neměnná, může být derivace zahrnuta dovnitř integrálu.

Příklad 24.1.2

Máme vodivou obdélníkovou smyčku o délce a a šířce b , která se periodicky otáčí konstantní úhlovou rychlostí ω v homogenním magnetickém poli o magnetické indukci \mathbf{B} . Smyčka se otáčí kolem osy, která je kolmá na vektor magnetické indukce \mathbf{B} , přičemž v čase $t = 0$ leží smyčka v rovině kolmé k \mathbf{B} . Nalezněte:

1. Vztah pro magnetický indukční tok Φ procházející smyčkou v závislosti na čase.
2. Vztah pro indukované elektromotorické napětí \mathcal{E} ve smyčce v závislosti na čase.
3. Vztah pro indukovaný elektrický proud ve smyčce.



Obrázek 24.10: Rotující vodivá smyčka v konstantním magnetickém poli.

Řešení:

Magnetický indukční tok Φ je definován jako:

$$\Phi = \mathbf{B} \cdot \mathbf{S} = BS \cos \theta(t) ,$$

kde \mathbf{B} je vektor magnetické indukce, $\mathbf{S} = S\mathbf{n}(t)$ je plošný vektor smyčky, B je velikost magnetické indukce, $S = ab$ je plocha smyčky a $\theta(t)$ je úhel mezi normálou k ploše smyčky a vektorem magnetické indukce.

Pokud se smyčka otáčí s konstantní úhlovou rychlostí ω , pak úhel $\theta(t)$ závisí na čase jako:

$$\theta(t) = \omega t .$$

Vztah pro magnetický indukční tok tedy bude:

$$\Phi(t) = BS \cos(\omega t) .$$

Podle Faradayova zákona elektromagnetické indukce je indukované elektromotorické napětí ve smyčce rovno záporné časové derivaci magnetického indukčního toku:

$$\mathcal{E}(t) = -\frac{d\Phi(t)}{dt}.$$

Dosadíme za $\Phi(t)$:

$$\mathcal{E}(t) = -\frac{d}{dt}(BS \cos(\omega t)) = BS\omega \sin(\omega t),$$

Indukovaný elektrický proud $I(t)$ ve vodivé smyčce lze vypočítat pomocí Ohmova zákona:

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}(t)}{R},$$

kde $\mathcal{E}(t)$ je indukované elektromotorické napětí a R je elektrický odpor smyčky. Z předchozího vztahu pro indukované elektromotorické napětí můžeme dosadit do Ohmova zákona a získat vztah pro časově závislý proud:

$$I(t) = \frac{BS\omega}{R} \sin(\omega t).$$

Tento vztah popisuje velikost indukovaného střídavého elektrického proudu ve smyčce.

24.2 Maxwellovo zobecnění Ampèrova zákona celkového proudu pro nestacionární elektromagnetické pole

V kapitole 23.12 jsme dopěli k Ampèrovu zákonu celkového proudu v látkovém prostředí, jehož diferenciální tvar je dán vztahem (23.155). Provedeme-li divergenci obou stran rovnice (23.155), tak dospějeme k výsledku:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = \nabla \cdot \mathbf{j}. \quad (24.44)$$

Protože na základě identity (A.10) je divergence rotace rovna nule, bude rovnice (23.155) splněna jen v případě, že $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$. Z kapitoly 22.3 víme, že tato rovnost je však splněna jen v případě stacionárního elektrického pole. Uvažujeme-li elektrické pole nestacionární, což je náš případ, pak na základě rovnice kontinuity (22.34) platí:

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (24.45)$$

Odtud vidíme, že Ampèrův zákon celkového proudu je použitelný v tomto tvaru jen pro stacionární elektrická pole. Pro nestacionární elektrické pole je nutné tento zákon upravit.

Rovnici kontinuity (22.34) upravíme tak, že za objemovou hustotu volného elektrického náboje dosadíme z Gaussova zákona (21.21):

$$\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial(\nabla \cdot \mathbf{D})}{\partial t} = 0. \quad (24.46)$$

Rovnici můžeme dále upravit do tvaru:

$$\nabla \cdot \left(\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) = \nabla \cdot \mathbf{j}_c = 0, \quad (24.47)$$

kde

$$\mathbf{j}_c = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (24.48)$$

je celková hustota proudu, která se skládá z hustoty kondukčního a konvekčního proudu \mathbf{j} , ale i z hustoty tzv. **posuvného proudu** $\partial \mathbf{D} / \partial t$. Posuvný proud tedy existuje vždy, když se s časem mění vektor elektrické indukce (elektrické pole).

Dosadíme-li za elektrickou indukci ze vztahu (21.20), pak dostaneme:

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} = \mathbf{j}_M + \mathbf{j}_P, \quad (24.49)$$

kde první člen na pravé straně rovnosti se nazývá hustota **Maxwellova proudu** a poslední člen představuje hustotu **proudu polarizačního**, viz kapitola 22.1.

Má-li mít rovnice (23.155) obecnou platnost, je nutné na její pravou stranu přičíst posuvný proud, čímž dostaneme:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (24.50)$$

Tato rovnice je matematickým vyjádřením **zobecněného Ampèrova zákona celkového proudu v diferenciálním tvaru**, který platí i pro nestacionární elektrické pole. Integrální tvar tohoto zákona nalezneme pomocí Stokesovy věty (9.51):

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\boldsymbol{\ell} = I + \iint_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}. \quad (24.51)$$

Pro objasnění fyzikálního významu posuvného, resp. Maxwellova, proudu budeme uvažovat deskový kondenzátor, přičemž se omezíme na bezmateriálové prostředí, viz obr. 24.11. Při následujících úvahách budeme vycházet z experimentální zkušenosti, že v případě časově proměnného proudu $I(t)$ naměříme stejný proud před i za kondenzátorem, takže kondenzátorem teče elektrický proud⁴. Proud $I(t)$ nabíjí elektrody kondenzátoru a tím mění intenzitu elektrického pole \mathbf{E} mezi nimi. Pro intenzitu mezi elektrodami platí (předpokládáme homogenní elektrické pole - elektrody jsou blízko sebe):

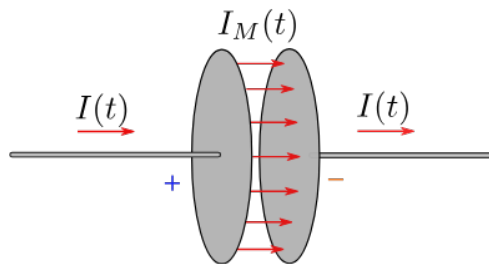
$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{Q}{S}, \quad (24.52)$$

kde Q je náboj na elektrodě kondenzátoru o ploše S .

Odtud můžeme psát:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon_0 S} \frac{dQ}{dt} = \frac{1}{\varepsilon_0 S} I(t). \quad (24.53)$$

⁴Samozřejmě v případě stacionárního proudu je proud před i za kondenzátorem nulový, tedy kondenzátorem neteče elektrický proud.



Obrázek 24.11: Maxwellův proud I_M mezi deskami kondenzátoru nabíjeného proudem I .

Pro posuvný proud ve vakuu mezi elektrodami, tedy Maxwellův proud, dostáváme:

$$I_M(t) = \varepsilon_0 \iint_S \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} = \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \iint_S dS = \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} S. \quad (24.54)$$

Dosadíme za $\partial E / \partial t$ ze vztahu (24.53):

$$I_M(t) = \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} S = \varepsilon_0 \frac{1}{\varepsilon_0 S} I(t) S = I(t). \quad (24.55)$$

Odtud lze vidět, že vodivý (kondukční) a Maxwellův proud mají stejnou velikost. Maxwellův proud $I_M(t)$ můžeme proto považovat za pokračování vodivého proudu $I(t)$ z jedné elektrody přes mezeru kondenzátoru k druhé elektrodě. Protože elektrické pole je mezi deskami homogenní, je i Maxwellův proud $I_M(t)$ mezi nimi rozložen rovnoměrně, jak ukazují proudové čáry na obr. 24.11. Poznamenejme, že mezi deskami je vakuum, kde není žádný náboj, který by se pohyboval a vytvářel tak jakýkoli proud!

Ze zobecněného Ampèrova zákona celkového proudu v diferenciálním tvaru (24.50) lze samozřejmě zpětně snadno získat rovnici kontinuity elektrického náboje v diferenciálním tvaru. Stačí nad rovnicí (24.50) provést operaci divergence, tedy

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = \nabla \cdot \mathbf{j} + \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (24.56)$$

Jak již bylo výše uvedeno, divergence rotace vektorové funkce je vždy rovna nule, takže uvažíme-li navíc Gaussův zákon (21.21), tak můžeme psát:

$$0 = \nabla \cdot \mathbf{j} + \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{D} = \nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t}, \quad (24.57)$$

čímž jsme dostali rovnici kontinuity elektrického náboje v diferenciálním tvaru.

24.3 Indukčnost vodičů a energie magnetického pole v kvazistacionárním přiblížení

24.3.1 Vlastní indukčnost vodiče a vlastní indukce

Uvažujme uzavřený elektrický obvod (proudovou smyčku), kterým protéká elektrický proud I . Z Biotova-Savartova-Laplaceova zákona (23.27) plyne, že magnetická indukce \mathbf{B} v okolí vodiče je přímo úměrná elektrickému proudu I , který

vodičem protéká. Vezmeme-li dále v úvahu definiční vztah pro magnetický indukční tok (23.22), tak je odtud zřejmé, že je-li přímo úměrná magnetická indukce elektrickému proudu $B \sim I$, musí být i magnetický indukční tok přímo úměrný elektrickému proudu, tj. $\Phi \sim I$. Odtud zřejmě můžeme psát

$$\Phi = LI, \quad (24.58)$$

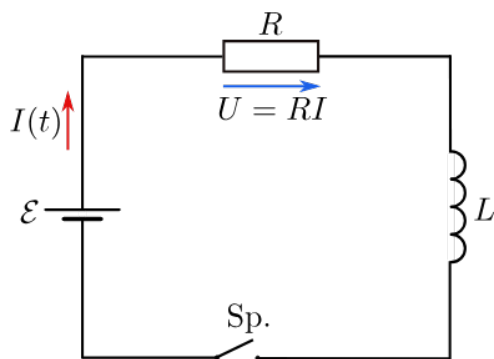
kde konstantu úměrnosti L nazýváme **vlastní indukčnost vodiče**. Výraz (24.58) představuje tzv. **statickou definici vlastní indukčnosti**. Jednotkou indukčnosti je **henry** a značíme ji **H**. Pro bezmateriálové prostředí je vlastní indukčnost L kladnou konstantní veličinou, která je závislá jen na velikosti a tvaru vodiče, tj. geometrii vodiče. Pro materiálová prostředí bude vlastní indukčnost navíc záviset na magnetických vlastnostech prostředí⁵.

Bude-li obvodem protékat časově proměnný proud $I(t)$, bude s ohledem na výše uvedené skutečnosti, vytvářet časově proměnné magnetické pole a plochou elektrického obvodu bude procházet časově proměnný magnetický indukční tok $\Phi(t)$. Podle zákona elektromagnetické indukce se díky časovým změnám magnetického indukčního toku bude indukovat v obvodu elektromotorické napětí

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d(LI)}{dt} = -L\frac{dI}{dt}. \quad (24.59)$$

Tento jev se nazývá **vlastní indukce** či **samoindukce**. Připomeňme, že znaménko mínus souvisí s Lenzovým zákonem, a tedy značí, že indukované napětí je namířeno proti změně proudu, která jev vyvolává⁶. Odtud vyplývá, že elektrický obvod (vodič), kterým prochází časově proměnný proud, klade jeho průchodu odpor. Vztah (24.59) představuje tzv. **dynamickou definici vlastní indukčnosti**.

Uvažujme elektrický obvod znázorněný na obr. 24.12, který představuje vodivou



Obrázek 24.12: Elektrický obvod se spínačem.

smyčku připojenou přes spínač k vnějšímu zdroji emn (baterie) \mathcal{E} , kde R je elektrický odpor smyčky a L je její vlastní indukčnosti. Zpočátku je obvod rozpojený a v čase $t = 0$ dojde k jeho sepnutí, čímž obvodem začne protékat elektrický

⁵Pro feromagnetická prostředí bude vlastní indukčnost záviset i na proudu, tedy není konstantou.

⁶Odtud plyne, že kdykoliv chceme v obvodu změnit proud, musíme překonat vliv indukovaného napětí. Tedy indukčnost hraje v elektrických obvodech stejnou roli, jakou hraje hmotnost v mechanických soustavách. Čím je větší indukčnost, tím je těžší změnit proud, čím je objekt hmotnější, tím je těžší změnit jeho rychlost.

proud. Změna z nulové hodnoty proudu na jeho konečnou hodnotu I však nebude skoková, ale velikost proudu bude s časem postupně narůstat, jak si dále ukážeme. Časová změna proudu $I(t)$ vyvolá ve smyčce časově proměnný magnetický indukční tok $\Phi(t)$ a tím i indukované elektromotorické napětí \mathcal{E}_i . Potom celkové elektromotorické napětí je dáno součtem vnějšího emn a indukovaného emn, takže na základě Ohmova zákona platí:

$$\mathcal{E} + \mathcal{E}_i = RI . \quad (24.60)$$

Za \mathcal{E}_i dosadíme ze vztahu (24.59), čímž dostaneme:

$$\mathcal{E} - L \frac{dI}{dt} = RI . \quad (24.61)$$

Rovnice (24.61) představuje obyčejnou nehomogenní diferenciální rovnici, kterou upravíme do následujícího tvaru:

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I(t) = \frac{\mathcal{E}}{L} . \quad (24.62)$$

Proud $I(t)$ v obvodu můžeme považovat za superpozici ustáleného proudu I_∞ a proudu přechodového $i(t)$, pro který platí, že $i(\infty) = 0$ (magnetický indukční tok bude konstantní a nebude se indukovat emn \mathcal{E}_i). Ustálený proud je pak určen jen emn \mathcal{E} a odporem R , tj. $I_\infty = \mathcal{E}/R$. Tedy časově proměnný proud $I(t)$ v obvodu (smyčce) bude:

$$I(t) = i(t) + I_\infty = i(t) + \frac{\mathcal{E}}{R} . \quad (24.63)$$

Tento proud dosadíme do diferenciální rovnice (24.62) a dostaneme:

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i(t) + \frac{\mathcal{E}}{L} = \frac{\mathcal{E}}{L} \Rightarrow \frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i(t) = 0 . \quad (24.64)$$

Tuto diferenciální rovnici řešíme metodou separace proměnných:

$$\int \frac{di}{i} = -\frac{R}{L} \int dt + \ln C \Rightarrow \ln i = -\frac{R}{L}t + \ln C . \quad (24.65)$$

Odtud odlogaritmováním dostaneme:

$$i(t) = Ce^{-\frac{R}{L}t} . \quad (24.66)$$

Výsledek dosadíme do vztahu (24.63):

$$I(t) = Ce^{-\frac{R}{L}t} + \frac{\mathcal{E}}{R} . \quad (24.67)$$

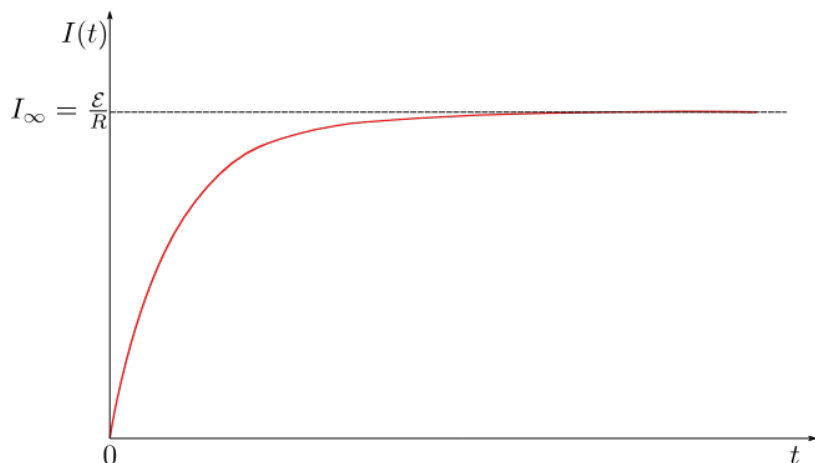
Integrační konstantu C stanovíme pomocí počáteční podmínky: $I(0) = 0$, tedy

$$0 = C + \frac{\mathcal{E}}{R} \Rightarrow C = -\frac{\mathcal{E}}{R} . \quad (24.68)$$

Tedy hledané řešení diferenciální rovnice (24.61) je:

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right) . \quad (24.69)$$

Závislost elektrického proudu v závislosti na čase je zachycena na obr. 24.13.



Obrázek 24.13: Závislost proudu protékající smyčkou v závislosti na čase.

24.3.2 Vzájemná indukčnost vodičů a vzájemná indukce

Uvažujme dvě proudové smyčky, které jsou vůči sobě v klidu, viz 24.14. Jestliže první smyčkou protéká proud I_1 , potom vytváří magnetické pole \mathbf{B}_1 . Některé indukční čáry procházejí plochou vymezenou druhou smyčkou. Tok vektoru magnetické indukce \mathbf{B}_1 druhou smyčkou označíme Φ_2 . Potom na základě úvah z předchozí kapitoly musí platit, že $B_1 \sim I_1$ a $\Phi_2 \sim I_1$, tedy můžeme napsat

$$\Phi_2 = M_{21} I_1, \quad (24.70)$$

kde M_{21} představuje konstantu úměrnosti, která může nabývat jak kladných, tak záporných hodnot v závislosti na vzájemné orientaci uvažovaných smyček.

Pro indukční tok druhou smyčkou můžeme tedy psát:

$$\Phi_2 = \iint_{S_2} \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{S}_2. \quad (24.71)$$

Vztah (24.71) můžeme přepsat pomocí rovnosti (23.99) do tvaru:

$$\Phi_2 = \iint_{S_2} (\nabla \times \mathbf{A}_1) \cdot d\mathbf{S}_2. \quad (24.72)$$

Tento vztah dále upravíme pomocí Stokesovy věty (9.51):

$$\Phi_2 = \oint_{C_2} \mathbf{A}_1 \cdot d\mathbf{l}_2. \quad (24.73)$$

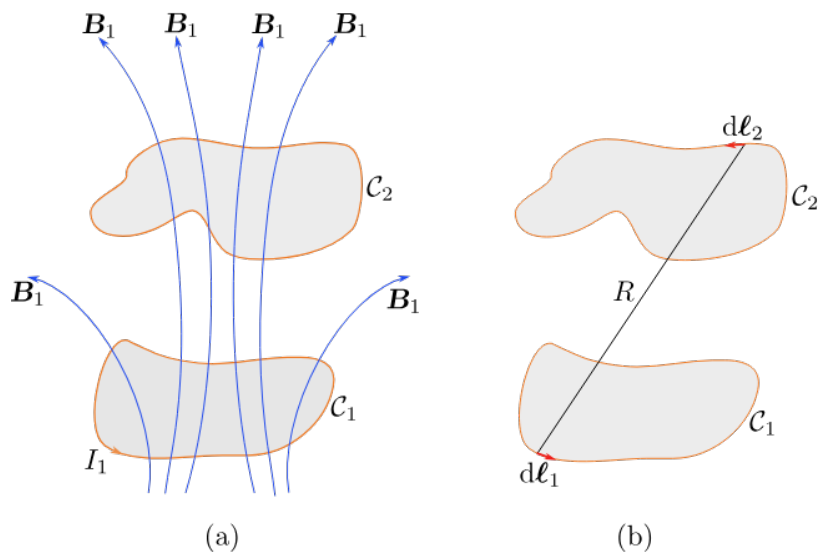
Za magnetický vektorový potenciál \mathbf{A}_1 dosadíme ze vztahu (23.108):

$$\Phi_2 = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint_{C_2} \left(\oint_{C_1} \frac{d\mathbf{l}_1}{R} \right) \cdot d\mathbf{l}_2. \quad (24.74)$$

Odtud porovnáním se vztahem (24.70) dostaneme:

$$M_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2}{R}. \quad (24.75)$$

Tento vztah bývá nazýván **Neumannův vzorec**. Byť se tento vztah pro výpočet moc nehodí, plynou z něho následující dva důležité závěry:



Obrázek 24.14: K výkladu vzájemné indukčnosti proudových smyček C_1 a C_2 .

1. Konstanta M_{21} závisí jen na tvaru, velikosti a vzájemné poloze uvažovaných smyček.
2. Křivkové integrály ve vztahu (24.75) lze zaměnit, čímž i zaměníme role uvažovaných smyček, díky čemuž musí tedy platit:

$$M_{21} = M_{12} = M ,$$

kde konstantu M nazýváme **vzájemná indukčnost smyček** (vodičů) C_1 a C_2 . Pro vzájemnou indukčnost používáme samozřejmě stejnou jednotku jako pro vlastní indukčnost.

Předpokládejme, že proud I_1 protékající smyčkou C_1 se s časem mění. Jeho změna vyvolá změnu magnetického pole B_1 a tím i časovou změnu magnetického indukčního toku Φ_2 druhou smyčkou. V souladu se zákonem o elektromagnetické indukci se tímto bude v druhé smyčce indukovat emn:

$$\mathcal{E}_{i2} = -\frac{d\Phi_2}{dt} = -M\frac{dI_1}{dt} . \quad (24.76)$$

Tedy jakákoliv časová změna proudu I_1 způsobí, že druhou smyčkou bude téct elektrický proud I_2 , aniž by byly smyčky vodivě spojeny⁷.

24.4 Energie magnetického pole

V obvodu reprezentující vodivou smyčku zachyceném na obr. 24.12 dojde po sepnutí spínače k postupnému narůstání elektrického proudu v obvodu, viz obr. 24.13, neboť vnější zdroj emn musí překonávat indukované emn \mathcal{E}_i ve smyčce.

⁷Samozřejmě stejným způsobem je možné změnou proudu I_2 indukovat ve smyčce C_1 elektromotorické napětí \mathcal{E}_{i1} .

Část energie dodaná vnějším zdrojem do obvodu se spotřebuje na vytváření magnetického pole uvažované vodivé smyčky a část energie na zvýšení vnitřní energie rezistoru, tj. na Jouleovo teplo.

Za dobu dt dodá zdroj \mathcal{E} do obvodu energii dW , která se zčásti přemění na energii magnetického pole dW_m a zčásti na Jouleovo teplo dQ_j , viz vztah (22.63):

$$dW = dW_m + dQ_j . \quad (24.77)$$

Pro vyjádření těchto energií použijeme vztah (24.61), který si upravíme do tvaru:

$$\mathcal{E} = RI + L \frac{dI}{dt} , \quad (24.78)$$

který vynásobíme výrazem $I(t)dt$, čímž dostaneme:

$$\mathcal{E}I(t)dt = RI^2(t)dt + LI(t)dI(t) . \quad (24.79)$$

Člen na levé straně této rovnice je energie dW dodaná do obvodu vnějším zdrojem \mathcal{E} za čas dt . První člen na pravé straně rovnice je Jouleovo teplo dQ_j a druhý člen na pravé straně představuje energii potřebnou na zvýšení energie magnetického pole o hodnotu $dW_m = LI(t)dI(t)$. Vyroste-li ve smyčce (obvodu) proud z nulové hodnoty na hodnotu I , vytvoří se magnetické pole o energii:

$$W_m = \int_0^I LI(t)dI(t) = \frac{1}{2}LI^2 . \quad (24.80)$$

Tento vztah vyjadřuje energii magnetického pole vodivé smyčky o vlastní indukčnosti L , kterou prochází proud I .

Využitím vztahu (23.99) a Stokesovy věty (9.51) si můžeme vyjádřit indukční tok pomocí magnetického vektorového potenciálu jako

$$\Phi = \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\ell} . \quad (24.81)$$

S ohledem na vztah (24.58) můžeme psát:

$$\Phi = LI = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\ell} , \quad (24.82)$$

takže si energii magnetického pole (24.80) můžeme vyjádřit vztahem:

$$W_m = \frac{1}{2}I \oint_C \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \frac{1}{2} \oint_C j \Delta S \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \frac{1}{2} \iiint_V (\mathbf{A} \cdot \mathbf{j}) dV . \quad (24.83)$$

$$\begin{aligned} I &= \mathbf{j} \cdot \Delta \mathbf{S}, \\ dV &= \Delta \mathbf{S} \cdot d\boldsymbol{\ell} \end{aligned}$$

Proudovou hustotu v tomto vztahu si vyjádříme pomocí Ampèrova zákona celkového proudu (23.87):

$$W_m = \frac{1}{2\mu_0} \iiint_V \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) dV . \quad (24.84)$$

Pro další úpravu použijeme následující identity:

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) , \quad (24.85)$$

odtud

$$\mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} - \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) . \quad (24.86)$$

Pomocí této identity tedy přepíšeme vztah (24.84):

$$W_m = \frac{1}{2\mu_0} \left[\iiint_V B^2 dV - \iiint_V \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) dV \right] . \quad (24.87)$$

Druhý z integrálů můžeme pomocí Gaussovy věty (12.56) přepsat na integrál plošný:

$$W_m = \frac{1}{2\mu_0} \left[\iiint_V B^2 dV - \oint_S (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{S} \right] . \quad (24.88)$$

Integrál ve vztahu (24.83) je počítán přes objem, ve kterém se nachází proudová hustota. Integrace může být počítána i přes větší objem s ohledem na skutečnost, že kdekoli jinde je $\mathbf{j} = \mathbf{0}$. Protože integrand v prvním integrálu vztahu (24.88) je vždy kladný ($B^2 > 0$), takže se zvětšujícím se objemem přes, který integrujeme, poroste i hodnota tohoto integrálu. Protože energie magnetického pole W_m , kterou dodal vnější zdroj emn, musí být stejná, musí současně klesat hodnota druhého integrálu ve vztahu (24.88), který integrujeme přes plochu uzavírající uvažovaný objem. Provedeme-li integraci přes celý prostor, potom nutně bude příspěvek druhého integrálu roven nule, viz kapitola 20.9.3. Tedy můžeme psát, že

$$W_m = \frac{1}{2\mu_0} \underbrace{\iiint_{\text{Celý prostor}} B^2 dV} . \quad (24.89)$$

Tento výsledek je možné interpretovat způsobem, že energie je **uložena** v magnetickém poli s objemovou hustotou:

$$w_m = \frac{1}{2\mu_0} B^2 . \quad (24.90)$$

Vztah pro objemovou hustotu magnetického pole lze, s ohledem na rovnost $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0$, přepsat do tvaru:

$$w_m = \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} , \quad (24.91)$$

který ve skutečnosti postihuje obecnější případ, tedy i pole v materiálovém prostředí.

Poznamenejme, že vztah (24.83) můžeme interpretovat tak, že energie je uložena v proudovodičích.

24.5 Energie elektromagnetického pole

V kapitole věnované elektrostatickému poli jsme určili práci proti Coulombovým odpuzujícím silám na vytvoření statické distribuce elektrických nábojů, kterou považujeme za energii elektrického pole:

$$W_e = \frac{\varepsilon_0}{2} \underbrace{\iiint_{\text{Celý prostor}} E^2 dV} , \quad (24.92)$$

kde \mathbf{E} je výsledné elektrické pole. V předchozí kapitole jsme určili energii, kterou je třeba dodat vnějším zdrojem emn, aby mohl smyčkou protékat elektrický proud, kterému brání idukované emn.. Tato energie je uložena v magnetickém poli a je dána vztahem:

$$W_m = \frac{1}{2\mu_0} \iiint_{\substack{\text{Celý} \\ \text{prostor}}} B^2 dV, \quad (24.93)$$

kde \mathbf{B} je výsledné magnetické pole.

Odtud pak můžeme vyjádřit celkovou energii elektromagnetického pole jako

$$W_{em} = \frac{1}{2} \iiint_{\substack{\text{Celý} \\ \text{prostor}}} \left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) dV \quad (24.94)$$

Tento vztah můžeme přepsat s ohledem na rovnosti: $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0$ $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}$, jako

$$W_{em} = \frac{1}{2} \iiint_{\substack{\text{Celý} \\ \text{prostor}}} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) dV = \iiint_{\substack{\text{Celý} \\ \text{prostor}}} w_{em} dV, \quad (24.95)$$

takže pro objemovou hustotu elektromagnetického pole dostáváme:

$$w_{em} = \frac{1}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}). \quad (24.96)$$

24.6 Úplná soustava Maxwellových rovnic pro elektromagnetické, kvazistacionární, stacionární a elektrostatické pole

V předchozích částech kapitoly věnované elektromagnetickému poli jsme si ukázali, že elektrické pole nezávisí jen na rozložení elektrických nábojů, ale i na časových změnách magnetického pole, a dále, že magnetické pole závisí nejen na rozložení elektrických proudů, ale také na časových změnách elektrického pole. To nás opravňuje zavést pojem jediného, a to **elektromagnetického pole**. Důsledkem tohoto zobecnění je pak předpověď existence elektromagnetických vln, které jsou dnes ve všech svých vlastnostech podrobně experimentálně i teoreticky prozkoumány.

Vlastnosti makroskopického elektromagnetického pole jsou popsány čtyřmi Maxwellovými rovnicemi, které vyjadřují čtyři obecně platné fyzikální zákony:

Maxwellovy rovnice v obecném tvaru (pro elektromagnetické pole)		
Integrální tvar	Diferenciální tvar	Zákon
$\oiint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = q$	$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$	Gaussův zákon
$\oiint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	Zákon o neexistenci magnetických nábojů
$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$	$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	Faradayův zákon elektromagnetické indukce ⁸
$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I + \iint_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$	$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$	Zobecněný Ampèrov zákon celkového proudu

Maxwellovy rovnice jsou lineární parciální diferenciální rovnice. Skutečnost, že jsou lineární znamená, že dvakrát větší hustoty proudu a náboje znamenají, že budou dvakrát větší i intenzity a indukce polí. A rovněž, že součet řešení je také řešením – jinými slovy, že platí princip superpozice.

V Maxwellových rovnicích se vyskytují čtyři vektory (vektorové funkce) \mathbf{D} , \mathbf{E} , \mathbf{B} a \mathbf{H} . Každý vektor má tři složky, to dává celkem 12 neznámých. Ovšem dané vektory nejsou nezávislé. Svazují je materiálové vztahy, konkrétně v měkkém homogenním izotropním dielektriku a magnetiku platí, že $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$. Takže neznámé jsou vlastně jen dva vektory, ty mají dohromady šest složek. Čili máme soustavu šesti lineárních parciálních diferenciálních rovnic pro šest neznámých. Maxwellovy rovnice obsahují časové derivace, což souvisí s tím, že umožňují po-

⁸Tímto zápisem Faradayova zákona elektromagnetické indukce nebereme v úvahu časovou změnu indukčního toku způsobenou změnou polohy plochy uvažované smyčky (popř. i její velikosti a tvaru).

psat časový vývoj elektrického a magnetického pole.

Maxwellovy rovnice jednoznačně ukazují, že elektrické a magnetické pole od sebe obecně nejde odtrhnout (zvlášť se mohou projevovat jen v konkrétních speciálních situacích) a z tohoto důvodu hovoříme o elektromagnetickém poli.

Hustota proudu \mathbf{j} a hustota náboje ρ jsou v těchto rovnicích „zdrojovými členy“, tj. proudy a náboje budí elektrické a magnetické pole a Maxwellovy rovnice vystihují, jak je budí. Obecně hustota proudu \mathbf{j} a hustota náboje ρ nemusí být pevně zadáné. Často elektrické a magnetické pole naopak ovlivňuje pohyb nábojů (a tedy i proudy). Působení pole na náboje, jak víme, popisuje Lorentzova síla (23.19). Souhrnně můžeme konstatovat: „Náboje a proudy říkají elektromagnetickému poli, jak se má chovat, elektromagnetické pole říká nabitým částicím, jak se mají pohybovat.“

V kap. 20.4 jsme si ukázali, že lze z Gaussova zákona odvodit zákon Coulombův a v kap. 24.2 bylo ukázáno, že ze Zobecněného Ampèrova zákona celkového proudu lze odvodit rovnici kontinuity pro elektrické náboje, která je vyjádřením Zákona zachování elektrického náboje. Ze Zobecněného Ampèrova zákona celkového proudu je možné získat i Biotův-Savartův zákon, který jsme si odvodili pro stacionární magnetické pole, což znamená, že v diferenciálním tvaru vyjadřující Zobecněný Ampèrův zákon celkového proudu považujeme parciální derivaci elektrické indukce za rovnou nulovému vektoru, tj. $\partial \mathbf{D} / \partial t = \mathbf{0}$. Navíc jsme předpokládali bezmateriálové prostředí, čímž dostáváme rovnici (23.87), ze které dostaneme Poissonovu rovnici pro magnetický vektorový potenciál (23.106), jejíž řešení při znalosti prostorové distribuce hustoty proudu je dáno vztahem (23.107), který si připomeneme:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V'} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'. \quad (24.97)$$

Protože platí vztah (23.99) mezi vektorem magnetické indukce a vektorovým potenciálem magnetického pole, tj. $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, tak pomocí řešení (24.97) můžeme psát:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \left(\iiint_{V'} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \right) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V'} \nabla \times \left(\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) dV'. \quad (24.98)$$

V integrandu provádíme rotaci součinu skalární a vektorové funkce, na kterou uplatníme-li identitu (23.31), takže dostáváme:

$$\nabla \times \left(\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = \left(\nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \times \mathbf{j}(\mathbf{r}') + \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \nabla \times \mathbf{j}(\mathbf{r}'). \quad (24.99)$$

Protože operaci rotace provádíme přes nečárkované souřadnice, tak poslední člen je roven nulovému vektoru. Pro zbývající člen (první člen na pravé straně této identity) použijeme identitu (A.26) a využijeme antikomutativnost vektorového součinu, takže dostáváme:

$$\nabla \times \left(\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = \left(\nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \times \mathbf{j}(\mathbf{r}') = -\frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \times \mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \quad (24.100)$$

Tento výsledek uplatníme v rovnosti (24.98), čímž dopějeme k následujícímu vztahu:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V'} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV', \quad (24.101)$$

který reprezentuje Biotův-Savartův zákon, viz vztah (23.29).

Z Maxwellových rovnic však nevyplývá vztah pro Lorentzovu sílu (23.19).

Maxwellovy rovnice pro kvazistacionární magnetické pole

Předpokládejme, že můžeme použít materiálové vztahy $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$, s jejichž pomocí lze přepsat Zobecněný Ampèrův zákon celkového proudu do následujícího tvaru:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{j} + \varepsilon \mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu \mathbf{j} + \varepsilon_r \mu_r \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu \mathbf{j} + \frac{\varepsilon_r \mu_r}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (24.102)$$

kde jsme použili vztah (23.17).

Protože platí, že $\varepsilon_r \mu_r / c^2 \ll 1$, hustota posuvného proudu (posuvný proud) se projevuje až při velmi rychlých změnách elektrického pole, kdy časová derivace $\partial \mathbf{E} / \partial t$ je velká. Při pomalých změnách pole, např. při průmyslových frekvencích 50 až 60 Hz, můžeme tedy posuvný proud zanedbat a použít jen rovnici (23.87).

V případě, že si můžeme dovolit zanedbat posuvný proud, potom mluvíme o tzv. kvazistacionárním přiblížení a elektromagnetické pole vyhovující tomuto přiblížení nazýváme kvazistacionárním.

Maxwellovy rovnice pro kvazistacionární elektromagnetické pole mají tedy následující tvar:

Maxwellovy rovnice pro kvazistacionární elektromagnetické pole		
Integrální tvar	Diferenciální tvar	Zákon
$\oiint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = q$	$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$	Gaussův zákon
$\oiint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	Zákon o neexistenci magnetických nábojů
$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$	$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	Faradayův zákon elektromagnetické indukce
$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I$	$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}$	Ampèrův zákon celkového proudu

Maxwellovy rovnice pro stacionární elektrické a magnetické pole

V případě stacionárních polí všechny makroskopické veličiny jsou explicitně nezávislé na čase, takže v zobecněných Maxwellových rovnicích položíme všechny

časové derivace rovny nule, resp. nulovému vektoru, takže dostáváme:

Maxwellovy rovnice pro stacionární elektrické a magnetické pole		
Integrální tvar	Diferenciální tvar	Zákon
$\oiint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = q$	$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$	Gaussův zákon
$\oiint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	Zákon o neexistenci magnetických nábojů
$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = 0$	$\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$	Konzervativnost elektrického pole
$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\boldsymbol{\ell} = I$	$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}$	Ampèrův zákon celkového proudu

Maxwellovy rovnice pro elektrostatické pole

V případě elektrostatického pole se neprojeví účinky elektrického proudu (elektrické náboje jsou statické), které je zdrojem magnetického pole, takže se nám Maxwellovy rovnice redukují jen na dvě:

Maxwellovy rovnice pro elektrostatické pole		
Integrální tvar	Diferenciální tvar	Zákon
$\oiint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = q$	$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$	Gaussův zákon
$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = 0$	$\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$	Konzervativnost elektrického pole

Příloha A

Užitý matematický aparát

V této kapitole bude uveden matematický aparát, se kterým se můžete setkat během kurzu Fyziky I a samozřejmě nejenom v tomto kurzu.

A.1 Diferenciál funkce jedné proměnné

Derivace $f'(x)$ funkce $y = f(x)$ je definována jako

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} . \quad (\text{A.1})$$

Protože má limita konečnou hodnotu $f'(x)$, můžeme psát, že

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \varepsilon_x , \quad (\text{A.2})$$

přičemž pro $\varepsilon_x(\Delta x)$ platí, že

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varepsilon_x = 0 . \quad (\text{A.3})$$

Δy , resp. $\Delta f(x)$ představuje **přírůstek** funkce $f(x)$ a Δx je **přírůstek** nezávislé proměnné x (viz obr. A.I).

Ze vztahu (A.2) pro **přírůstek** funkce vyplývá, že

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \varepsilon_x \Delta x . \quad (\text{A.4})$$

Nyní můžeme definovat **diferenciál** funkce jedné proměnné $f(x)$ jako

$$dy = f'(x)\Delta x , \quad (\text{A.5})$$

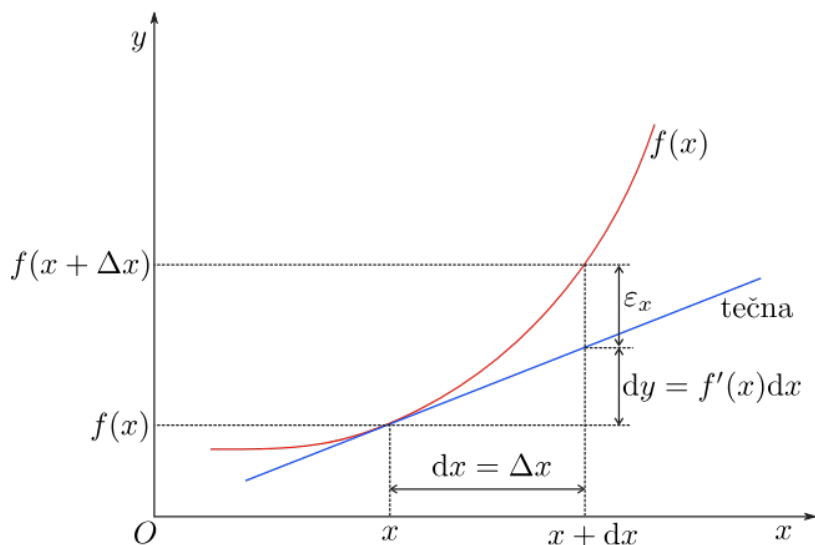
resp.

$$df = f'(x)\Delta x . \quad (\text{A.6})$$

Předpokládejme, že $f(x) = x$, potom $y = x$ a $f'(x) = 1$, takže na základě vztahu (A.5) můžeme psát:

$$dx = f'(x)\Delta x = \Delta x , \quad (\text{A.7})$$

tedy diferenciál nezávislé proměnné x můžeme ztotožnit s **přírůstkem** této proměnné. Odtud je vidět, že dx nemusí být nějaká „nekonečně malá“ veličina, ale



Obrázek A.I: Geometrická interpretace diferenciálu.

může to být libovolné reálné číslo. Z tohoto důvodu můžeme přepsat vztah (A.5) do následujícího tvaru:

$$dy = f'(x)dx . \quad (\text{A.8})$$

Na základě definice diferenciálu (A.5) můžeme výraz (A.4) přepsat jako

$$\Delta y = dy + \varepsilon_x \Delta x . \quad (\text{A.9})$$

Platí-li, že $\Delta x \rightarrow 0$, potom (viz limita (A.3)) platí, že

$$\Delta y = dy . \quad (\text{A.10})$$

V tomto případě, kdy se jedná o nekonečně malý přírůstek nezávisle proměnné x , je pak možné přepsat vztah (A.4) pomocí vztahů (A.7) a (A.10) a limity (A.3) do následujícího tvaru:

$$dy = f'(x)dx , \quad (\text{A.11})$$

odtud

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) , \quad (\text{A.12})$$

tj. v případě infinitezimálního přírůstku $\Delta x \rightarrow 0$ je možné derivaci funkce $f(x)$ vyjádřit jako poměr diferenciálů dy a $dx = \Delta x \rightarrow 0$.

Z aplikačního hlediska však spočívá užitečnost diferenciálu (A.8) právě v tom, že pro „malé“ hodnoty dx vystihuje přírůstek:

$$\Delta y = f(c + dx) - f(c) \quad (\text{A.13})$$

funkce $f(x)$ v okolí bodu c .

Příklad

Nechť $dx = 0,3$, je přírůstek Δy funkce $y = x^2$ mezi body $c = 1$ a $c + dx = 1 + 0,3 = 1,3$ rovný číslu:

$$\Delta y = 1,3^2 - 1^1 = 1,69 - 1 = 0,69$$

a ten je dobře aproximován diferenciálem:

$$\Delta y \approx dy = f'(x)dx = 2x dx = 2 \cdot 1,0 \cdot 3 = 0,60 .$$

A.2 Pravidla pro derivování vektorových funkcí

Jestliže \mathbf{A} a \mathbf{B} jsou diferencovatelné vektorové funkce podle skalární proměnné t a skalární funkce ϕ je diferencovatelná podle skalární proměnné t , potom platí následující vztahy:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \frac{d\mathbf{A}}{dt} + \frac{d\mathbf{B}}{dt} , \quad (\text{A.14})$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \frac{d\mathbf{A}}{dt} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{B}}{dt} , \quad (\text{A.15})$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \frac{d\mathbf{A}}{dt} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \frac{d\mathbf{B}}{dt} , \quad (\text{A.16})$$

$$\frac{d}{dt}(\phi \mathbf{A}) = \frac{d\phi}{dt} \mathbf{A} + \phi \frac{d\mathbf{A}}{dt} . \quad (\text{A.17})$$

$$(\text{A.18})$$

A.3 Parciální derivace

Ve fyzice se často setkáváme s funkcemi více proměnných. Pro takovéto funkce zavádíme **parciální (částečné) derivace** podle jedné z proměnných, přičemž zbývající proměnné považujeme za konstanty. Budeme-li uvažovat např. funkci $f(x, y, z)$, která je funkcí pouze prostorových souřadnic, pak parciální derivaci podle proměnné x definujeme jako

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x} . \quad (\text{A.19})$$

Zderivujeme-li funkci $\partial f / \partial x$ ještě jednou podle proměnné x , pak dostaneme druhou parciální derivaci (druhého stupně) funkce f , tj.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) .$$

Provedeme-li následně po derivování podle proměnné x derivaci např. podle proměnné y , pak tuto skutečnost zapíšeme následujícím způsobem:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) .$$

Pro parciální derivace vyšších řádů platí tzv. **Schwarzova věta** o záměně pořadí derivování. Nechť v nějakém okolí $U(A)$ bodu A existují parciální derivace:

$$\frac{\partial f}{\partial x} , \quad \frac{\partial f}{\partial y} , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} ,$$

potom existuje i smíšená derivace:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}$$

a platí, že

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} .$$

Příklad:

Uvažujme funkci:

$$f(x, y, z, t) = 3x^2yt - xytz^3 + \sin(yt).$$

Potom

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6xyt - yzt^3 ,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6yt ,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} = 6xy - 3yzt^2 ,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2t - xzt^3 + t \cos(yt) .$$

Jestliže $\mathbf{A} = \mathbf{A}(x, y, z)$ je vektorová funkce, pak parciální derivace této funkce např. podle proměnné x je definována následujícím způsobem

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\mathbf{A}(x + \Delta x, y, z) - \mathbf{A}(x, y, z)}{\Delta x} , \quad (\text{A.20})$$

pakliže existuje tato limita.

Obdobně bychom definovali parciální derivace podle proměnných y a z . Vyšší derivace jsou pak určeny následujícím způsobem

$$\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} \right) , \quad \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} \right) , \quad \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} \right) \quad \text{apod.}$$

A.4 Totální diferenciál

Přírůstek funkce více proměnných, zvolme např. x, y, z , bude dán vztahem:

$$\Delta f = f(\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}) - f(\mathbf{r}) = f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - f(x, y, z) . \quad (\text{A.21})$$

Z analogie s diferenciálem funkce jedné proměnné (A.8), můžeme zavést tzv. **totální (úplný) diferenciál** funkce $f(x, y, z)$ následujícím způsobem¹:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz . \quad (\text{A.22})$$

¹Opět platí, že přírůstky nezávislých proměnných x, y, z jsou totožné s jejich diferenciály, jak lze lehce ověřit volbou $f(x, y, z) = x, f(x, y, z) = y, f(x, y, z) = z$.

Dá se ukázat, že pro přírůstek funkce (A.21) platí:

$$\Delta f = df + \varepsilon_x \Delta x + \varepsilon_y \Delta y + \varepsilon_z \Delta z, \quad (\text{A.23})$$

přičemž platí, že

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varepsilon_x = 0, \quad \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \varepsilon_y = 0, \quad \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \varepsilon_z = 0. \quad (\text{A.24})$$

Bude-li platit, že $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta y \rightarrow 0$, $\Delta z \rightarrow 0$, potom na základě limity (A.24) ze vztahu (A.23) vyplývá, že

$$\Delta f = df. \quad (\text{A.25})$$

Napišme **Taylorův rozvoj** funkce více proměnných $f(\mathbf{r}) \equiv f(x, y, z)$ do prvního řádu:

$$f(\mathbf{r} + d\mathbf{r}) = f(x + dx, y + dy, z + dz) = f(x, y, z) + \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz + \dots. \quad (\text{A.26})$$

Odtud dostáváme, že

$$\Delta f = f(\mathbf{r} + d\mathbf{r}) - f(\mathbf{r}) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz + \dots = df + \text{členy vyšších řádů}. \quad (\text{A.27})$$

Takže úplný diferenciál představuje hlavní hodnotu Taylorova rozvoje funkce f .

Pozn.:

Často se ve fyzice setkáváme s funkcemi $f(x, y, z, t)$, potom totální diferenciál je dán jako

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial t} dt. \quad (\text{A.28})$$

Pozn.:

Ve fyzice zpravidla předpokládáme, že přírůstky, resp. diferenciály, nezávislých proměnných jsou infinitezimální, tj. $dx = \Delta x \rightarrow 0$, $dy = \Delta y \rightarrow 0$, $dz = \Delta z \rightarrow 0$, $dt = \Delta t \rightarrow 0$.

A.5 Řešení obyčejných lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty

S obyčejnými lineárními diferenciálními rovnicemi druhého řádu s konstantními koeficienty se poměrně často setkáváme ve fyzice. Rovnici zmiňovaného typu můžeme zapsat jako²

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + a \frac{dy}{dx} + by = f(x), \quad (\text{A.29})$$

resp.

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + a \frac{dy}{dt} + by = f(t), \quad (\text{A.30})$$

kde a , b jsou konstanty. Rovnice (A.29), resp. (A.30) představuje nehomogenní diferenciální rovnici. Dále se budeme zabývat jen rovnicí (A.29), jelikož příslušné závěry jsou stejné i pro rovnici (A.30), jen provedeme záměnu proměnných x za t .

²Prostorové derivace je možné pro jednoduchost značit pomocí čárek, např. $d^2 y/dx^2 \equiv y''$ a časové derivace pomocí teček, např. $d^2 y/dt^2 \equiv \ddot{y}$.

A.5.1 Lineární homogenní diferenciální rovnice

Zvláštní třídu diferenciálních rovnic představují rovnice homogenní ($f(x) = 0$), tj.

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + a \frac{dy}{dx} + by = 0. \quad (\text{A.31})$$

Nyní budeme uvažovat homogenní diferenciální rovnici (A.31). Takovéto rovnice mají následující důležité vlastnosti:

1. Jestliže $y_1(x)$ je řešením rovnice (A.31), pak $C_1 y_1(x)$, kde C_1 je konstanta, je také jejím řešením.
2. Jestliže $y_1(x)$ a $y_2(x)$ jsou řešením rovnice (A.31), pak $y_1(x) + y_2(x)$ je také jejím řešením (princip **superpozice** - touto vlastností se vyznačují jen lineární diferenciální rovnice.).
3. Jestliže $y_1(x)$ a $y_2(x)$ jsou lineárně nezávislá řešení rovnice (A.31), pak **obecnému** řešení této rovnice odpovídá: $C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ (obecné řešení vždy obsahuje dvě libovolné konstanty).

Připomeňme, že funkce $y_1(x)$ a $y_2(x)$ jsou **lineárně nezávislé**, když je rovnice

$$\alpha y_1(x) + \beta y_2(x) \equiv 0 \quad (\text{A.32})$$

splněna jen když $\alpha = \beta = 0$. Jestliže je rovnice (A.32) splněna pro konstanty α a β , kdy alespoň jedna je rozdílná od nuly, potom funkce $y_1(x)$ a $y_2(x)$ jsou **lineárně závislé**.

Obecnou podmínkou pro to, aby množina funkcí $y_1(x), y_2(x), \dots$ byla lineárně závislá, je že **wronskián** (Wronskiho determinant) W byl identicky roven nule, tj.

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & y_3' & \dots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' & \dots & y_n'' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & y_3^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}, \quad (\text{A.33})$$

kde y^n představuje n -tou derivaci funkce y podle x .

Při popisu řady fyzikálních problémů se setkáváme s principem superpozice. Např. způsobí-li síla \mathbf{F}_1 kmit o výchylce x_1 a síla \mathbf{F}_2 kmit o výchylce x_2 , potom výsledná síla $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$ způsobí výchylku $x_1 + x_2$. Je-li princip superpozice experimentálně ověřen, potom musí příslušné jevy být popsány lineárními diferenciálními rovnicemi.

Výše zmíněná 1. a 2. vlastnost se dá ověřit přímým dosazením do rovnice (A.31), kdežto bod 3. jen říká, co jest obecným řešením této rovnice³. Dále budeme hledat řešení rovnice (A.31) ve tvaru:

$$y = \exp(\lambda x), \quad (\text{A.34})$$

³Zmíněné vlastnosti jsou použitelné jen pro rovnici (A.31) a nikoliv pro rovnici (A.32).

kde λ je konstanta.

Takže dostáváme, že

$$\frac{dy}{dx} = \lambda \exp(\lambda x), \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \lambda^2 \exp(\lambda x). \quad (\text{A.35})$$

Dosazením výrazů (A.34) a (A.35) do rovnice (A.31) dostaneme:

$$\lambda^2 \exp(\lambda x) + a\lambda \exp(\lambda x) + b \exp(\lambda x) = 0. \quad (\text{A.36})$$

Vynásobením rovnice (A.36) výrazem $\exp(-\lambda x)$ obdržíme algebraickou kvadratickou rovnici, která se nazývá **charakteristická** rovnice, tj.

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0. \quad (\text{A.37})$$

Řešení charakteristické rovnice můžeme napsat jako

$$\lambda_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4b}. \quad (\text{A.38})$$

Nejdříve předpokládejme, že dva kořeny λ_1 a λ_2 nejsou identické a tudíž řešením je (na základě principu superpozice) funkce:

$$y(x) = y_1(x) + y_2(x) = \exp(\lambda_1 x) + \exp(\lambda_2 x). \quad (\text{A.39})$$

Pro wronskián těchto dvou řešení platí:

$$W = \begin{vmatrix} \exp(\lambda_1 x) & \exp(\lambda_2 x) \\ \lambda_1 \exp(\lambda_1 x) & \lambda_2 \exp(\lambda_2 x) \end{vmatrix} = \lambda_2 \exp[(\lambda_1 + \lambda_2)x] - \lambda_1 \exp[(\lambda_1 + \lambda_2)x] \neq 0, \quad (\text{A.40})$$

protože jsme předpokládali, že λ_1 a λ_2 nejsou identické, takže funkce, resp. řešení, $\exp(\lambda_1 x)$ a $\exp(\lambda_2 x)$ jsou lineárně nezávislé.

Takže obecným řešením je:

$$y(x) = C_1 \exp(\lambda_1 x) + C_2 \exp(\lambda_2 x), \quad \lambda_1 \neq \lambda_2, \quad (\text{A.41})$$

kde C_1 a C_2 nazýváme integračními konstantami a určíme je z okrajových, resp. počátečních⁴, podmínek. Určením integračních konstant přejde obecné řešení v řešení konkrétní.

Jestliže $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, pak se můžeme dosazením přesvědčit, že $x \exp(\lambda x)$ je také řešením rovnice (A.31). Protože $\exp(\lambda x)$ a $x \exp(\lambda x)$ jsou lineárně nezávislé, potom pro stejné kořeny charakteristické rovnice můžeme napsat následující obecné řešení:

$$y(x) = C_1 \exp(\lambda x) + C_2 x \exp(\lambda x), \quad \lambda_1 = \lambda_2 \equiv \lambda. \quad (\text{A.42})$$

Příklad 1.5.1

Řešte rovnici:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 3y = 0. \quad (\text{A.43})$$

⁴V případě, že hledaná funkce bude závislá na čase.

Řešení:

Charakteristická rovnice:

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda - 3)(\lambda + 1) = 0 . \quad (\text{A.44})$$

Kořeny tedy jsou:

$$\lambda_1 = 3 , \quad \lambda_2 = -1 . \quad (\text{A.45})$$

Obecné řešení bude mít tvar:

$$y(x) = C_1 \exp(3x) + C_2 \exp(-x) . \quad (\text{A.46})$$

Příklad 1.5.2

Řešte rovnici:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 4 \frac{dy}{dx} + 4y = 0 . \quad (\text{A.47})$$

Řešení:

Charakteristická rovnice:

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = (\lambda + 2)^2 = 0 . \quad (\text{A.48})$$

Kořeny jsou v tomto případě stejné, tj. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = -2$. Obecné řešení můžeme napsat jako

$$y(x) = C_1 \exp(-2x) + C_2 x \exp(-2x) . \quad (\text{A.49})$$

Nyní budeme předpokládat, že kořeny charakteristické rovnice jsou komplexní, tj.

$$\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\beta , \quad (\text{A.50})$$

kde α i β jsou reálné.

Využijeme-li Eulerova vztahu, pak můžeme psát, že

$$\exp(\lambda_1 x) = \exp(\alpha x) \exp(j\beta x) = \exp(\alpha x) (\cos \beta x + j \sin \beta x) , \quad (\text{A.51})$$

$$\exp(\lambda_2 x) = \exp(\alpha x) \exp(-j\beta x) = \exp(\alpha x) (\cos \beta x - j \sin \beta x) . \quad (\text{A.52})$$

Použitím rovností (A.51) a (A.52) můžeme po úpravě obecné řešení napsat v následujícím tvaru:

$$y(x) = C_1 \exp(\lambda_1 x) + C_2 \exp(\lambda_2 x) = \exp(\alpha x) [(C_1 + C_2) \cos \beta x + j(C_1 - C_2) \sin \beta x] . \quad (\text{A.53})$$

I v tomto případě jsou C_1 a C_2 libovolné, avšak navíc mohou být **komplexní**. Zavedeme předpoklad, že jsou tyto konstanty komplexně sdružené. Potom následujícími kombinacemi:

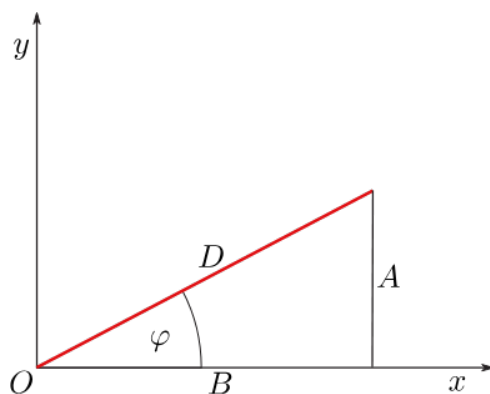
$$A = C_1 + C_2; , \quad (\text{A.54})$$

$$B = j(C_1 - C_2); , \quad (\text{A.55})$$

získáme dvojici reálných konstant, pomocí kterých můžeme upravit tvar obecného řešení (A.53):

$$y(x) = \exp(\alpha x)(A \cos \beta x + B \sin \beta x) , \quad (\text{A.56})$$

kde A a B nazýváme integrační konstanty, které určíme z okrajových, resp. počátečních, podmínek. Zavedeme následující konstantu $D = \sqrt{A^2 + B^2}$, kterou vynásobíme a podělíme obecné řešení (A.56):



Obrázek A.II: Vztah mezi konstantami.

$$y(x) = D \exp(\alpha x) \left(\frac{A}{D} \cos \beta x + \frac{B}{D} \sin \beta x \right) . \quad (\text{A.57})$$

Nyní definujme úhel φ , viz obr. A.II, takový, že

$$\sin \varphi = \frac{A}{D} , \quad \cos \varphi = \frac{B}{D} , \quad \tan \varphi = \frac{A}{B} . \quad (\text{A.58})$$

Tímto můžeme obecné řešení (A.57) upravit do tvaru:

$$y(x) = D \exp(\alpha x)(\sin \varphi \cos \beta x + \cos \varphi \sin \beta x) = D \exp(\alpha x) \sin(\beta x + \varphi) , \quad (\text{A.59})$$

kde konstanty D a φ rovněž určíme z okrajových, resp. počátečních, podmínek.

Příklad 1.5.3

Rešte rovnici:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 2 \frac{dy}{dx} + 4y = 0 . \quad (\text{A.60})$$

Řešení:

Charakteristická rovnice

$$\lambda^2 + 2\lambda + 4 = 0 . \quad (\text{A.61})$$

Kořeny tedy jsou:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 16}}{2} = -1 \pm j\sqrt{3} . \quad (\text{A.62})$$

Obecné řešení bude mít tvar:

$$y(x) = \exp(-x)(A \cos \sqrt{3}x + B \sin \sqrt{3}x) \quad (\text{A.63})$$

neboli

$$y(x) = D \exp(-x) \sin(\sqrt{3}x + \varphi) . \quad (\text{A.64})$$

A.5.2 Lineární nehomogenní diferenciální rovnice

Budeme řešit rovnici (A.29).

Nechť $y(x) = u(x)$ představuje obecné řešení homogenní rovnice (A.31) a nechť $y(x) = v(x)$ je **jakékoliv** řešení rovnice (A.29). Pak řešení $y(x) = u(x) + v(x)$ je řešením rovnice (A.29), protože

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a \frac{dy}{dx} + by = \underbrace{\left(\frac{d^2u}{dx^2} + a \frac{du}{dx} + bu \right)}_{=0} + \left(\frac{d^2v}{dx^2} + a \frac{dv}{dx} + bv \right) = 0 + f(x) . \quad (\text{A.65})$$

Protože řešení $u(x)$ obsahuje dvě libovolné konstanty C_1 a C_2 , potom kombinace $u(x) + v(x)$ vyhovuje všem požadavkům obecného řešení rovnice (A.31). Funkce $u(x)$ představuje **komplementární (doplňkové)** řešení a $v(x)$ **partikulární (částecné)** řešení rovnice (A.29).

Obecná metoda nalezení řešení $u(x)$ byla popsána v části věnované homogenní diferenciální rovnici, takže zbývá „jen“ nalézt partikulární řešení, které představuje jakékoliv řešení rovnice:

$$\frac{d^2v}{dx^2} + a \frac{dv}{dx} + bv = f(x) , \quad (\text{A.66})$$

Často se dá ze struktury rovnice jedno partikulární řešení uhodnout.

Řešení $y(x) = u(x) + v(x)$ tedy představuje obecné řešení nehomogenní rovnice (A.29).

Příklad 1.5.4

Řešte rovnici:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5 \frac{dy}{dx} + 6y = x^2 + 2x . \quad (\text{A.67})$$

Řešení:

Nejprve budeme hledat komplementární řešení, které představuje obecné řešení homogenní rovnice:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} + 6y = 0; . \quad (\text{A.68})$$

Odpovídající charakteristická rovnice má tvar:

$$\lambda^2 + 5\lambda + 6 = (\lambda + 3)(\lambda + 2) = 0 . \quad (\text{A.69})$$

Kořeny tedy jsou:

$$\lambda_1 = -3 , \quad \lambda_2 = -2 . \quad (\text{A.70})$$

Komplementární řešení bude mít tvar:

$$y(x) = C_1 \exp(-3x) + C_2 \exp(-2x) . \quad (\text{A.71})$$

Protože pravá strana řešené rovnice (A.67) představuje polynom druhého řádu, můžeme hledat partikulární řešení ve tvaru:

$$v(x) = Ax^2 + Bx + C . \quad (\text{A.72})$$

Potom

$$\frac{dv}{dx} = 2Ax + B , \quad (\text{A.73})$$

$$\frac{d^2v}{dx^2} = 2A . \quad (\text{A.74})$$

Dosazením výrazů (A.72), (A.73) a (A.74) do rovnice (A.67) dostaneme:

$$2A + 5(2Ax + B) + 6(Ax^2 + Bx + C) = x^2 + 2x , \quad (\text{A.75})$$

po úpravě obdržíme:

$$(6A)x^2 + (10A + 6B)x + (2A + 5B + 6C) = x^2 + 2x . \quad (\text{A.76})$$

Porovnáním koeficientů u stejných mocnin na levé a pravé straně rovnice (A.76) obdržíme následující soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} 6A &= 1 \\ 10A + 6B &= 2 \\ 2A + 5B + 6C &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.77})$$

Řešením této soustavy dostaneme, že

$$A = \frac{1}{6} , \quad B = \frac{1}{18} , \quad C = -\frac{11}{108} . \quad (\text{A.78})$$

Dosazením konstant (A.78) do vztahu (A.72) získáme partikulární řešení

$$v(x) = \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{18}x - \frac{11}{108} = \frac{18x^2 + 6x - 11}{108} . \quad (\text{A.79})$$

Obecné řešení rovnice (A.67) je pak dáno součtem komplementárního řešení (A.71) a partikulárního řešení (A.79), tedy

$$y(x) = C_1 \exp(-3x) + C_2 \exp(-2x) + \frac{18x^2 + 6x - 11}{108} . \quad (\text{A.80})$$

Příklad 1.5.5

Řešte rovnici:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = 3x \cos x . \quad (\text{A.81})$$

Řešení:

Nejprve budeme hledat komplementární řešení, které představuje obecné řešení homogenní rovnice:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = 0 . \quad (\text{A.82})$$

Odpovídající charakteristická rovnice má tvar:

$$\lambda^2 + 4 = (\lambda + j2)(\lambda - j2) = 0 . \quad (\text{A.83})$$

Kořeny tedy jsou:

$$\lambda_1 = \alpha + j\beta = 0 + j2 , \quad \lambda_2 = \alpha - j\beta = 0 - j2 , \quad (\text{A.84})$$

takže

$$\alpha = 0 , \quad \beta = 2 . \quad (\text{A.85})$$

Komplementární řešení bude mít tvar

$$y(x) = \exp(\alpha x)(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x . \quad (\text{A.86})$$

Při hledání partikulárního řešení vyjdeme ze skutečnosti, že derivováním pravé strany rovnice (A.81) $x \cos x$ dostaneme následující rovnice:

$$x \cos x , \quad x \sin x , \quad \cos x , \quad \sin x . \quad (\text{A.87})$$

Jelikož jsou tyto funkce lineárně nezávislé, můžeme vyjádřit partikulární řešení jako

$$v(x) = Ax \cos x + Bx \sin x + C \cos x + D \sin x , \quad (\text{A.88})$$

$$\frac{dv(x)}{dx} = A(\cos x - x \sin x) + B(\sin x + x \cos x) - C \cos x + D \sin x , \quad (\text{A.89})$$

$$\frac{d^2v(x)}{dx^2} = A(2 \sin x + x \cos x) + B(2 \cos x - x \sin x) - C \cos x - D \sin x . \quad (\text{A.90})$$

Dosazením výrazů (A.88), (A.89) a (A.90) do rovnice (A.81) po úpravě dostaneme:

$$(3D - 2A) \sin x + (2B + 3C) \cos x + 3(A - 1)x \cos x + (3B)x \sin x = 0 . \quad (\text{A.91})$$

Koeficienty u jednotlivých členů se musí rovnat nule (vlastně se opět jedná o metodu porovnávání koeficientů u stejných členů), takže obdržíme:

$$3D = 2A , \quad 2B = -3C , \quad A = 1 , \quad 3B = 0 \quad (\text{A.92})$$

odtud pak obdržíme

$$A = 1 , \quad B = 0 , \quad C = 0 , \quad D = \frac{2}{3} . \quad (\text{A.93})$$

Pak pro partikulární řešení dostáváme:

$$v(x) = x \cos x + \frac{2}{3} \sin x . \quad (\text{A.94})$$

Obecné řešení rovnice (A.81) je pak dáno součtem komplementárního řešení (A.86) a partikulárního řešení (A.94), tedy

$$y(x) = C_1 \sin 2x + C_2 \cos -2x + x \cos x + \frac{2}{3} \sin x . \quad (\text{A.95})$$

A.6 Einsteinovo sumační pravidlo

Pro úspornost a přehlednost někdy používáme ve vektorovém a tenzorovém počtu Einsteinovo sumační pravidlo, které říká, že se sčítá přes index, jenž se objevuje ve výrazu dvakrát, aniž znak pro sčítání (sumaci) explicitně vypisujeme.

Např.:

$$\sum_{i=1}^3 a_i b_i \equiv a_i b_i$$

nebo

$$\sum_{i=1}^3 a_i b_{ij} \equiv a_i b_{ij} .$$

A.7 Vektorová analýza

Vektorovou funkci jedné proměnné můžeme zapsat následujícím způsobem

$$\mathbf{F}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} . \quad (\text{A.96})$$

Vektorové pole definujeme jako $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$, což můžeme rozepsat jako

$$\mathbf{F} = F_x(x, y, z)\mathbf{i} + F_y(x, y, z)\mathbf{j} + F_z(x, y, z)\mathbf{k} . \quad (\text{A.97})$$

Ze vztahu (A.97) vidíme, že jednotlivé složky jsou funkcemi souřadnic x , y a z . Někdy vektorové pole nazýváme zkráceně jen vektorem. Toto označení odráží fakt, že když dosadíme souřadnice bodu do vektorové funkce, tak dostaneme vektor!

Nabla operátor ∇ je dán v kartézských souřadnicích následujícím vztahem:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k} . \quad (\text{A.98})$$

Někdy můžeme místo ∇ také psát:

$$\nabla \equiv \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} . \quad (\text{A.99})$$

Nabla operátor ∇ představuje symbolický vektor (vektorový operátor), který sám o sobě **nemá** význam.

Pomocí nabla operátoru je možné vyjádřit následující tři operace:

$$\nabla f \equiv \text{grad } f \quad - \text{ gradient ,}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} \equiv \text{div } \mathbf{F} \quad - \text{ divergence ,}$$

$$\nabla \times \mathbf{F} \equiv \text{rot } \mathbf{F} \quad - \text{ rotace ,}$$

kde f je skalární funkce a \mathbf{F} je vektorová funkce.

Výše uvedeným operacím se budeme věnovat v následujících kapitolách.

A.7.1 Gradient

Dříve, než přikročíme k vysvětlení gradientu funkce, budeme se zabývat funkcí pouze jedné proměnné, $f(x)$. Derivace této funkce df/dx nám říká, jak rychle se funkce $f(x)$ mění, když změníme její argument (proměnnou) o malou hodnotu dx , tj.

$$df = \left(\frac{df}{dx} \right) dx . \quad (\text{A.100})$$

Jinými slovy můžeme říct, že změníme-li x o hodnotu dx , pak funkce $f(x)$ se změní o hodnotu df . Derivace nám v tomto případě slouží jako jakýsi činitel úměrnosti. Takže, bude-li se funkce $f(x)$ měnit pomalu s proměnnou x , pak i derivace bude odpovídajícím způsobem malá. Naopak, bude-li se funkce $f(x)$ měnit rychle v závislosti na proměnné x , potom i derivace této funkce bude náležitě velká.

Z geometrického hlediska nám derivace df/dx určuje sklon (strmost) grafu funkce $f(x)$ vzhledem k ose x .

Budeme-li nyní předpokládat skalární funkci tří proměnných $f(x, y, z)$. Pro snadnější představu budeme předpokládat, že funkce $f(x, y, z)$ představuje funkci teploty, která nám určuje teplotu v každém bodě uvažované oblasti prostoru, např. místnosti.

Chceme-li určit, jak se změní teplota, jestliže se posuneme o malou vzdálenost z daného bodu, pak je situace, na rozdíl od funkce jedné proměnné, výrazně složitější, protože záleží na směru v jakém se posuneme. Budeme-li se posouvat (přesněji nějaká teplotní sonda) svisle vzhůru, potom pravděpodobně bude teplota nejvíce narůstat, budeme-li se pro změnu posouvat ve směru horizontálním, pak se teplota nebude téměř měnit.

Pro určení přírůstku (totálního diferenciálu) můžeme psát, že

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) dy + \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) dz . \quad (\text{A.101})$$

Výraz (A.101) nám říká, jak se změní teplota, když změníme proměnné x, y, z o infinitezimální hodnoty dx, dy, dz .

Na základě pravidla pro skalární součin můžeme totální diferenciál (přírůstek) (A.101) vyjádřit jako

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k} \right) \cdot (dx \mathbf{i} + dy \mathbf{j} + dz \mathbf{k}) = (\nabla f) \cdot d\mathbf{r} , \quad (\text{A.102})$$

kde

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} dx \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} dy \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} dz \mathbf{k} \quad (\text{A.103})$$

je tzv. **gradient** funkce f pro kartézské souřadnice. Gradient funkce (obecně) ∇f je vektorová funkce. Rovnice (A.102) je jakousi třídimenziální analogií rovnice (A.100).

Vzhledem k tomu, že gradient skalární funkce představuje funkci vektorovou, pak dosazením do argumentu gradientu funkce dostaneme vektor neboli můžeme říci, že gradient funkce má v daném bodě, stejně jako vektor, svoji velikost a směr. Pro vyjádření geometrického významu gradientu přepíšeme skalární součin (A.102) do tvaru

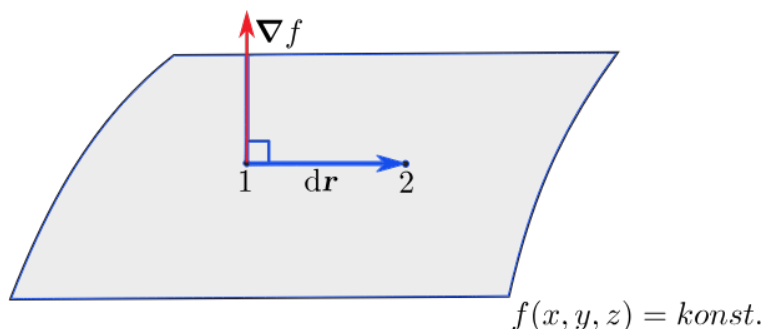
$$df = (\nabla f) \cdot d\mathbf{r} = |\nabla f| |d\mathbf{r}| \cos \alpha, \quad (\text{A.104})$$

kde α je úhel, který svírají v daném místě $|\nabla f|$ a $|d\mathbf{r}|$. Dále předpokládejme, že velikost $|d\mathbf{r}|$ je konstantní. Budeme hledat, pro který směr (tj. úhle α), dojde k největší změně funkce $f(x, y, z)$. Ze vztahu (A.104) je zřejmé, přírůstek df je největší, jestliže se posuneme ve směru ∇f ($\alpha = 0$).

Všimněme si, že z výrazu (A.104) vyplývá skutečnost, že maximální pokles dané funkce nastává v opačném směru než je směr maximálního růstu.

Je-li $\nabla f = \mathbf{0}$ v bodě $[x, y, z]$, pak $df = 0$ pro malé odchylky od tohoto bodu. Tento bod pak představuje tzv. **stacionární bod** funkce $f(x, y, z)$.

Uvažujme nyní plochu, která je tvořena body, pro něž funkce f nabývá stejné



Obrázek A.III: Posunutí z bodu 1 do bodu 2 v rámci jedné hladiny.

(konstantní) hodnoty. Tuto plochu nazýváme **hladina**⁵ funkce f a můžeme ji formálně vyjádřit jako $f(x, y, z) = konst.$. Na této ploše si vyznačíme dva blízké body 1 a 2. Změna polohového vektoru \mathbf{r} při přesunu z bodu 1 do bodu 2 se rovná $d\mathbf{r}$, viz obr. A.III. Vzhledem k tomu, že body 1 a 2 leží na ploše $f(x, y, z) = konst.$ musí být přírůstek funkce (totální diferenciál) $df = 0$. Uplatníme-li tuto skutečnost, pak na základě vztahu (A.103) můžeme psát

$$df = 0 = (\nabla f) \cdot d\mathbf{r}. \quad (\text{A.105})$$

Vzhledem k tomu, že skalární součin v rovnosti (A.105) se rovná nule, je v místě bodu 1 vektor ∇f kolmý na vektor $d\mathbf{r}$. Jelikož vektor $d\mathbf{r}$ leží na ploše, je pak vektor ∇f v místě bodu 1 kolmý i na tuto plochu.

⁵V konkrétních případech mají hladiny i své speciální názvy, jako např. ekvipotenciální plochy, izobary, izotermy atd.

Příklad 1.7.1

Uvažujme teplotní pole $t(x, y, z) = x^2yz^3 + yz + 2x$. Určete gradient této funkce a směr, ve kterém z bodu $P = [1, 2, 1]$ naměříme největší změnu teploty.

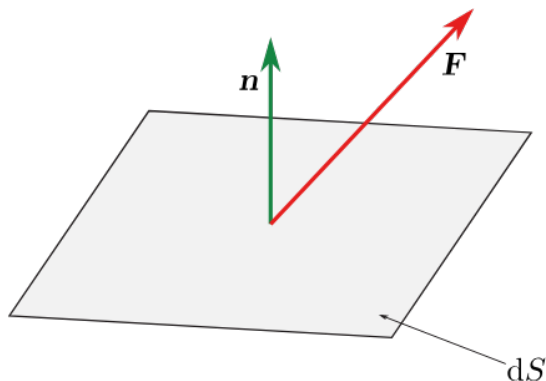
Řešení:

Gradient funkce t vede na následující vektorovou funkci

$$\nabla t = \frac{\partial t}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial t}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial t}{\partial z} \mathbf{k} = (2xyz^3 + 2) \mathbf{i} + (x^2z^3 + z) \mathbf{j} + (3x^2yz^2 + y) \mathbf{k}.$$

Dosadíme souřadnice bodu P do vektorové funkce a dostaneme vektor mající směr maximální změny vyšetřované funkce z uvažovaného bodu

$$6\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 8\mathbf{k}.$$

A.7.2 Divergence

Obrázek A.IV: Tok vektoru \mathbf{F} elementem plochy.

Tok $d\Psi$ vektoru \mathbf{F} elementem plochy dS , viz obr. A.IV, je možné vyjádřit jako

$$d\Psi = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \mathbf{n} dS = F_n dS, \quad (\text{A.106})$$

kde \mathbf{n} je vnější jednotkový normálový vektor uvažované plochy a F_n je složka vektoru \mathbf{F} ve směru normálového vektoru. Abychom vyjádřili skutečnost, že vektor \mathbf{F} a uvažovaná plocha mohou být vůči sobě libovolně orientovány, zavádíme vektorový element plochy $d\mathbf{S} = \mathbf{n} dS$. To, že skalárnímu součinu příslušné vektorové veličiny a vektorového elementu říkáme tok, vychází z analogie z mechaniky kapalin, kde tok kapaliny elementární plochou je dán výrazem $d\Psi = \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}$, kde \mathbf{v} představuje rychlost pohybu částice uvažované kapaliny (rychlost proudění). Tok kapaliny vyjadřuje množství kapaliny, která proteče za jednotku času uvažovanou plochou.

Uvažujme elementární krychli, viz obr. A.V, o objemu $dV = dxdydz$. Vyjádříme si tok vektoru \mathbf{F} , který je umístěn do středu elementární krychle, jejími stěnami. Pro tento účel si označíme jednotlivé stěny (elementární plochy) krychle následujícím způsobem:

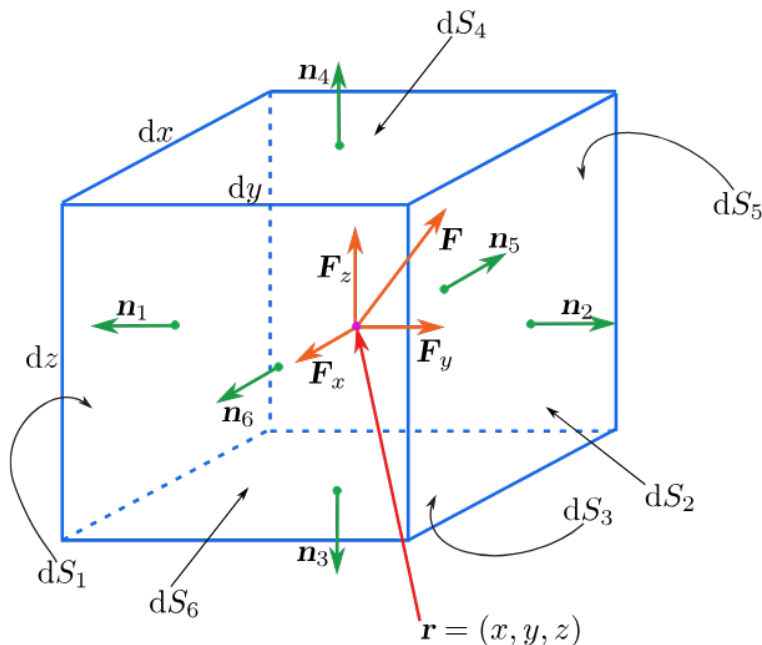
$$dS_1 = dS_2 = dxdz, \quad (\text{A.107})$$

$$dS_1 = dS_2 = dxdz, \quad (\text{A.108})$$

$$dS_1 = dS_2 = dxdz. \quad (\text{A.109})$$

Příslušné jednotkové normálové vektory uvažovaných ploch označíme: $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3, \mathbf{n}_4, \mathbf{n}_5, \mathbf{n}_6$.

Pro elementární tok plochou dS_1 , viz obrázek A.VI, můžeme psát, že



Obrázek A.V: Tok vektoru \mathbf{F} z elementárního objemu $dV = dxdydz$.

$$d\Psi_1 = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}_1 = - \left(F_y - \frac{\partial F_y}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) dS_1 = \left(-F_y + \frac{\partial F_y}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) dxdz. \quad (\text{A.110})$$

V rovnosti (A.110) byla zohledněna skutečnost, že $\mathbf{F}_y \updownarrow \mathbf{n}_1$, přičemž hodnota složky: F_y v místě jejího průtoku plochou dS_1 byla určena pomocí Taylorova rozvoje, z kterého vyplývá, že

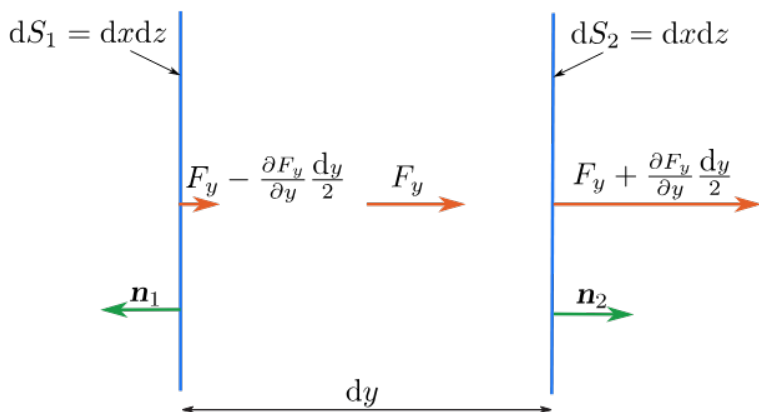
$$F_y \left(x, y - \frac{dy}{2}, z \right) = F_y(x, y, z) - \frac{\partial F_y}{\partial y} \frac{dy}{2}. \quad (\text{A.111})$$

Dále pro elementární tok plochou dS_2 (viz vztah A.107) můžeme psát, že

$$d\Psi_2 = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}_2 = \left(F_y + \frac{\partial F_y}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) dS_2 = \left(F_y + \frac{\partial F_y}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) dxdz. \quad (\text{A.112})$$

Ve vztahu (A.112) bylo pro určení složky F_y použito Taylorova rozvoje:

$$F_y \left(x, y + \frac{dy}{2}, z \right) = F_y(x, y, z) + \frac{\partial F_y}{\partial y} \frac{dy}{2} \quad (\text{A.113})$$



Obrázek A.VI: Tok složky F_y plochami dS_1 a dS_2 (čelní pohled na elementární krychli).

a dále bylo vzato v úvahu, že $\mathbf{F}_y \uparrow \uparrow \mathbf{n}_y$.

Sečteme-li toky (A.110) a (A.112), tak dospějeme k následujícímu výsledku:

$$d\Psi_1 + d\Psi_2 = \frac{\partial F_y}{\partial y} dxdydz = \frac{\partial F_y}{\partial y} dV. \quad (\text{A.114})$$

Podobným způsobem jako pro složku F_y odvodíme toky složek F_x a F_z zbývajících plochami elementární krychle, takže dostaneme:

$$d\Psi_3 + d\Psi_4 = \frac{\partial F_z}{\partial z} dxdydz = \frac{\partial F_z}{\partial z} dV. \quad (\text{A.115})$$

$$d\Psi_5 + d\Psi_6 = \frac{\partial F_x}{\partial x} dxdydz = \frac{\partial F_x}{\partial x} dV. \quad (\text{A.116})$$

Pro celkový tok všemi stěnami elementární krychle můžeme psát:

$$d\Psi = \oint_{\text{krychle}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = d\Psi_1 + d\Psi_2 + d\Psi_3 + d\Psi_4 + d\Psi_5 + d\Psi_6 =$$

$$\left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right) dV = \text{div} \mathbf{F} dV \equiv \nabla \cdot \mathbf{F} dV, \quad (\text{A.117})$$

kde div nebo $\nabla \cdot$ značí operátor **divergence**.

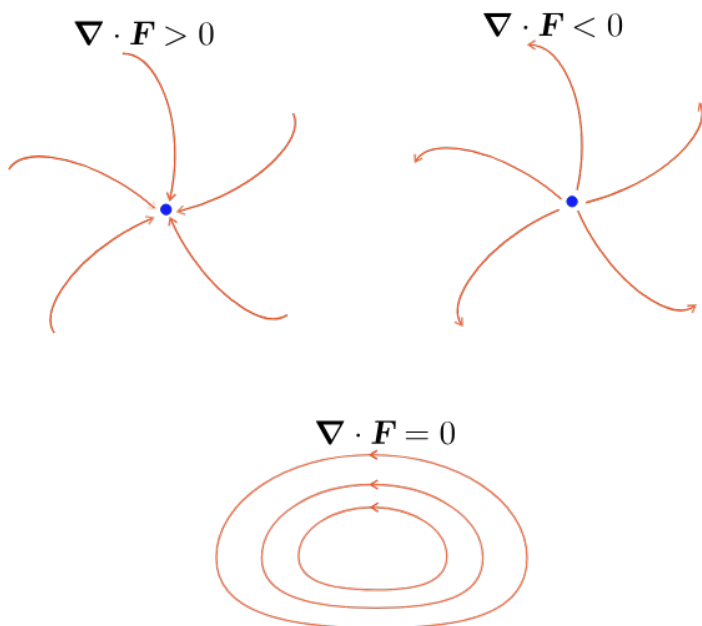
Ze vztahu (A.117) plyne, že divergence vektorové funkce v bodě o polohovém vektoru $\mathbf{r} = (x, y, z)$ je tok vektoru \mathbf{F} připadající na jednotkový objem v okolí tohoto bodu.

Na obr. A.VII jsou zobrazeny tři typy polí pomocí orientovaných křivek, které mají tu vlastnost, že v každém jejich bodě je vektor \mathbf{F} ke křivce tečný⁶. Obecně se tyto čáry nazývají **vektorové čáry**.

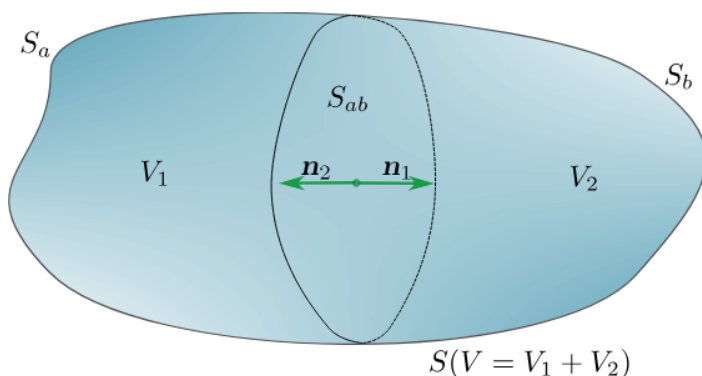
Je-li $\nabla \cdot \mathbf{F} > 0$, pak je příslušný bod **zřídlem** (zde vektor „vzniká“), pro $\nabla \cdot \mathbf{F} < 0$ je tento bod **propadem** či **norem** (zde vektor „zaniká“) a platí-li pro všechny body, že $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$, pak se jedná o tzv. pole **solenoidální** či **nezřídlové**.

Uvažujme uzavřenou plochu S , která uzavírá objem V , viz obr. A.VIII. Pro tuto

⁶Může se jednat např. o siločáry, proudové čáry, proudnice, indukční čáry apod.



Obrázek A.VII: Charakteristika jednotlivých typů polí s ohledem na hodnotu $\nabla \cdot \mathbf{F}$ v uvažovaném bodě.



Obrázek A.VIII: Tok uzavřenou plochou $S(V)$.

plochu můžeme psát, že $S = S_a + S_b$. Potom pro tok vektoru \mathbf{F} uzavřenou plochou S můžeme psát

$$\oiint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_a} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{S_b} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}. \quad (\text{A.118})$$

Zavedeme si následující uzavřené plochy, viz obr. A.VIII

$$S_1 = S_a + S_{ab}, \quad (\text{A.119})$$

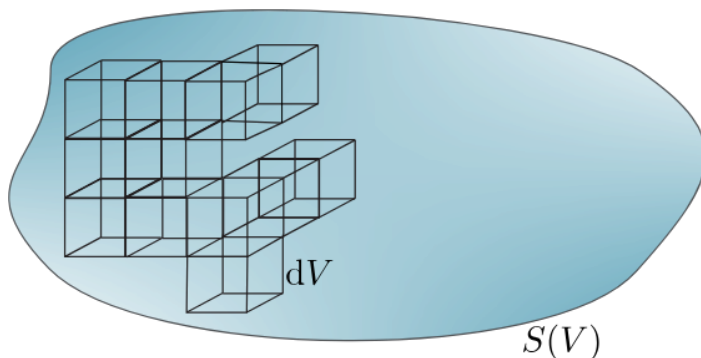
$$S_2 = S_b + S_{ab}. \quad (\text{A.120})$$

Nyní sečteme toky vektoru \mathbf{F} těmito uzavřenými plochami

$$\begin{aligned} \oiint_{S_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} + \oiint_{S_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_{S_a} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{S_{ab}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{S_b} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} - \iint_{S_{ab}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \\ &= \iint_{S_a} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{S_b} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}. \quad (\text{A.121}) \end{aligned}$$

V rovnosti (A.121) se nám odečetly toky vektoru \mathbf{F} plochou S_{ab} , jelikož v jednom případě tento vektor skrz tuto plochu vtéká a v druhém případě vytéká, přičemž co do velikosti jsou tyto toky stejné. Z výše uvedeného vyplývá, že toky společnými plochami se vždy **vyruší!**

Dále vyplníme plochu S uzavírající objem V elementárními krychlemi, viz obr. A.IX. Nasčítáme přes objem příspěvky toků skrz jednotlivými elementárními



Obrázek A.IX: Vyplnění uzavřené plochy S elementárními krychlemi.

krychlemi, což můžeme zapsat pomocí objemového integrálu

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{F} dV . \quad (\text{A.122})$$

Připomeňme, že tok elementární krychle je dán jako

$$\nabla \cdot \mathbf{F} dV .$$

Jelikož již víme, že se toky společnými stěnami vyruší, tak výsledný tok bude dán pouze tokem těch stěn elementárních krychle, které s žádnými jinými nesousedí. Tyto stěny tvoří plochu S uzavírající objem V . Takže součet toků z elementárních krychle vyplňujících objem V je roven toku vektoru \mathbf{F} skrz uzavřenou plochu S . Tuto skutečnost můžeme matematicky zapsat jako

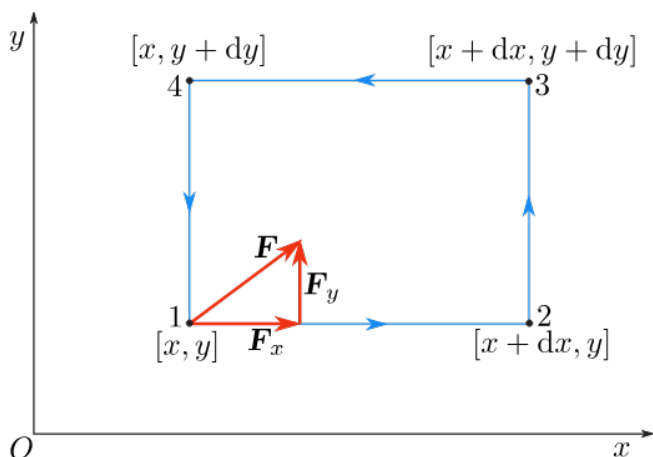
$$\oint_{S(V)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{F} dV , \quad (\text{A.123})$$

kde vztah (A.123) představuje matematický zápis **Gaussovy věty** (Gaussova teoremu).

A.7.3 Rotace

Uvažujme vektorové pole $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$. Provedeme cirkulaci⁷ vektoru \mathbf{F} kolem elementárního obdelníka o elementární ploše $dS = dx dy$. Tento elementární obdelník se nachází v třírozměrném prostoru my si však souřadnicový systém zvolíme tak, aby tento ležel v rovině (x, y) , viz obrázek A.X. Pro cirkulaci vektoru \mathbf{F} kolem

⁷Cirkulaci vektoru rozumíme křivkový integrál tohoto vektoru po uzavřené křivce.



Obrázek A.X: Církulace vektoru \mathbf{F} kolem elementárního obdélníku.

uvažovaného elementárního obdélníku můžeme psát:

$$\oint_{\square} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_2^3 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_3^4 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_4^1 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} . \quad (\text{A.124})$$

Uvědomíme-li si, že $\mathbf{F} = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j}$ a $d\mathbf{r} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j}$, pak na základě pravidla pro skalární součin a s ohledem na obrázek A.X můžeme psát:

$$\int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = F_x dx , \quad (\text{A.125})$$

$$\int_2^3 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \left(F_y + \frac{\partial F_y}{\partial x} dx \right) dy , \quad (\text{A.126})$$

$$\int_3^4 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \left(F_x + \frac{\partial F_x}{\partial y} dy \right) dx , \quad (\text{A.127})$$

$$\int_4^1 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -F_y dy . \quad (\text{A.128})$$

Na základě rovnosti (A.124) a rovnic (A.125)-(A.128) dostaneme:

$$\begin{aligned} \oint_{\square} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= F_x dx + F_y dy + \frac{\partial F_y}{\partial x} dx dy - F_x dx - \frac{\partial F_x}{\partial y} dx dy - F_y dy = \\ &= \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) dx dy = \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) dS . \end{aligned} \quad (\text{A.129})$$

Zavedeme si operaci **rotace** vektorové funkce následujícím způsobem:

$$\begin{aligned} \text{rot} \mathbf{F} \equiv \nabla \times \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \\ &+ \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \mathbf{k} = (\nabla \times \mathbf{F})_x \mathbf{i} + (\nabla \times \mathbf{F})_y \mathbf{j} + (\nabla \times \mathbf{F})_z \mathbf{k} . \end{aligned} \quad (\text{A.130})$$

Porovnáním rovností (A.129) a (A.130) dostaneme:

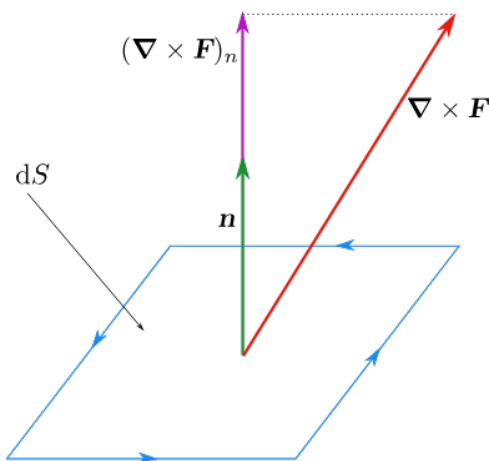
$$\oint_{\square} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = (\nabla \times \mathbf{F})_z dS = (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}, \quad (\text{A.131})$$

kde $d\mathbf{S} = dS\mathbf{n} = dS\mathbf{k}$.

Z výrazu (A.131) vyplývá, že cirkulace kolem elementárního obdélníku vektoru \mathbf{F} je dána skalárním součinem $(\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} \equiv \text{rot}\mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, takže pro cirkulaci vektoru \mathbf{F} kolem libovolně v prostoru orientovaného elementárního obdélníku je dána výrazem

$$\oint_{\square} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \underbrace{(\nabla \times \mathbf{F})_n}_{\text{normálová složka}} dS = (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}, \quad (\text{A.132})$$

kde $d\mathbf{S} = dS\mathbf{n}$, viz obr. A.XI. Z rovnosti (A.132) vyplývá, že



Obrázek A.XI: Orientace elementární plochy obdélníka a rotace vektorové funkce \mathbf{F} .

$$(\nabla \times \mathbf{F})_n = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint_{\square} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}}{\Delta S}. \quad (\text{A.133})$$

Navíc z rovnosti (A.132) plyne, že cirkulace vektoru (vektorové funkce) \mathbf{F} podél elementárního obdélníku uzavírajícího elementární plochu dS je rovna toku rotace této vektorové funkce elementární plochou dS .

Platí-li pro všechny body, že $\text{rot}\mathbf{F} = \mathbf{0}$, pak říkáme, že se jedná o **nevírové (potenciálové)** vektorové pole.

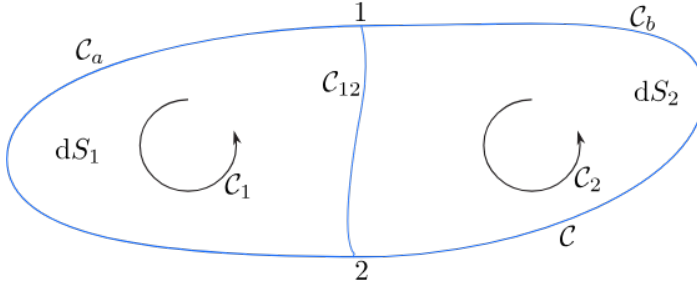
Uvažujme cirkulaci vektoru \mathbf{F} kolem nějaké uzavřené křivky \mathcal{C} :

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathcal{C}_a} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{\mathcal{C}_b} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}, \quad (\text{A.134})$$

přičemž $\mathcal{C} = \mathcal{C}_a + \mathcal{C}_b$.

Dále na základě obrázku A.XII uvažujme následující uzavřené: křivky

$$\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_a + \mathcal{C}_{21}, \quad (\text{A.135})$$



Obrázek A.XII: Uzavřené křivky.

$$\mathcal{C}_2 = \mathcal{C}_b + \mathcal{C}_{12} , \quad (\text{A.136})$$

kde křivka \mathcal{C}_{12} značí křivku z bodu 1 do bodu 2 a křivka \mathcal{C}_{21} značí křivku z bodu 2 do bodu 1.

Provedeme součet cirkulací vektoru \mathbf{F} kolem uzavřených křivek \mathcal{C}_1 a \mathcal{C}_2 a využijeme vztahů (A.135), (A.136) a (A.134):

$$\begin{aligned} \oint_{\mathcal{C}_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \oint_{\mathcal{C}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_{\mathcal{C}_a} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{\mathcal{C}_{21}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{\mathcal{C}_b} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{\mathcal{C}_{12}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \\ &= \oint_{(\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}_1} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}_1 + \oint_{(\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}_2} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}_2 = \\ &= \int_{\mathcal{C}_a} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_2^1 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{\mathcal{C}_b} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \\ &= \int_{\mathcal{C}_a} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{\mathcal{C}_b} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathcal{C}_a} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{\mathcal{C}_b} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} . \end{aligned} \quad (\text{A.137})$$

Všimněte si, že při úpravách v rovnosti (A.137) bylo využito skutečnosti:

$$\int_{\mathcal{C}_{21}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_2^1 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} .$$

Z rovnosti (A.137) vyplývá, že se příspěvky společných částí uzavřených křivek vždy vyruší. Tuto skutečnost můžeme zobecnit pro případ, který je zachycen na obrázku A.XIII, kde plocha S , která je uzavřená křivkou \mathcal{C} , je rozdělena na elementární plochy. Budeme-li provádět cirkulace kolem elementárních obdélníků vymezujících tyto elementární plochy, pak využijeme výše uvedeného faktu, že se příspěvky při integraci podél společných částí sousedících uzavřených křivek vyruší. Takže nám zůstanou jen příspěvky podél těch částí křivek, které s jinými nesousedí, tj. ve výsledku příspěvek z integrace funkce \mathbf{F} podél křivky \mathcal{C} , která uzavírá již zmíněnou plochu S :

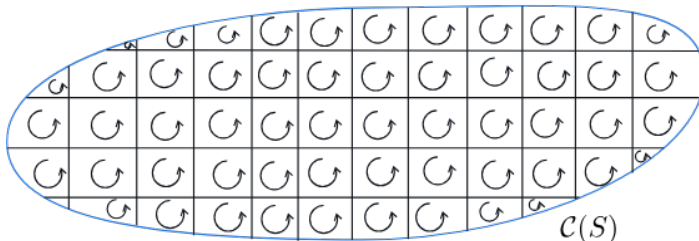
$$\oint_{\mathcal{C}(S)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} . \quad (\text{A.138})$$

Jelikož můžeme na základě rovnosti (A.132) vyjádřit cirkulaci vektoru kolem elementárního obdélníku tokem rotace tohoto vektoru elementární plochou, kterou tento obdélník vymezuje, je možné součet všech cirkulací kolem elementárních obdélníků vyjádřit jako součet toků rotací funkce \mathbf{F} elementárními plochami, které

tyto obdélníky vymezují, tj.

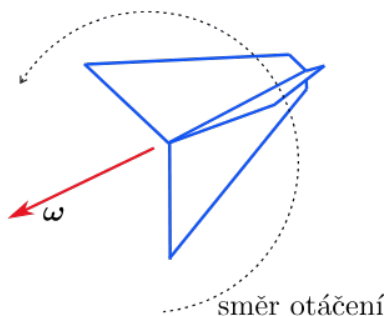
$$\oint_{\mathcal{C}(S)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}, \quad (\text{A.139})$$

Rovnost (A.139) je matematickým vyjádřením **Stokesovy věty** (Stokesova teorému). Abychom si přiblížili fyzikální smysl vektoru rotace, tak použijeme malé sondy ve



Obrázek A.XIII: Rozdělení plochy S vymezené uzavřenou křivkou \mathcal{C} na jednotlivé elementární plochy.

tvary lopatkového kola, viz obr. A.XIV. Tuto sondu vložíme do proudící kapaliny neboli vložíme ji do rychlostního pole kapaliny $\mathbf{v}(x, y, z)$ a sonda se bude pohybovat různou rychlostí v závislosti na její poloze. Směr vektoru úhlové rychlosti otáčení sondy $\boldsymbol{\omega}$ určíme pomocí pravidla pravé ruky, kdy prsty ukazují směr otáčení a vztyčený palec směr vektoru $\boldsymbol{\omega}$. Předpokládejme, že sondu natáčíme kolem

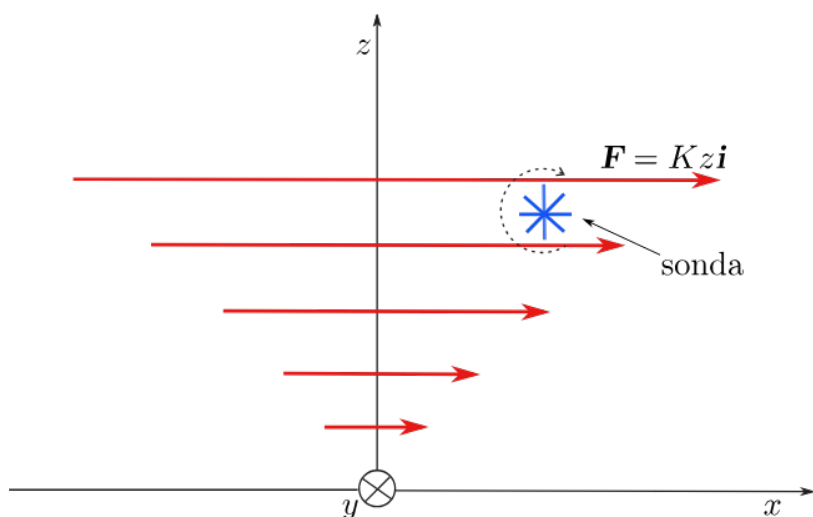


Obrázek A.XIV: Sonda ve tvaru lopatkového kola.

pevně zvoleného bodu. Sonda dosáhne maximální rychlosti tehdy, když vektor úhlové rychlosti $\boldsymbol{\omega}$ má směr vektoru rotace v bodě, kolem kterého uvažovanou sondu natáčíme (vektoru rotace leží na ose otáčení). Velikost rychlosti otáčení je úměrná velikosti vektoru rotace. V případě, že se sonda nebude při jakékoliv její orientaci otáčet, pak se jedná o nevírové rychlostí pole neboli $\nabla \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$ (např. pro homogenní rychlostní pole).

Příklad 1.7.2

Uvažujme následující vektorovou funkci (vektorové pole) $\mathbf{F} = Kz\mathbf{i}$, kde K je konstanta. Toto pole je zachycené na obrázku A.XV pro $z > 0$. Určete rotaci tohoto pole a směr vektoru úhlové rychlosti pro maximální rychlost otáčení.



Obrázek A.XV: Uvažované vektorové pole.

Řešení:

Z obrázku A.XV je zřejmé, bude-li osa otáčení sondy lopatkového kola ležet rovnoběžně s osou y , tak se tato sonda bude otáčet s maximální rychlostí. Použijeme-li pravidla pravé ruky, pak směr vektoru úhlové rychlosti $\boldsymbol{\omega}$ bude shodný s kladným směrem osy y neboli se směrem souřadnicového vektoru \mathbf{j} ($\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{j}$). Dále určíme rotaci uvažovaného pole, tedy

$$\nabla \times \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial z} \mathbf{j} = K \mathbf{j}.$$

Z výsledku je patrné, že směr rotace je shodný se směrem vektoru úhlové rychlosti $\boldsymbol{\omega}$ pro maximální rychlost otáčení sondy.

Příloha B

Některé vektorové identity

Nejdříve si připomeneme některé rovnosti z vektorové algebry zmíněné v kap. 4.2:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \text{skalár} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z, \quad (\text{A.1})$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \text{vektor} = (A_y B_z - A_z B_y) \mathbf{i} + (A_z B_x - A_x B_z) \mathbf{j} + (A_x B_y - A_y B_x) \mathbf{k}, \quad (\text{A.2})$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{A} = \mathbf{0}, \quad (\text{A.3})$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \text{pro} \quad \mathbf{A} \perp \mathbf{B}, \quad (\text{A.4})$$

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = 0, \quad (\text{A.5})$$

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}, \quad (\text{A.6})$$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{C}. \quad (\text{A.7})$$

V následující části si napíšeme některé identity. Jelikož si nabla operátor ∇ můžeme představit jako vektor, tak v některých případech pro jejich odvození využijeme analogie s některou z algebraických rovností (A.1) - (A.7).

Identity

$$\begin{aligned} \text{div grad } f &\equiv \nabla \cdot (\nabla f) = \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right) \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k} \right) = \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = (\nabla \cdot \nabla) f = \nabla^2 f = \Delta f = \text{skalární pole}, \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

$$\text{rot grad } f \equiv \nabla \times (\nabla f) = (\nabla \times \nabla) f = \mathbf{0} \quad \text{analogie s (A.3)}, \quad (\text{A.9})$$

$$\text{div rot } \mathbf{F} \equiv \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = (\nabla \times \nabla) \cdot \mathbf{F} = 0 \quad \text{analogie s (A.6)}, \quad (\text{A.10})$$

$$(\nabla \cdot \nabla) \mathbf{F} = \nabla^2 \mathbf{F} = \Delta \mathbf{F} = \text{vektorové pole}, \quad (\text{A.11})$$

$$\nabla \cdot (\nabla \cdot \mathbf{F}) = \text{vektorové pole}, \quad (\text{A.12})$$

$$\text{rot rot } \mathbf{F} \equiv \nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla^2 \mathbf{F} = \text{grad div } \mathbf{F} - \Delta \mathbf{F} \quad \text{analogie s (A.7)}. \quad (\text{A.13})$$

Odvození dvou dalších identit

Uvažujme polohový vektor:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} . \quad (\text{A.14})$$

Potom bude platit, že

$$\nabla \cdot \mathbf{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3 , \quad (\text{A.15})$$

$$\nabla \times \mathbf{r} = \mathbf{0} . \quad (\text{A.16})$$

Nechť \mathbf{k} je konstantní vektor, pak

$$\nabla(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) = \mathbf{k} . \quad (\text{A.17})$$

Uvažujme polohový vektor v čárkovaných souřadnicích:

$$\mathbf{r}' = x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j} + z'\mathbf{k} . \quad (\text{A.18})$$

Pro rozdíl polohových vektorů (A.14) a (A.18) můžeme psát:

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}' = (x - x')\mathbf{i} + (y - y')\mathbf{j} + (z - z')\mathbf{k} . \quad (\text{A.19})$$

Dále pro velikost rozdílu polohových vektorů dospějeme k následujícímu vztahu:

$$R = |\mathbf{R}| = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2} . \quad (\text{A.20})$$

Platí, že

$$\begin{aligned} \frac{\partial 1/R}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} [(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{-1/2} = \frac{\partial (R^2)^{-1/2}}{\partial x} = \\ &= -\frac{1}{2} \frac{2(x - x')}{(R^2)^{3/2}} = -\frac{x - x'}{R^3} . \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

Obdobně:

$$\frac{\partial 1/R}{\partial y} = -\frac{y - y'}{R^3} , \quad (\text{A.22})$$

$$\frac{\partial 1/R}{\partial z} = -\frac{z - z'}{R^3} . \quad (\text{A.23})$$

Pro gradient skalární funkce $1/R$ podle nečárkovaných souřadnic můžeme psát, že

$$\nabla \left(\frac{1}{R} \right) = \frac{\partial 1/R}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial 1/R}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial 1/R}{\partial z} \mathbf{k} . \quad (\text{A.24})$$

V gradientu (A.24) využijeme rovností (A.21), (A.22) a (A.23), čímž dostáváme:

$$\nabla \left(\frac{1}{R} \right) = -\frac{x - x'}{R^3} \mathbf{i} - \frac{y - y'}{R^3} \mathbf{j} - \frac{z - z'}{R^3} \mathbf{k} , \quad (\text{A.25})$$

což s přihlédnutím ke vztahu (A.19) je možné po úpravě vyjádřit jako

$$\nabla \left(\frac{1}{R} \right) = -\frac{\mathbf{R}}{R^3} = -\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} . \quad (\text{A.26})$$

V případě, že bychom chtěli vyjádřit gradient funkce $1/R$ podle čárkovaných souřadnic, tj.

$$\nabla' \left(\frac{1}{R} \right) = \frac{\partial 1/R}{\partial x'} \mathbf{i} + \frac{\partial 1/R}{\partial y'} \mathbf{j} + \frac{\partial 1/R}{\partial z'} \mathbf{k}. \quad (\text{A.27})$$

Jelikož platí, že

$$\frac{\partial 1/R}{\partial x'} = \frac{x - x'}{R^3}. \quad (\text{A.28})$$

Obdobně:

$$\frac{\partial 1/R}{\partial y'} = \frac{y - y'}{R^3}, \quad (\text{A.29})$$

$$\frac{\partial 1/R}{\partial z'} = \frac{z - z'}{R^3}, \quad (\text{A.30})$$

je možné dospět po dosazení vztahů (A.28), (A.29) a (A.30) do výrazu (A.27) k následující rovnosti:

$$\nabla' \left(\frac{1}{R} \right) = \frac{\mathbf{R}}{R^3} = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \quad (\text{A.31})$$

